KUDE - ΛΑΜΨΑ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙ

RUDE - ΛΑΜΨΑ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ
ΤΗΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΕΙΔΙΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ

ΠΑΝΤΩΝ ΤΩΝ ΕΙΣ ΤΑ ΚΑΤΩΤΕΡΑ ΣΧΟΛΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΟΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΣΚΕΥΑΣΘΕΙΣΑ

ΕΠΙ ΤΗ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΝΕΩΤΑΤΩΝ ΜΕΘΟΔΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΥΠΟ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Ι. ΛΑΜΨΑ

ΜΕΡΟΣ Γ'.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΔΙΑΣΚΕΥΑΣΘΕΙΣΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΙΚΗΝ

ΤΟΥ

ADOLF RUDE

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ: ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & Σ^ΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»
44 Ὁδὸς Σταδίου 44
1927

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον πρέπει νὰ φέρῃ τὴν ὑπογραφὴν τοῦ διασκευαστοῦ καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΤΥΠΟΙΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Ὅσα περιλαμβάνονται ἐντὸς ἀγκυλῶν ([ ]), εἶναι αἱ οὐσιωδέστεραι ἀπὸ τὰς προσθήκας καὶ τὰς μεταβολάς, αἱ ὁποῖαι ἔχουν γίνει ἀπὸ τὸν διασκευαστὴν εἰς τὸ πρωτότυπον τοῦ Rude. Πολλαὶ ἄλλαι μεταβολαί, ὀλιγώτερον οὐσιώδεις (π. χ. μικραὶ προσθῆκαι, εὐρύτεραι ἀναπτύξεις πραγμάτων συντόμως ἐκτιθεμένων, ἐλαφραὶ διαφοραὶ κατὰ τὴν διατύπωσιν χάριν σαφεστέρας ἐκθέσεως τῶν πραγμάτων, μεταθέσεις, διορθώσεις εἰς τὴν βιβλιογραφίαν κ.τ.λ.), οὔτε ἦτο εὔκολον, οὔτε ἐκρίθη ἀπαραίτητον νὰ δηλωθοῦν εἰς τὴν διασκευήν.

Ὁ ἀναγνώστης θὰ παρατηρήσῃ, ὅτι καὶ τὸ προκείμενον μέρος τοῦ ὅλου ἔργου, ὅπως καὶ τὸ δεύτερον (ἡ Διδακτικὴ δηλ. τῆς Γεωγραφίας), ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τῆς διασκευῆς· διότι, καθὼς εἰς ἐκεῖνο, ἔτσι καὶ εἰς αὐτὸ τὰ τρία πέμπτα τοῦ περιεχομένου ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς προσθήκας καὶ τὰς μεταβολάς τοῦ διασκευαστοῦ. Πράγματι καταβάλλων μικρὰν ἀκόμη προσπάθειαν ὁ διασκευαστὴς θὰ ἠμποροῦσε νὰ παρουσιάσῃ ἰδικόν του βιβλίον· δὲν τὸ ἔκαμε ὅμως αὐτὸ καὶ εἰς τὸ προκείμενον μέρος τοῦ ἔργου, ἀναλογιζόμενος μὲ εὐγνωμοσύνην, ὅτι τὸ βιβλίον τοῦ Rude τοῦ ἔδωκε τὰς βάσεις, ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας ἔχει στηριχθῆ ἡ διασκευή.

I. ΤΟ ΕΡΓΟΝ, [Ο ΣΚΟΠΟΣ] ΚΑΙ Η ΜΟΡΦΩΤΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ.

[Ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἔργον ἔχει νὰ γνωρίσῃ εἰς τοὺς μαθητὰς ***τὴν ἀρίθμησιν***. Εἶναι δέ, καθὼς εἶναι γνωστόν, ἡ ἀρίθμησις ὑποκείμενον ***τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης***, ἡ ὁποία πάλιν ὑπὸ τὰς δύο της μορφάς, τὴν μορφὴν δηλ. ***τῆς Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς*** καὶ τὴν μορφὴν ***τῆς Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς***, ἡ ὁποία καὶ ἐνδιαφέρει κυρίως τὸ κατώτερον σχολεῖον, εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς κλάδους ***τῆς καθόλου μαθηματικῆς ἐπιστήμης***.

Στοιχεῖα τῆς ἀριθμήσεως εἶναι ***οἱ ἀριθμοί***, οἱ ὁποῖοι ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των εὑρίσκονται εἰς ὡρισμένας ἀναμεταξύ των ***σχέσεις***. Ἔργον δὲ τῆς ἀριθμήσεως εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ συνδέῃ δοθέντας ἀριθμοὺς μὲ ἕνα ὡρισμένον τρόπον (π. χ. μὲ τὸν τρόπον τῆς προσθέσεως, τῆς ἀφαιρέσεως κ.τ.λ.) καὶ νὰ σχηματίζῃ ἀπὸ τοὺς τοιουτοτρόπως συνδεθέντας ἀριθμοὺς νέους, ἔχουσα, ἐννοεῖται, ὑπ' ὄψει της εἰς τὰς ἐργασίας της αὐτὰς τὰς μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὑπαρχούσας σχέσεις, ἤτοι ἐργαζομένη ***μετὰ λόγου***, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ διατυπώνῃ τοὺς νόμους ἢ κανόνας, οἱ ὁποῖοι ρυθμίζουν τὰς ἐλλόγους αὐτὰς συνδέσεις τῶν ἀριθμῶν καὶ τοὺς ἐκ τῶν συνδέσεων αὐτῶν προκύπτοντας ἐλλόγους ἐπίσης σχηματισμοὺς νέων ἀριθμῶν. Ἐκτελεῖ δὲ ἡ ἀρίθμησις τὸ ἔργον της αὐτὸ ἐξ ὁλοκλήρου, ἐφόσον δίδονται μὲν οἱ συνδετέοι ἀριθμοί, ἀλλὰ δὲν δίδεται μαζὶ καὶ ὁ τρόπος τῆς συνδέσεώς των (ἤτοι ἡ ἐκτελεστέα πρᾶξις), ὅπως συμβαίνει εἰς τὰ προβλήματα, τὰ λαμβανόμενα ἀπὸ τὸν πρακτικὸν βίον (π. χ. ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ γάλατος ἀξίζει 12 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν αἱ 3 ὀκάδες;). Ἀλλ' ἐφόσον μὲ τοὺς συνδετέους ἀριθμούς δίδεται καὶ ὁ τρόπος τῆς συνδέσεώς των, ὅπως συμβαίνει εἰς τὰ προβλήματα, μὲ ἀφῃρημένους ἢ καὶ μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς (π. χ. 14+13=; 14 δρ.—13 δρ.=;), τὸ ἔργον τῆς ἀριθμήσεως περιορίζεται φυσικὰ εἰς τὸν ἐκ τῶν τοιουτοτρόπως συνδεθέντων ἀριθμῶν ἔλλογον σχηματισμὸν νέων καὶ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν κανόνων, οἱ ὁποῖοι διέπουν κάθε τέτοιον σχηματισμόν.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω τώρα ἐξάγεται, ὅτι καὶ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία θὰ ἔχῃ τὰ ἀκόλουθα μερικὰ ἔργα: 1) νὰ μεταδώσῃ εἰς τοὺς μαθητὰς ***τὴν γνῶσιν τῶν ἀριθμῶν***, βασιζομένην φυσικὰ εἰς τὴν κατανόησιν τῶν μεταξύ των ὑπαρχουσῶν σχέσεων, 2) νὰ τοὺς κάμῃ ἱκανοὺς ***νὰ συνδέουν*** μὲν ***μετὰ λόγου δοθέντας ἀριθμούς***, τῶν ὁποίων δὲν δηλώνεται ὁ τρόπος τῆς συνδέσεως, ***νὰ σχηματίζουν δὲ ἐπίσης μετὰ λόγου*** νέους ἀριθμοὺς ἀπὸ τοὺς ὁπωσδήποτε συνδεθέντας καὶ 3) νὰ τοὺς κάμῃ ἱκανοὺς ***νὰ συνάγουν μόνοι των τοὺς κανόνας***, οἱ ὁποῖοι διέπουν κάθε τέτοιαν σύνδεσιν καὶ κάθε τέτοιον σχηματισμόν.

Ὅπως δὲ τὰ ἄλλα μαθήματα, ἔτσι καὶ τὸ μάθημα τῆς ἀριθμητικῆς ὀφείλει νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον του αὐτὸ χάριν ἑνὸς ὡρισμένου ***παιδαγωγικοῦ σκοποῦ***. Ὁ σκοπὸς δὲ αὐτὸς συνίσταται εἰς τὴν ἀνάπτυξιν ὅλων ἐκείνων τῶν παιδαγωγικῶν διαφερόντων τῶν μαθητῶν, ὅσα ἠμπορεῖ ἐκ φύσεως νὰ καλλιεργήσῃ εἰς αὐτοὺς ἡ ἀσχολία των μὲ τὴν ἀρίθμησιν.

Προκειμένου τώρα νὰ καθορίσωμεν τὰ παιδαγωγικὰ διαφέροντα, τὰ ὁποῖα ἠμπορεῖ νὰ ἀναπτύξῃ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, νὰ καθορίσωμεν δηλαδὴ τὴν ***μορφωτικήν*** της ***ἀξίαν***, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας τὰ ἀκόλουθα. Ἡ ἀριθμητική, τῆς ὁποίας τὸ ὑποκείμενον, ἤτοι τὴν ἀρίθμησιν, πρόκειται νὰ γνωρίσῃ εἰς τοὺς μαθητὰς ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, καθὼς καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι δὲν εἶναι ***ὑλικαί, ἀλλ' εἰδολογικαὶ*** ἐπιστῆμαι, δὲν ἐρευνοῦν δηλαδὴ τὴν ὕλην, ἤτοι τὸ ποιόν, τὴν οὐσίαν τῶν ἀντικειμένων τῆς φύσεως καὶ τῆς ἀνθρωπίνης δημιουργίας, ὅπως κάμνουν π. χ. αἱ φυσικαὶ καὶ αἱ κοινωνικαὶ ἐπιστῆμαι, ἀλλ' ἕνα εἶδός των, μίαν ἄποψίν των, ἡ ὁποία γίνεται μὲν ἀντιληπτὴ εἰς αὐτὰ καὶ μὲ αὐτά, δὲν ἔχει ὅμως σχέσιν μὲ τὴν ποιότητά των. Ἡ ἀριθμητικὴ π. χ. ἐξετάζει τὰ μνημονευθέντα ἀντικείμενα καὶ

φαινόμενα ὡς πρὸς τὸ εἶδος τοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι ὡς πρὸς ***τὴν σχέσιν τοῦ πλήθους***, ἡ ὁποία παρουσιάζεται εἰς αὐτὰ καὶ εἶναι ὅλως διόλου εἰδολογική. Δι' αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι δὲν θεωροῦνται ὡς αὐτοτελεῖς ἐπιστῆμαι, ἀλλ' ὡς βοηθητικαὶ τῶν ὑλικῶν ἐπιστημῶν, καὶ προπάντων τῶν φυσικῶν, τῶν ὁποίων τὰ ὑποκείμενα ἐξετάζουν ὡς πρὸς ἕνα εἶδος. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω φυσικὰ ἐξάγεται, ὅτι καὶ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἐφόσον διδάσκει τὴν ἀρίθμησιν καὶ μεταδίδει δι' αὐτὸ ὄχι ὑλικάς, ἀλλὰ εἰδολογικὰς γνώσεις, ἠμπορεῖ μὲν νὰ ἀναπτύξῃ ***ἀμέσως*** τὰ παιδαγωγικὰ ἐκεῖνα διαφέροντα, ὅσα αἱ γνώσεις αὐταὶ ἠμποροῦν νὰ ἐξεγείρουν, δὲν ἠμπορεῖ ὅμως νὰ ἀναπτύξῃ μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, ἤτοι ἀμέσως, καὶ ἐκεῖνα τὰ διαφέροντα, ὅσα ἠμπορεῖ νὰ ἐξεγείρῃ μόνον ἡ ἀπόκτησις ὑλικῶν γνώσεων, γνώσεων δηλαδὴ αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν ἰδίαν τὴν ὕλην, εἰς τὴν ἰδίαν τὴν ποιότητα τῶν ἀντικειμένων καὶ τῶν φαινομένων τῆς φύσεως καὶ τῆς ἀνθρωπίνης δημιουργίας.

Ἀμέσως ἠμπορεῖ νὰ ἀναπτύξῃ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία τὸ διαφέρον τῶν μαθητῶν πρὸς ***τὴν γνῶσιν τῆς ἰδίας τῆς ἀριθμήσεως***. Ἠμπορεῖ δὲ νὰ ἀναπτύξῃ διαφέρον καὶ πρὸς ***τὴν ἐμπειρικὴν*** καὶ πρὸς ***τὴν θεωρητικὴν*** γνῶσίν της. Διαφέρον πρὸς τὴν ἐμπειρικὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως ἐξεγείρει ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, ἐφόσον προκαλεῖ τοὺς μαθητὰς νὰ σχηματίζουν τὰς εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν, χωρὶς νὰ ἐξακριβώνουν καὶ τὰς μεταξύ αὐτῶν ὑπαρχούσας σχέσεις, καὶ ἐφόσον κάμνει μὲν τοὺς μαθητὰς ἱκανοὺς νὰ συνδέουν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ νὰ ἐξάγουν ἀπὸ τοὺς συνδεθέντας νέους, δὲν στηρίζει ὅμως τὰς ἐργασίας αὐτὰς εἰς τὴν ἐπίγνωσιν τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, ἀλλ' εἰς ἐντελῶς πρακτικοὺς κανόνας, τοὺς ὁποίους μεταδίδει ἑτοίμους εἰς τοὺς μαθητάς, διὰ νὰ τοὺς ἀπομνημονεύσουν μηχανικὰ καὶ τοὺς ἐφαρμόζουν μὲ τὸν ἴδιον φυσικὰ τρόπον. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία δὲν πρέπει νὰ ἀποβλέπῃ εἰς τὴν καλλιέργειαν ἑνὸς τέτοιου διαφέροντος πρὸς τὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως. Τὸ καθαρὸν ἐμπειρικὸν διαφέρον δὲν θὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ προσφέρῃ εἰς τοὺς μαθητὰς καὶ τὴν παραμικρὰν ὑπηρεσίαν, ὁσάκις θὰ ζητῆται ἀπ' αὐτοὺς νὰ κάμουν ἔστω καὶ τὴν παραμικρὰν παρέκκλισιν ἀπὸ τὸν μηχανικὸν τρόπον τῆς ἐργασίας. Ἀντὶ τοῦ διαφέροντος αὐτοῦ ὀφείλει νὰ ἀναπτύσσῃ εἰς τοὺς μαθητὰς ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία διαφέρον πρὸς τὴν **θεωρητικὴν** γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καὶ θὰ κατορθώνῃ, ἂν προκαλῇ τοὺς μαθητὰς νὰ ἐκτελοῦν ὅλας τὰς ἀνωτέρω ἀριθμητικὰς ἐργασίας μετὰ λόγου, ἤτοι μὲ πλήρη ἐπίγνωσιν τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, καὶ νὰ συνάγουν δι᾿ αὐτὸ μόνοι των τοὺς σχετικοὺς κανόνας, τοὺς ὁποίους καὶ θὰ ἠμποροῦν νὰ ἐφαρμόζουν ἐπίσης μὲ νοῦν.

Ἐφόσον τώρα θὰ ἀναπτύσσῃ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία τὸ πρὸς τὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως διαφέρον τῶν παίδων, δὲν θὰ ἐξεγείρῃ μόνον τὴν τάσιν των πρὸς **πλουτισμὸν τῶν ἀριθμητικῶν των γνώσεων**, ἀλλὰ θὰ **καλλιεργῇ κατ᾿ ἀνάγκην μαζὶ καὶ ὅλας τὰς πνευματικὰς λειτουργίας**, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἀπόκτησιν τῶν γνώσεων αὐτῶν καὶ θὰ τὰς **καθιστᾷ ἱκανὰς νὰ ἐργάζωνται καὶ κατόπιν μὲ ἀποτελεσματικότητα εἰς τὴν ἰδίαν ἢ εἰς ἄλλην συγγενῆ κατεύθυνσιν**. Ἀπὸ ὅλας δὲ τὰς πνευματικὰς λειτουργίας τῶν παίδων χρησιμοποιεῖ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἰδιαιτέρως τὰς **νοητικάς**. Φυσικὰ δὲν ἐννοοῦμεν μὲ αὐτό, ὅτι αἱ ἄλλαι πνευματικαὶ λειτουργίαι τῶν παίδων μένουν εἰς τὴν διδασκαλίαν αὐτὴν ὅλως διόλου ἀργαί. Ἠξεύρομεν βέβαια, ὅτι μία καλὴ ἀριθμητικὴ διδασκαλία δὲν θὰ παραλείπῃ—καὶ μάλιστα εἰς τὰς ἀρχὰς—νὰ προκαλῇ τοὺς παῖδας, ὅπως ἀφορμῶνται εἰς τὴν ἀρίθμησιν ἀπὸ **τὴν ἐποπτείαν** τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ ἀριθμήσουν, διότι ἡ ἐποπτεία ἀποτελεῖ τὴν ἀναγκαίαν ἀφετηρίαν καὶ βάσιν καὶ τῆς ἀριθμήσεως. Ἐννοοῦμεν ἐπίσης, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία θὰ φροντίζῃ, ὅπως οἱ μαθηταὶ συγκρατοῦν μὲ πίστιν καὶ σταθερότητα εἰς τὴν ψυχήν των τοὺς ἀριθμούς, καθὼς καὶ τὰ ἐκ τῶν συνδέσεών των προκύπτοντα ἐξαγόμενα, τοιουτοτρόπως δὲ θὰ καλλιεργῇ καὶ **τὴν μνήμην** τῶν παίδων εἰς τὴν πιστὴν καὶ ἀσφαλῆ συγκράτησιν τῶν ἀριθμητικῶν αὐτῶν στοιχείων. Ἠξεύρομεν ὡσαύτως, ὅτι οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι θὰ παρουσιάζωνται εἰς τὰ σχετικὰ προβλήματα, θὰ προκαλοῦν τοὺς μαθητὰς νὰ ἀναπαριστάνουν ὁπωσδήποτε καὶ τὰ πράγματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται, τοιουτοτρόπως δὲ θὰ καλλιεργῆται καὶ **ἡ φαντασία** τῶν παίδων εἰς τὴν διαμέσου τῶν ἀριθμῶν ἀνάπλασιν τῶν

συγκεκριμένων ἀντικειμένων. Παρ᾿ ὅλα ὅμως αὐτὰ δὲν πρέπει νὰ λησμονοῦμεν, ὅτι ὅλαι αἱ καθαυτὸ ἀριθμητικαὶ ἐργασίαι, αὐτὸς ἀκόμη ὁ σχηματισμὸς τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν, ἡ μετὰ λόγου σύνδεσίς των, ὁ ἔλλογος σχηματισμὸς νέων ἀριθμῶν ἀπὸ τοὺς συνδεθέντας, τέλος ἡ ἐξαγωγὴ καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν κανόνων εἶναι καθαραὶ **νοητικαὶ** ἐργασίαι, ἀποκλειστικὰ σχεδὸν προϊόντα **κρίσεων** καὶ **συλλογισμῶν** καὶ ὅτι δι᾿ αὐτὸ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, ἐφόσον προκαλεῖ τοὺς παῖδας εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν, τοὺς ἀσκεῖ νὰ κρίνουν καὶ νὰ συλλογίζωνται εἰς τὸ ἀριθμητικὸν πεδίον καὶ κάμνει ἔτσι τὴν νόησίν των ἱκανὴν νὰ ἀσχολῆται καὶ κατόπιν μὲ παρομοίας ἀριθμητικὰς ἐργασίας. Δὲν πρέπει δὲ ἐπίσης νὰ λησμονοῦμεν τὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα ἔχει ἡ διαρκὴς σχεδὸν αὐτὴ λειτουργία τῆς νοήσεως εἰς τὴν ἀρίθμησιν. Ἐφόσον εἰς αὐτὴν ἡ νόησις εὑρίσκεται εἰς διαρκῆ κίνησιν, συνηθίζει ἐν πρώτοις ἀρκετὰ ἐνωρὶς νὰ εἶναι **ἀκριβὴς** εἰς κάθε ἀριθμητικὴν ἐργασίαν, διὰ τὸν ἁπλούστατον λόγον, ὅτι ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας τὰς χαρακτηρίζει αὐστηρὰ **ἀκρίβεια**, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ὀφείλεται, ὅπως εἶναι γνωστόν, εἰς **τὸ μονόσημον** τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν μεταξύ των ὑπαρχουσῶν σχέσεων. Ἀπὸ τὰς ἀρχὰς ἀκόμη τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας κατανοοῦν οἱ μικροὶ μαθηταί, ὅτι μὲ τὴν φύσιν αὐτὴν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχέσεών των δὲν συμβιβάζονται οὔτε παραλείψεις ἀριθμητικῶν παραγόντων, ἔστω καὶ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς λίαν ἀσήμαντοι, οὔτε τὰ παραμικρότερα σφάλματα ὡς πρὸς τὴν ἀντίληψιν τοῦ περιεχομένου τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν μεταξύ των ὑπαρχουσῶν σχέσεων. Κάθε τέτοια ἀνακρίβεια ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ἐσφαλμένον ἐξαγόμενον, πείθονται δὲ οἱ μαθηταὶ παραπολὺ εὔκολα διὰ τὴν ἀνακρίβειάν των, διότι καὶ παραπολὺ εὔκολα ἠμπορεῖ νὰ ἐξελεγχθῇ. Ἀλλ᾿ ἐπίσης ἡ νόησις τῶν μαθητῶν συνηθίζει νὰ ἐργάζεται εἰς τὴν ἀρίθμησιν καὶ μὲ ἄκραν **ἀντικειμενικότητα**, διότι εἰς τὴν ἀρίθμησιν ὡς ἐκ τῆς φύσεώς της λαμβάνονται ὑπ᾿ ὄψιν μόνον οἱ ἀριθμοὶ καὶ ὄχι καὶ ἄλλοι παράγοντες, κείμενοι ἐκτὸς τῶν ἀριθμῶν, παράγοντες π. χ. σχετικοὶ μὲ τὸ ἀριθμοῦν ὑποκείμενον, ὅπως εἶναι αἱ συμπάθειαι καὶ αἱ ἀντιπάθειαί του. Καθόσον δὲ οἱ μαθηταὶ εἴτε βοηθούμενοι ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν, εἴτε καὶ ἀφ᾿ ἑαυτῶν ἀντιλαμβάνονται ἐγκαίρως, ὅτι ὅλαι των αἱ ἀριθμητικαὶ ἐργασίαι διέπονται ἀπὸ ὡρισμένους **νόμους ἢ κανόνας**, οἱ ὁποῖοι δὲν ἐπιδέχονται καμίαν ἐξαίρεσιν, ἡ νόησίς των ἐθίζεται ἐνωρίτατα κατὰ τὴν ἀρίθμησιν καὶ **εἰς τὴν νομιμότητα**, εἰς τὴν διαρκῆ ἀναφορὰν εἰς νόμους ἢ κανόνας. Αὐτοὶ ἀκόμη οἱ μικροὶ μαθηταὶ τῶν κατωτάτων τάξεων ἀρχίζουν νὰ ἀναζητοῦν εἰς ὅλας των τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας κανόνας καὶ προσπαθοῦν νὰ ἐφαρμόζουν πιστότατα τοὺς εὑρεθέντας.

Ἀλλ᾿ ἂν μὲ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν οἱ μαθηταὶ γίνωνται ἱκανοὶ **νὰ ἀριθμοῦν νοοῦντες**, δὲν πρέπει νὰ νομισθῇ, ὅτι μὲ αὐτὴν γίνονται ἱκανοὶ καὶ **νὰ νοοῦν καθόλου**, δὲν πρέπει δηλαδὴ νὰ πιστευθῇ, ὅτι, ἐπειδὴ μὲ αὐτὴν συνηθίζουν εἰς τὸ νὰ κρίνουν καὶ νὰ συλλογίζωνται εἰς τὸ ἀριθμητικὸν πεδίον, δι᾿ αὐτὸ γίνονται ἱκανοὶ νὰ κρίνουν καὶ νὰ συλλογίζωνται καὶ εἰς κάθε ἄλλο πεδίον διαφορετικῆς φύσεως, ὅπως π. χ. εἰς τὸ φυσιογνωστικὸν ἢ τὸ ἱστορικόν. Τονίζομεν δὲ τὸ σημεῖον αὐτό, διότι καὶ πολλοὶ ἀπὸ τοὺς παλαιοτέρους Παιδαγωγικοὺς (ἰδίως ὁ Πεσταλότσης καὶ οἱ ὀπαδοί του!) ἐπίστευσαν καὶ μερικοὶ ἀπὸ τοὺς σημερινοὺς ἀκόμη πιστεύουν, ὅτι ἡ **εἰδολογικὴ μόρφωσις**, τὴν ὁποίαν παρέχει εἰς τὸ πνεῦμα ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, ἐκτείνεται καὶ πέραν τῶν ὁρίων τοῦ ἀριθμητικοῦ πεδίου. Δι᾿ αὐτὸν δὲ ἀκριβῶς τὸν λόγον ὅλοι αὐτοὶ οἱ Παιδαγωγικοὶ ἐθεώρησαν καὶ θεωροῦν, ὅτι ὁ μόνος ἢ τοὐλάχιστον ὁ κυριώτατος σκοπὸς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας εἶναι ἡ παροχὴ τῆς εἰδολογικῆς μορφώσεως, φρονοῦν δέ, ὅτι τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς, καθόσον παρέχει τὴν μόρφωσιν αὐτήν, εἶναι τὸ σπουδαιότατον ἀπὸ ὅλα τὰ μαθήματα. Ἀλλ᾿ οὔτε ἡ εἰδολογικὴ μόρφωσις τοῦ πνεύματος, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, ἔχει τὴν ἔκτασιν καὶ τὴν δύναμιν, τὴν ὁποίαν τῆς ἀποδίδουν οἱ Παιδαγωγικοὶ αὐτοί, οὔτε ἡ πραγματικὴ εἰδολογικὴ μόρφωσις, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, καὶ ἐν γένει τὸ πρὸς τὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως διαφέρον ἀποτελεῖ τὸν μόνον σκοπόν της, οὔτε τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς εἶναι σπουδαῖον μόνον, διότι ἐπιδιώκει τὸν σκοπὸν αὐτόν. Καὶ ἡ μὲν ἀκρίβεια τῶν δύο τελευταίων ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω διϊσχυρισμοὺς θὰ δειχθῇ ἀπὸ ὅσα θὰ εἴπωμεν

ἀναπτύσσοντες κατωτέρω τὴν ὅλην μορφωτικὴν ἀξίαν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας. Σχετικὰ δὲ μὲ τὸν πρῶτον ἀπὸ τοὺς διϊσχυρισμοὺς αὐτούς, ὁ ὁποῖος καὶ μᾶς ἐνδιαφέρει ἐδῶ, ἔχομεν νὰ τονίσωμεν τὰ ἀκόλουθα. Ὅπως οἱ παῖδες δὲν ἠμποροῦν νὰ κρίνουν καὶ νὰ συλλογίζωνται εἰς τὸ πεδίον τῶν ἀριθμῶν, ἤτοι νὰ συνδέουν μὲ ἕνα ὡρισμένον τρόπον δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ νὰ σχηματίζουν ἐξ αὐτῶν νέους, ἂν δὲν κατέχουν τὰ στοιχεῖα, μὲ τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ κάμουν τὰς νοητικὰς αὐτὰς ἐργασίας, ἤτοι ἂν δὲν γνωρίζουν τὰς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τὰς μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ὑπαρχούσας σχέσεις, ἔτσι δὲν ἠμποροῦν νὰ κρίνουν καὶ νὰ συλλογίζωνται καὶ εἰς τὰ ἄλλα πεδία τοῦ ἐπιστητοῦ, εἰς τὸ πεδίον π. χ. τῶν φυσικῶν ἢ τῶν ἱστορικῶν φαινομένων, καὶ δὲν ἠμποροῦν δι᾿ αὐτὸ νὰ ὑψωθοῦν εἰς τὰς ἐννοίας τῶν φαινομένων αὐτῶν καὶ νὰ καθορίσουν τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν ἀναμεταξύ των, ἂν δὲν κατέχουν τὰ στοιχεῖα, μὲ τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ κάμουν τὰς νοητικὰς αὐτὰς ἐργασίας, ἤτοι ἂν δὲν ἔχουν σχηματίσει τὰς παραστάσεις τῶν φαινομένων αὐτῶν καὶ τῶν μεταξύ των ὑπαρχουσῶν σχέσεων. Ἐφόσον οἱ μαθηταὶ καλοῦνται νὰ ἐπεξεργασθοῦν νοητικῶς φυσικὰ ἢ ἱστορικὰ φαινόμενα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν παρατηρήσει καὶ τῶν ὁποίων δι᾿ αὐτὸ τὰς σχέσεις δὲν ἔχουν ἀντιληφθῇ, θὰ εἶναι ἐντελῶς ἀνίκανοι νὰ κάμουν τὴν ζητουμένην νοητικὴν ἐπεξεργασίαν, ὁσονδήποτε καὶ ἂν ἔμαθαν νὰ κρίνουν καὶ νὰ συλλογίζωνται εἰς τὸ πεδίον τῶν ἀριθμῶν. Δι᾿ αὐτὸ δὲ φυσικὰ καὶ ἡ ἀκρίβεια, ἡ νομιμότης καὶ ἡ ἀντικειμενικότης, εἰς τὰς ὁποίας οἱ παῖδες συνηθίζουν εἰς τὴν ἀρίθμησιν, δὲν ἠμποροῦν νὰ τοὺς χρησιμεύσουν εἰς τὰς ἀσχολίας των μὲ τὸν κόσμον τῶν φυσικῶν ἢ ἱστορικῶν φαινομένων. Ἐνῷ ἡ ἀκρίβεια, μὲ τὴν ὁποίαν ἐργάζεται ἡ νόησις εἰς τὴν ἀρίθμησιν, ὀφείλεται, ὅπως εἴπαμεν, εἰς **τὸ μονόσημον τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν**, ἡ μὲν ἀκρίβεια, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἐργασθῇ εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν φυσικῶν ἢ ἱστορικῶν ἐννοιῶν, ἐξαρτᾶται ἀπὸ **τὸν ἀριθμὸν τῶν παρατηρηθέντων συγκεκριμένων ἀντιπροσώπων των καὶ ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς παρατηρήσεως τοῦ καθενός των**, ἡ δὲ ἀκρίβεια, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ καθορίζῃ τὰς μεταξὺ τῶν φυσικῶν ἢ ἱστορικῶν φαινομένων ὑπαρχούσας σχέσεις, ἐξαρτᾶται κυριώτατα **ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς παρατηρήσεως τόσον τῶν** *ἰδίων τῶν φαινομένων, ὅσον καὶ τῶν σχέσεων, εἰς τὰς ὁποίας εὑρίσκονται ἀναμεταξύ των.* Ἂν ἐξ ἄλλου οἱ μαθηταὶ ἐπεξεργάζωνται καὶ τὰ φυσικὰ φαινόμενα μὲ πνεῦμα νομιμότητος, αἴτιον τοῦ πράγματος δὲν εἶναι τὸ ὅτι ἐσυνήθισαν εἰς τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς ἐπεξεργασίας ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν, ἀλλὰ τὸ γεγονός, ὅτι καὶ αἱ μεταξὺ τῶν φυσικῶν φαινομένων σχέσεις, ὅπως αἱ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, διέπονται ἀπὸ σταθεροὺς νόμους, οἱ ὁποῖοι εἶναι σχετικῶς ἁπλοῖ καὶ τῶν ὁποίων δι᾿ αὐτὸ τὴν ὕπαρξιν ἀντιλαμβάνονται ἐνωρὶς οἱ παῖδες εἴτε μόνοι των, εἴτε βοηθούμενοι ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν. Καὶ τὰ ἱστορικὰ φαινόμενα διέπονται ἀπὸ σταθεροὺς νόμους, ἀλλ᾿ ἐπειδὴ οἱ νόμοι αὐτοὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐξακριβωθοῦν εὔκολα, ἐνίοτε δὲ μάλιστα δὲν ἐξακριβώνονται οὔτε ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς εἰδικοὺς ἐπιστήμονας, οἱ μαθηταί, καὶ ἰδίως οἱ μικρότεροι, δὲν ἠμποροῦν νὰ διαβλέπουν νομιμότητα εἰς τὰ φαινόμενα αὐτά. Ἂν ἐπεξεργάζωνται τέλος οἱ μαθηταὶ καὶ τὰ φυσικὰ ἀντικείμενα καὶ φαινόμενα μὲ ἄκραν *ἀντικειμενικότητα*, αἰτία τοῦ πράγματος εἶναι, ὅτι καὶ εἰς τὴν ἐπεξεργασίαν τῶν ἀντικειμένων καὶ φαινομένων αὐτῶν δὲν λαμβάνονται ὑπ᾿ ὄψει ὑποκειμενικοὶ παράγοντες. Δὲν εἶναι ὅμως εὔκολον εἰς τοὺς παῖδας νὰ ἐργάζωνται μὲ τὴν ἰδίαν ἀντικειμενικότητα καὶ εἰς τὴν ἱστορικὴν διδασκαλίαν, διότι τὸ περιεχόμενόν της ἀποτελοῦν κατὰ μέγα μέρος ἀνθρώπιναι ἐνέργειαι, ἡ δὲ περὶ αὐτῶν κρίσις των ἐξαρτᾶται σημαντικώτατα ἀπὸ τὴν ἠθικὴν βαθμίδα, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται.

Συνεχίζοντες τώρα τὴν ἔρευναν, τὴν ἀποβλέπουσαν εἰς τὴν ἐξακρίβωσιν τῆς μορφωτικῆς ἀξίας τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, ὑπενθυμίζομεν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ ἐπιστήμη, ὅπως καὶ κάθε ἄλλη μαθηματικὴ ἐπιστήμη, εἶναι βοηθητικὴ τῶν ἐμπειρικῶν ἐπιστημῶν, καθόσον τὸ ὑποκείμενόν της, ἤτοι ἡ ἀρίθμησις, εἶναι τὸ ἀπαραίτητον ὄργανον τῆς ἐρεύνης κάθε ἐμπειρικῆς ἐπιστήμης, ἐπιτρέπον εἰς αὐτὴν νὰ ἐξετάζῃ τὸ ὑλικόν της καὶ ἀπὸ τὴν ἀριθμητικήν του ἄποψιν, ἡ ὁποία ἔχει μεγίστην ***διαφωτιστικὴν δύναμιν***, καὶ συντελοῦν δι᾿ αὐτὸ εἰς τὸ νὰ ἀποβῇ ἡ γνῶσίς του ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον σαφής, πλήρης καὶ ζωντανή. Φυσικὰ δὲ εἰς ὅποιαν σχέσιν εὑρίσκεται ἡ ἀριθμητικὴ ἐπιστήμη μὲ τὰς ἐμπειρικάς, εἰς τὴν ἰδίαν εὑρίσκεται καὶ ἡ ἀριθμητικὴ

διδασκαλία μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν πραγματικῶν μαθημάτων, τὰ ὁποῖα ἀπορρέουν ἀπὸ τὰς ἐμπειρικὰς ἐπιστήμας. Ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, μεταδίδουσα τὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως, παρέχει εἰς τὴν διδασκαλίαν κάθε πραγματικοῦ μαθήματος τὸ ἀπαραίτητον μέσον, ὅπως ἐξετάζῃ τὸ ὑποκείμενόν της καὶ ἀπὸ τὴν ἀριθμητικήν του ἄποψιν, κατορθώνῃ δὲ μὲ τὴν ἐξέτασιν αὐτὴν νὰ μεταδίδῃ εἰς τοὺς μαθητὰς γνώσεις κατὰ τὸ δυνατὸν τελείας. Ἡ διδασκαλία π. χ. τῆς Φυσικῆς μεταδίδει τὴν γνῶσιν τῶν φυσικῶν φαινομένων καὶ τῶν σχέσεών των. Ἀλλ᾿ ἡ γνῶσις αὐτὴ τότε μόνον θὰ εἶναι σαφὴς καὶ πλήρης, ὅταν καθορίζωνται καὶ ἀριθμητικῶς αἱ διάφοροι ἰδιότητες τῶν φυσικῶν φαινομένων (π. χ. ἡ ταχύτης τῆς ἐλευθέρας πτώσεως, τοῦ φωτός, τοῦ ἤχου, τοῦ ἠλεκτρισμοῦ κ.τ.λ.) καὶ ὅταν καταμετρῆται κάθε σχέσις, ἡ ὁποία συνδέει δύο φυσικὰ φαινόμενα (π. χ. ἡ κατὰ μῆκος διαστολὴ κάθε μετάλλου ἀπὸ τὴν θερμότητα κ.τ.λ.). Μόνον μὲ τὴν καταμέτρησιν ἀποβαίνει ὡσαύτως ζωντανὴ καὶ πλήρης ἡ γνῶσις τῶν σχέσεων πολλῶν βιολογικῶν φαινομένων, κάθε δὲ φυσικὸν ἀντικείμενον γινώσκεται καλύτερα, ἂν ὑπολογίζωνται καὶ ἀριθμητικῶς τὰ ὄργανα ἢ αἱ ἰδιότητές του. Ὀρθότατα π. χ. παρατηρεῖ ὁ *Dörpfeld* (Grundlinien einer Theorie des Lehrplanes, Gütersloh, 1873, σ. 82, παρὰ *Räther*, Theorie und Praxis des Rechenunterrichts, 6 ἐκδ., 1920, E. Morgenstern, Breslau, μέρ. 1, σελ. 11), ὅτι ἀπὸ τὰ φυτὰ κινοῦν κατ᾿ ἀρχὰς ἰσχυρότερον τὸ διαφέρον τῶν παίδων, ὅσα διακρίνονται ἀπὸ τὸν χρωματισμὸν τῆς στεφάνης των. Δι᾿ αὐτὸ καὶ τὰ σκιαδοφόρα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τὸ προσὸν αὐτό, δὲν κινοῦν κατ᾿ ἀρχὰς τὴν προσοχήν των. Τὸ διαφέρον τῶν παίδων πρὸς τὰ φυτὰ αὐτὰ ἀρχίζει νὰ ἀναπτύσσεται, μόλις κατασταθοῦν προσεκτικοὶ εἰς τὴν ἰδιάζουσαν μορφὴν τῶν ταξιανθιῶν των. Ἀλλά, διὰ νὰ ἐνισχυθῇ τὸ διαφέρον αὐτό, πρέπει νὰ προσέλθῃ ἀρωγὸς καὶ ὁ ἀριθμός, ἀφοῦ μάλιστα ἡ μορφὴ τῶν ταξιανθιῶν αὐτῶν προκαλεῖ αὐτόχρημα τὴν ἀρίθμησιν. Μετροῦντες λοιπὸν οἱ παῖδες εὑρίσκουν, ὅτι κάθε κλάδος ἑνὸς τέτοιου φυτοῦ ὑποδιαιρεῖται εἰς 20 παχυτέρους μίσχους, κάθε δὲ πάλιν παχύτερος μίσχος ὑποδιαιρεῖται κατὰ μέσον ὅρον εἰς 18 λεπτοτέρους, εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ἐπικάθηται ἀπὸ ἕνα ἀνθύλλιον. Ἕνας ἁπλοῦς πολλαπλασιασμὸς δεικνύει, ὅτι κάθε κλάδος τοῦ φυτοῦ φέρει κατὰ μέσον ὅρον 20×18=360 ἀνθύλλια. Ἂν τώρα τὸ φυτὸν ἔχῃ 8 κλάδους, φέρει ἐν συνόλῳ κατὰ μέσον ὅρον 8×360=2880 ἀνθύλλια. Ποίαν ἐντύπωσιν προξενεῖ εἰς τοὺς παῖδας ἡ ἐξαγωγὴ παρομοίων ἀριθμῶν, γνωρίζει καλὰ κάθε διδάσκαλος. Ἡ γνῶσις ἐπίσης τῶν περισσοτέρων γεωγραφικῶν ἀντικειμένων ἀποβαίνει ἀτελής, ἂν δὲν συμπληρωθῇ μὲ τὴν μέτρησίν των. Ὡσαύτως αἱ μεταξὺ τῶν γεωγραφικῶν φαινομένων ὑπάρχουσαι σχέσεις κατανοοοῦνται τελειότερα, ἂν καταμετροῦνται. Τὰ ἱστορικὰ γεγονότα θὰ ἀποτελέσουν ἐπίσης ἀδιανόητον χάος, ἂν δὲν χωρίζωνται τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο χρονολογικῶς. Ἀπὸ ὅλα τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, ἂν δὲν ἠμπορῇ νὰ ἐξεγείρῃ ἀμέσως ***τὸ διαφέρον τῶν παίδων πρὸς τὴν γνῶσιν τῶν ἀντικειμένων καὶ τῶν φαινομένων τῆς φύσεως καὶ τῆς ἀνθρωπίνης δημιουργίας, ἠμπορεῖ ἐν τούτοις νὰ συντελέσῃ ἐμμέσως εἰς τὸν ἴδιον σκοπόν***, διότι συμπληρώνει μὲν μὲ τὴν ἀριθμητικὴν ἄποψιν, ἡ ὁποία εἶναι τόσον σπουδαία, τὰ πραγματικὰ μαθήματα, τὰ συντελοῦντα εἰς τὴν ἄμεσον ἀνάπτυξιν τοῦ διαφέροντος αὐτοῦ, ἀντλεῖ δὲ καὶ ἡ ἰδία τὴν ὕλην τῶν προβλημάτων της ἀπὸ τὰ μαθήματα αὐτά. Εἶναι δὲ ἡ μορφωτικὴ ἀξία, τὴν ὁποίαν ἔχει ἀπὸ τὴν ἄποψιν αὐτὴν ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, σπουδαιοτάτη. Ἡ γνῶσις τῆς ἀριθμήσεως χάριν τῆς ἀριθμήσεως δὲν ἔχει ἀξίαν, ἀποκτᾷ δὲ ἀξίαν, καὶ μάλιστα μεγίστην, ἐφόσον χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ γνωσθοῦν καλύτερα καὶ τελειότερα τὰ ἀντικείμενα καὶ αἱ ἐνέργειαι τῆς φύσεως καὶ τῆς ἀνθρωπίνης δημιουργίας καὶ αἱ σχέσεις των. Δι' αὐτὸ δὲ καὶ ἡ μορφωτικὴ ἀξία τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας δὲν θὰ ἦτο σημαντική, ἂν ἐπεριορίζετο εἰς τὴν ἐξέγερσιν τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως, ἀποβαίνει δὲ σημαντικωτάτη, καθόσον μὲ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ διαφέροντος αὐτοῦ συντελεῖ ἐμμέσως καὶ εἰς τὴν ἐνίσχυσιν τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν γνῶσιν τῆς φύσεως καὶ τῶν ἀνθρωπίνων δημιουργημάτων.

Ἀμέσως βέβαια δὲν ἠμπορεῖ ἡ διδασκαλία τοῦ εἰδολογικοῦ μαθήματος τῆς Ἀριθμητικῆς νὰ ἀναπτύξῃ ***τὸ ἠθικὸν διαφέρον*** τῶν παίδων. Τὸ ἔργον αὐτὸ ἀπόκειται εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν πραγματικῶν μαθημάτων, ἰδίως δὲ ἐκείνων ἀπὸ αὐτά, ὅσα παρουσιάζουν φρονήματα καὶ ἐνεργείας ἀτόμων καὶ λαῶν. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς δὲν ἠμπορεῖ νὰ δημιουργηθῇ οὔτε ἡ πρὸς τὸν πλησίον ἀγάπη, οὔτε ἡ δικαιοσύνη, οὔτε ἡ φιλαλήθεια, οὔτε καμία ἄλλη ἠθικὴ ἀρετή. Μὲ τὴν ἀρίθμησιν, καθὼς λέγει ὁ *Körner* (Geschichte der Pädagogik, 1857), δὲν πλουτίζεται ὁ ἄνθρωπος οὔτε μὲ μίαν ὑψηλοτέραν, μὲ μίαν ἠθικὴν ἰδέαν (παρὰ *Räther*, ὅπ. ἀνωτ., σελ. 13). Ὅσα λέγουν εἰς ἀπόδειξιν τοῦ ἀντιθέτου μερικοὶ Παιδαγωγικοί, δὲν στηρίζονται εἰς ἄξια λόγου ἐπιχειρήματα. Ἂν π. χ. λέγῃ ὁ *Diesterweg* (αὐτόθι), ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἀσκεῖ ἠθικὴν ἐπίδρασιν, διότι ἀναπτύσσει τὴν ἀγάπην πρὸς τὸ ἀληθές, ἤτοι τὸ διαφέρον πρὸς τὴν ἀληθῆ γνῶσιν, δὲν πρέπει νὰ λησμονηθῇ ἀφ' ἑνὸς μέν, ὅτι ἡ ἀνάπτυξις τοῦ διαφέροντος αὐτοῦ ἐπιδιώκεται καὶ ἀπὸ ὅλα τὰ ἄλλα μαθήματα, ὅσα μεταδίδουν γνώσεις, ἀφ' ἑτέρου δέ, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ σπουδαιότερον, ὅτι δὲν ὑπάρχει καμία σχέσις μεταξὺ τῆς γνωστικῆς ἢ λογικῆς καὶ τῆς ἠθικῆς φιλαληθείας, μεταξὺ τοῦ διαφέροντος νὰ ἀποκτῶμεν ἀληθεῖς γνώσεις καὶ τοῦ διαφέροντος νὰ λέγωμεν τὴν ἀλήθειαν εἰς τοὺς ὁμοίους μας. Ἂν ὁ *Steuer* (Methodik des Rechenunterrichts, Strehlen, 1883, σ. 9) λέγῃ, ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἠθικῆς μορφώσεως, τὴν ὁποίαν κατορθώνει ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, δὲν ἔγκεινται οὔτε εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην, οὔτε εἰς τὸν τρόπον τῆς ἐν γένει ἐπεξεργασίας της, ἀλλὰ εἰς τὴν δεξιότητα καὶ εἰς τὴν θέλησιν τοῦ διδασκάλου νὰ ἐπιτυγχάνῃ εἰς τὴν διδασκαλίαν αὐτὴν ***ἄκραν ἡσυχίαν καὶ αὐστηρὰν προσοχήν***, τονίζει στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ὡσαύτως συντελοῦν μόνον εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ διαφέροντος τῶν μαθητῶν πρὸς τὴν γνῶσιν καὶ ὡρισμένως τὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως, δὲν ἠμποροῦν δὲ νὰ συντελέσουν οὔτε κατ' ἐλάχιστον εἰς τὴν ἐξέγερσιν τοῦ ἠθικοῦ διαφέροντος, ἐπιδιώκονται δὲ καὶ ἀπὸ ὅλα τὰ ἄλλα μαθήματα, ὡς συντελοῦντα εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν γνῶσιν τῶν ὑποκειμένων των. Τὴν ἴδιαν ἐπίσης ἀξίαν ἔχουν καὶ ὅσα λέγουν ὁ *Räther* (ὅπ. ἀν., σ. 11 κ. ἀκ.) καὶ μερικοὶ ἄλλοι Παιδαγωγικοί, οἱ ὁποῖοι φρονοῦν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἀναπτύσσει τὸ ἠθικὸν διαφέρον, διότι προβάλλει μὲν εἰς τοὺς μαθητὰς σκοπούς, οἱ ὁποῖοι ἐξεγείρουν τὴν βούλησιν, τὴν προσοχὴν (ἴδ. ἀν. *Steuer*) καὶ τὴν αὐτενέργειάν των, τοὺς συνηθίζει δὲ εἰς τὴν ταχεῖαν ἀντίληψιν, εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ὑπαρχουσῶν συνθηκῶν καὶ ἐν γένει εἰς τὴν ταχεῖαν καὶ σκόπιμον νόησιν, προκαλεῖ δὲ εἰς αὐτοὺς χαρὰν διὰ τὴν ἐκπλήρωσιν τῶν τεθέντων σκοπῶν, ἀναπτύσσουσα τοιουτοτρόπως καὶ ἐνισχύουσα εἰς τοὺς παῖδας τὸ συναίσθημα τῆς δυνάμεως καὶ ὠθοῦσα αὐτοὺς εἰς περαιτέρω ἐργασίαν. Ὅλα αὐτὰ εἶναι ἐπίσης στοιχεῖα συντελεστικὰ εἰς τὴν ἐξέγερσιν τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν γνῶσιν, ὡρισμένως δὲ ἐπὶ τοῦ προκειμένου τὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως, ἐπιδιώκονται δὲ καὶ ἀπὸ τὰ ἄλλα μαθήματα πρὸς παρόμοιον σκοπόν. Ἂν δὲ τέλος πιστεύεται ἀπὸ μερικούς, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, συνηθίζουσα τοὺς παῖδας νὰ ἐργάζωνται εἰς τὴν ἀρίθμησιν μὲ ἀκρίβειαν, νομιμότητα καὶ ἀντικειμενικότητα, μεταδίδει εἰς αὐτοὺς ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι θὰ κοσμοῦν καὶ τὴν διαγωγήν των, προφανῶς οἱ πιστεύοντες αὐτὰ κάμνουν δεινὴν σύγχυσιν μεταξὺ τοῦ κόσμου τῆς γνώσεως καὶ τοῦ κόσμου τῆς ἠθικῆς ἐνεργείας (ἴδ. καὶ *Räther*, ὅπ. ἀν., σ. 11). Ἀλλ᾽ ἂν ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία δὲν ἠμπορῇ, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ λεχθέντα, νὰ ἀναπτύξῃ ἀμέσως τὸ ἠθικὸν διαφέρον, ἠμπορεῖ ἐν τούτοις νὰ συντελέσῃ ***ἐμμέσως*** εἰς τὴν ἐνίσχυσιν αὐτοῦ, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν διότι συμπληρώνει, ὅπως εἴδαμεν προηγουμένως, ἀπὸ τῆς ἀριθμητικῆς των ἀπόψεως τὰ πραγματικὰ μαθήματα, τὰ συντελοῦντα εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ἠθικοῦ διαφέροντος, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ διότι καταδεικνύει καὶ αὐτὴ μὲ κατάλληλα προβλήματα καὶ συναφεῖς πρὸς αὐτὰ ὑπολογισμοὺς τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀσκήσεως ὡρισμένων ἀρετῶν, ὁποῖαι π. χ. εἶναι αἱ ἀρεταὶ τῆς οἰκονομίας καὶ τῆς ἀποταμιεύσεως, τῆς ἐπιμελείας, τῆς φιλαλληλίας κ.τ.λ.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, ἤτοι ***ἐμμέσως***, ἠμπορεῖ νὰ συντελέσῃ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία καὶ εἰς τὴν ***ἐνίσχυσιν τοῦ θρησκευτικοῦ διαφέροντος*** τῶν μαθητῶν, διότι μὲ τὰς ἀριθμητικὰς γνώσεις, τὰς ὁποίας μεταδίδει, διαφωτίζει πληρέστερον τὰς ὕλας, αἱ ὁποῖαι διδάσκονται ἀπὸ τὰ φυσιογνωστικὰ μαθήματα καὶ τὸ γεωγραφικὸν καὶ αἱ ὁποῖαι προκαλοῦν τὴν θρησκευτικὴν σκέψιν καὶ ἐξεγείρουν τὸ θρησκευτικὸν συναίσθημα. Ἂν π. χ. ἡ παρατήρησις τῶν οὐρανίων σωμάτων ἐξεγείρῃ ἀναποφεύκτως τὸ θρησκευτικὸν συναίσθημα, προφανῶς τὸ συναίσθημα αὐτὸ ἐνισχύεται σημαντικώτατα, ἐφόσον καθορίζονται καὶ τὸ μέγεθος καὶ αἱ ἀποστάσεις τῶν σωμάτων αὐτῶν, ἐφόσον ὑπολογίζεται ἡ ταχύτης τῶν κινήσεών των κ.τ.λ.

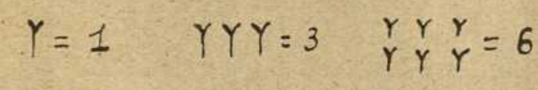
Ἀλλὰ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἠμπορεῖ νὰ συντελέσῃ καὶ εἰς τὴν ἐξέγερσιν ***τοῦ καλαισθητικοῦ διαφέροντος*** τῶν παίδων, ἐφόσον φυσικὰ τὸ διαφέρον αὐτὸ περιορίζεται εἰς τὴν ἐκτίμησιν καὶ ἐφαρμογὴν ἐντελῶς στοιχειωδῶν καὶ ἐντελῶς εἰδολογικῶν καλαισθητικῶν σχέσεων, ὁποῖαι εἶναι π. χ. αἱ σχέσεις τῆς συμμετρίας καὶ τοῦ ῥυθμοῦ. Αἱ σχέσεις αὐταὶ εἶναι καθαραὶ ἀριθμητικαὶ σχέσεις· ἡ μὲν συμμετρία συνίσταται εἰς τὴν κατὰ ὡρισμένας ἀριθμητικὰς σχέσεις διάταξιν τῶν ἀντικειμένων εἰς τὸν χῶρον, ὁ δὲ ῥυθμὸς εἰς τὴν κατὰ ὡρισμένας ἀριθμητικὰς σχέσεις διαίρεσιν τοῦ χρόνου. Προφανῶς ἕνεκα τῆς φύσεώς των αὐτῆς αἱ καλαισθητικαὶ αὐταὶ σχέσεις δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐκτιμηθοῦν ἀπὸ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν σαφῆ γνῶσιν τοῦ περιεχομένου τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχέσεών των. Δι᾽ αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς καὶ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, ὡς μεταδίδουσα τὴν γνῶσιν αὐτήν, ἠμπορεῖ νὰ καταστήσῃ τοὺς μαθητὰς ἱκανούς, ὅπως ἐκτιμοῦν καὶ ἐφαρμόζουν καὶ εἰς τὰς ἐνεργείας των τὰς καλαισθητικὰς αὐτὰς σχέσεις.

Ἀμέσως βέβαια δὲν ἠμπορεῖ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία νὰ ἐξεγείρῃ τὸ ***πρακτικὸν*** ἢ ***τεχνικὸν διαφέρον*** τῶν παίδων. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς δὲν ἠμπορεῖ φυσικὰ νὰ δημιουργηθῇ ἡ ἀγάπη πρὸς τὴν πρακτικὴν ἐργασίαν ἐν γένει ἢ πρὸς ὡρισμένον εἶδός της. Ἠμπορεῖ ὅμως νὰ συντελέσῃ ἐμμέσως ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία εἰς τὴν ἐνίσχυσιν τοῦ διαφέροντος αὐτοῦ, διότι, καθὼς εἶναι γνωστόν, δὲν ὑπάρχει πρακτικὴ ἐργασία ἀπὸ τὴν μᾶλλον σωματικὴν ἕως τὴν μᾶλλον πνευματικήν, ἡ ὁποία νὰ μὴ ἔχῃ ἀπόλυτον ἀνάγκην τῶν ἀριθμητικῶν γνώσεων καὶ νὰ μὴ διευκολύνεται σημαντικώτατα μὲ αὐτάς. Ἀκριβῶς δὲ δι᾽ αὐτὸ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία προπαρασκευάζει ὅσον ὀλίγα μαθήματα τοὺς παῖδας διὰ τὸν μέλλοντα πρακτικὸν βίον. Εἰς τὴν χρησιμότητά της δὲ αὐτὴν διὰ τὸν πρακτικὸν βίον ὀφείλεται ἄλλωστε ἡ εἰσαγωγή της εἰς τὸ σχολεῖον, ὅπως ἀκριβῶς εἰς τὸν ἴδιον λόγον ὀφείλεται καὶ ἡ εἰσαγωγὴ τῶν περισσοτέρων ἀπὸ τὰ ἄλλα μαθήματα. Ὑπάρχουν δὲ καὶ ἀρκετοὶ Παιδαγωγικοὶ ὄχι μόνον παλαιότεροι, ἀλλὰ καὶ νεώτεροι, οἱ ὁποῖοι, ὑποτιμῶντες ὅλους τοὺς ἄλλους σκοπούς, τοὺς ὁποίους ἠμπορεῖ νὰ πληρώσῃ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, φρονοῦν, ὅτι ὁ μόνος σκοπός της εἶναι ἡ προπαρασκευὴ τῶν παίδων διὰ τὸν πρακτικὸν βίον. Δι' αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς καὶ οἱ Παιδαγωγικοὶ αὐτοὶ δὲν ζητοῦν τίποτε ἄλλο ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν παρὰ μόνον νὰ κάμῃ τοὺς παῖδας ἱκανοὺς νὰ λύουν μὲ ταχύτητα καὶ ἑτοιμότητα τὰ προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου, ἀδιαφοροῦν δὲ ὅλως διόλου διὰ τὸ ζήτημα, ἂν ἡ ἱκανότης αὐτὴ θὰ στηρίζεται εἰς τὴν ἐμπειρικὴν ἢ εἰς τὴν θεωρητικὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως. Μολονότι βέβαια δὲν ἐπιτρέπεται νὰ παραγνωρισθῇ ἡ ἀπὸ τῆς προκειμένης ἀπόψεως μορφωτικὴ ἀξία τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, εἰς τὴν ὁποίαν καὶ ἀποβλέπων ὁ *Meumann* ὑποστηρίζει (Experimentelle Pädagogik, 3, 623), ὅτι εἰς τὸν μέγαν οἰκονομικὸν ἀγῶνα τοῦ παρόντος ἐπαρκεῖ καλύτερα ἐκεῖνος ὁ λαός, τοῦ ὁποίου ὅσον τὸ δυνατὸν εὐρύτερα στρώματα ἔχουν ἐπαρκῆ ἀριθμητικὴν μόρφωσιν, ἐν τούτοις πρέπει νὰ τονισθῇ πρῶτον μέν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία μορφώνει, ὅπως εἴδαμεν, καὶ **κατ' ἄλλας ἀπόψεις** τοὺς παῖδας, ἔπειτα δέ, ὅτι, ἂν πρόκειται πράγματι νὰ συντελέσῃ καὶ εἰς τὴν προπαρασκευήν των διὰ τὸν πρακτικὸν βίον, ὀφείλει χωρὶς ἄλλο νὰ προκαλέσῃ τὸ διαφέρον των πρὸς τὴν **θεωρητικὴν** γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως. Ἂν ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, ἡ ἀποβλέπουσα μόνον εἰς τὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως καὶ εἰς τὴν μόρφωσιν ἀριθμητικοῦ πνεύματος, μὴ ἐνδιαφερομένη δὲ διὰ τὰς ἀνάγκας τῶν ἐπιστημῶν καὶ τοῦ πρακτικοῦ βίου, δὲν ἀποδίδῃ κανένα καρπόν, ὅμως καὶ ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀποβλέπει μόνον εἰς τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου, ὁδηγεῖ εἰς ἕνα ἄλογον μηχανισμόν, ὁ ὁποῖος ἐλάχιστα θὰ ἠμπορῇ νὰ ἐξυπηρετήσῃ τὰς ἀνάγκας αὐτάς].

II. ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ.

Ἡ ἀνασκόπησις τῆς ἱστορίας τῆς ἀριθμήσεως μᾶς φέρει ἕως τὴν πρώτην βαθμίδα τῆς ἐξελίξεως τῆς ἀνθρωπότητος. Κυρία προϋπόθεσις τῆς ἀριθμήσεως εἶναι ἡ κατοχὴ **παραστάσεων τῶν ἀριθμῶν**. Ὡς πρὸς τὸ ζήτημα τώρα, πῶς ἐκατόρθωσε ἡ ἀνθρω-

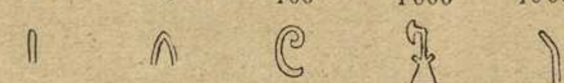
πότης νὰ σχηματίσῃ τὰς παραστάσεις αὐτάς, μόνον εἰκασίαι ὑπάρχουν. Φυσικὰ δὲ δὲν ἐπιτρέπεται ὡς πρὸς τὸ ζήτημα αὐτὸ νὰ κάμνωμεν συμπεράσματα ἀπὸ τὸ καθέκαστον ἄτομον δι' ὅλην τὴν ἀνθρωπότητα. Ἄλλαι προϋποθέσεις τῆς ἀριθμήσεως εἶναι **τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν**, τὰ ἀριθμητικά, καὶ **τὰ σημεῖα ἢ σύμβολά των**, τὰ ἀριθμ. ψηφία. Ἡ δημιουργία καὶ τῶν δύο αὐτῶν στοιχείων χρεωστεῖται ἰδίως εἰς τὴν ἀνάγκην τῆς ἐπικοινωνίας τῶν ἀνθρώπων ἀναμεταξύ των. Πιθανὸν δὲ εἶναι, ὅτι τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν εἶναι παλαιότερα ἀπὸ τὰ σημεῖά των. Τὰ παλαιότατα ἀριθμητικὰ σημεῖα ἦσαν, καθὼς φαίνεται, αἱ γραμμαί. Κάθεται καὶ λοξαὶ γραμμαὶ συνθετόμεναι διαφορετικὰ ἐχρησιμοποιοῦντο εἰς παράστασιν τῶν διαφόρων ἀριθμῶν· ἔτσι π. χ. παρίσταναν τοὺς ἀριθμοὺς οἱ Ῥωμαῖοι (I=1, II=2, III=3, IV=4, V=5, VI=6, VII=7, VIII=8, IX=9, X=10 κ.τ.λ.). Οἱ Ἀσσύριοι καὶ οἱ Βαβυλώνιοι ἐχρησιμοποιοῦσαν διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν τὰ ἴδια σύμβολα, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιοῦσαν καὶ εἰς παράστασιν τῶν γραμμάτων, ἤτοι τοὺς σφῆνας, τοὺς ὁποίους ἔθεταν τὸν ἕνα κοντὰ εἰς τὸν ἄλλον ἢ ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄλλον κ. οὕτ. καθ., π. χ. (κατὰ τὸν Cantor π. Räther):



κ.τ.λ.

Οἱ Αἰγύπτιοι εἶχαν 3 εἴδη σημείων διὰ τὴν παράστασιν καὶ τῶν γραμμάτων καὶ τῶν ἀριθμῶν. Ἐν τούτοις ἀπὸ αὐτὰ τὴν μεγαλύτερην διάδοσιν εἶχαν τὰ ἱερογλυφικά. Παραθέτομεν ἐδῶ τὰ ἱερογλυφικὰ σημεῖα, τὰ παριστάνοντα τοὺς ἀριθμοὺς 1, 10, 100, 1000 καὶ 10000 (κατὰ τὸν Cantor π. Räther):

1 10 100 1000 10000



Ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ ἐξηγεῖται τὸ μὲν παριστάνον τὸν ἀριθμὸν 1 ὡς ἀπεικονίζον μίαν ῥάβδον, ἡ ὁποία ἐχρησίμευεν ὡς μονὰς μετρήσεως, τὸ δὲ τοῦ ἀριθμοῦ 10 ὡς ἀπεικονίζον δύο τεντωμένους βραχίονας, τὸ δὲ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν 100 ὡς ἀπεικονίζον ἕνα συμπτυγμένον φύλλον φοίνικος, τὸ δὲ τοῦ ἀριθμοῦ 1000 ὡς παριστάνον τὸ φύλλον τοῦ λωτοῦ, τὸ δὲ σημεῖον τοῦ ἀριθμοῦ 10000 ὡς εἰκονίζον ἕνα δάκτυλον. Τὸ ἑκατομμύριον τὸ παρίσταναν μὲ ἕνα βάτραχον, διότι εἰς τὰς πλημμύρας τοῦ Νείλου ἐπαρουσιάζοντο ἄπειροι βάτραχοι. Οἱ Ἰουδαῖοι, ἀπὸ τὸν 5 δὲ π. Χ. αἰῶνα καὶ οἱ Ἕλληνες, καθὼς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω, ἐχρησιμοποιοῦσαν ὡς ἀριθμητικὰ σημεῖα τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου των.

Ἀλλὰ διὰ νὰ παριστάνωνται ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ μὲ ὀλίγους μόνον καὶ διὰ νὰ χρησιμοποιοῦνται ἐν γένει εὔκολα καὶ νὰ διατάσσωνται εὐσύνοπτα, ἦτο ἀκόμη ἀναγκαία ἡ δημιουργία ἑνὸς ***ἀριθμητικοῦ συστήματος***, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἠμποροῦσαν οἱ ἴδιοι ἀριθμοὶ νὰ ἐπανέρχωνται μὲ μίαν ὡρισμένην τάξιν. Ἕνα τέτοιον ἀριθμητικὸν σύστημα, ἐνωρίτατα διαδοθὲν εἰς ὅλους σχεδὸν τοὺς πολιτισμένους λαούς, ὅπως εἶναι οἱ Ἀσσύριοι καὶ Βαβυλώνιοι, οἱ Σημῖται, οἱ Ἰνδοί, οἱ Ἕλληνες καὶ οἱ Ῥωμαῖοι, εὑρίσκομεν τὸ ***δεκαδικόν***, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ σήμερον εἰς γενικὴν σχεδὸν χρῆσιν. Ἀφορμὴν εἰς τὸν σχηματισμόν του ἔδωκε προφανῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων καὶ τῶν δύο χειρῶν. [Ἡ φύσις τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν ἀνὰ 10 κατώτεραι μονάδες συνενώνονται εἰς μίαν ἀνώτερην μονάδα· τοιουτοτρόπως αἱ 10 ἁπλαῖ μονάδες συνενώνονται εἰς μίαν μονάδα ἀνωτέρας τάξεως, τὴν δεκάδα, 10 δεκάδες εἰς μίαν μονάδα ἀνωτέρας τάξεως, τὴν ἑκατοντάδα, 10 ἑκατοντάδες εἰς μίαν μονάδα ἀνωτέρας τάξεως, τὴν χιλιάδα κ.οὔτ.κ. Βάσις λοιπὸν τοῦ συστήματος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 10 καὶ δι᾽ αὐτὸ εἶναι καὶ λέγεται δεκαδικόν. Αἱ διαδοχικαὶ μονάδες του εἶναι δυνάμεις τοῦ 10, δι᾽ αὐτὸ δὲ εἶναι καὶ λέγονται δεκαδικαὶ μονάδες. Ἔτσι ἡ δεκὰς εἶναι 10^1, ἡ ἑκατοντὰς 10^2, ἡ χιλιὰς 10^3, ἡ δεκὰς τῶν χιλιάδων 10^4, τὸ ἑκατομμύριον 10^6 κ. οὔτ. καθ. Ἀπὸ ὅλους τώρα τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συστήματος μόνον οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἁπλῶν μονάδων 1—10 σχηματίζονται καὶ νοοῦνται ὡς σχετικῶς ἁπλοῖ ἀριθμοί, ὡς σχετικῶς αὐτοτελῆ καὶ ἀνεξάρτητα ἄτομα, δι᾽ αὐτὸ δὲ ἔχουν καὶ ἁπλᾶ ὀνόματα. Ὅλοι οἱ ἄλλοι σχηματίζονται καὶ νοοῦνται ὡς σύνθετοι ἀριθμοί, ὡς ἀποτελούμενοι δηλ. ἀπὸ τὴν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τάξεώς των (τὴν δεκάδα, ἑκατοντάδα, χιλιάδα κ. τ. λ.) ἢ πολλαπλάσιόν της (10×2, 10×3 κ. τ. λ., 100×2, 100×3 κ. τ. λ.) καὶ μονάδας μιᾶς ἢ περισσοτέρων κατωτέρων τάξεων (π. χ. ὁ 35 ἀπὸ $10\times3+5$, ὁ 225 ἀπὸ $100\times2+10\times2+5$ κ. τ. λ.). Ἔτσι κάθε πολυψήφιος ἀριθμὸς ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς πολυώνυμον διαταγμένον μὲ κατιούσας δυνάμεις τοῦ 10, δηλ. τῆς βάσεως τοῦ συστήματος. Ὁ ἀριθμὸς π. χ. 52360 εἶναι : $5\times10^4+2\times10^3+3\times10^2+6\times10^1$. Ὁ τρόπος δὲ αὐτὸς τῆς συνθέσεως τῶν προκειμένων ἀριθμῶν φανερώνεται καὶ εἰς ***τὴν γλῶσσαν*** τῶν λαῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἐφαρμόσει τὸ δεκαδ. σύστημα, ἤτοι εἰς τὰ ὀνόματα, μὲ τὰ ὁποῖα ὠνόμασαν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς (πρβ. ὡς πρὸς τὴν Ἑλληνικὴν γλῶσσαν : ἕνδεκα=δέκα καὶ ἕνα, δεκαπέντε, εἴκοσι=(ὅπως δεικνύει ἡ ἐτυμολογία τῆς λέξεως) δύο φορὰς τὸ δέκα, τριάκοντα, τεσσαράκοντα κ. τ. λ.=(ὅπως δεικνύει ὡσαύτως ἡ ἐτυμολογία τῶν λέξεων) τρεῖς, τέσσαρας κ. τ. λ. φορὰς τὸ δέκα, ἑβδομήκοντα τρία=ἑπτὰ φορὰς τὸ δέκα καὶ τρία, διακόσια ἑξήκοντα πέντε κ. τ. λ.). Ἀπὸ τὰς δεκαδικὰς τώρα μονάδας ἁπλᾶ ὀνόματα ἔχουν εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ἐκτὸς τῆς πρώτης, δηλ. τῆς δεκάδος, μόνον ἡ δεκὰς τῶν δεκάδων, ὀνομαζομένη ἑκατοντάς, καὶ ἡ δεκὰς τῶν ἑκατοντάδων, ὀνομαζομένη χιλιάς. Τὸ ὄνομα ἑκατομμύριον, μὲ τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ἡ δεκὰς τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων, δὲν εἶναι ἁπλοῦν, ὅπως θεωρεῖται εἰς τὴν κοινὴν χρῆσιν, ἀλλὰ σύνθετον, φανερῶνον ἑκατὸν μυριάδας· ἦτο δὲ ἡ μυριὰς εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας τὸ ἁπλοῦν ὄνομα τῆς δεκάδος τῶν χιλιάδων, τὸ ὁποῖον δὲν χρησιμοποιεῖται πλέον σήμερον. Ἔτσι λοιπὸν ὅλαι αἱ ἀνώτεραι ἀπὸ τὴν χιλιάδα δεκαδικαὶ μονάδες δὲν ἔχουν ἁπλᾶ ὀνόματα (πρβ. δεκὰς χιλιάδων, ἑκατοντὰς χιλιάδων κ. τ. λ.). Ἀνάλογα περίπου πράγματα συμβαίνουν καὶ εἰς τὰς γλώσσας τῶν ἄλλων λαῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἐφαρμόσει τὸ δεκαδ. σύστημα. Μόνον εἰς τὴν Σανσκριτικὴν ὑπάρχουν ἀπὸ τοὺς ἀρχαιοτάτους χρόνους ἁπλᾶ ἀριθμητικὰ δι᾽ ὅλας τὰς δεκαδ. μονάδας μέχρι τῆς 10^{21}. Πρβ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σελ. 75 κ. ἀκ.].

Ἐκτὸς τοῦ δεκαδικοῦ καὶ ἄλλα συστήματα ἔχουν τεθῆ εἰς ἐφαρμογήν, ἂν καὶ πολὺ περιωρισμένην. Ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι καὶ ***τὸ πενταδικόν***, τὸ ὁποῖον μάλιστα θεωρεῖται ὡς τὸ παλαιότατον ἀριθμητικὸν σύστημα καὶ εἰς τοῦ ὁποίου τὸν σχηματισμὸν ἔδωκε βέβαια ἀφορμὴν ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς μιᾶς χειρός. Ὑπόλοιπα τοῦ πενταδικοῦ συστήματος ἑνωμένα μὲ τὸ δεκαδικόν, εὑρίσκονται εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν τῶν Ῥωμαίων, διότι εἰς τὴν προφορικήν των παρουσιάζεται καθαρὸν τὸ δεκαδικόν. Ἔτσι οἱ Ῥωμαῖοι εἰς τὴν γραπτὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν σχηματίζουν τὸν 6 (VI) ἀπὸ τὸν 5+1 (V καὶ I), τὸν 7 (VII) ἀπὸ τὸν 5+2 (V καὶ II), τὸν 8 (VIII) ἀπὸ τὸν 5+3 (V καὶ III), τὸν 60 (LX) ἀπὸ τὸν 50+10 (L καὶ X), τὸν 70 (LXX) ἀπὸ τὸν 50+20 κ.τ.λ. Ἀλλὰ καὶ ἕως σήμερον ἀκόμη μεταχειρίζονται τὸ πενταδικὸν σύστημα μερικοὶ Ἀφρικανικοὶ λαοί. [Βάσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι ὁ 5, αἱ δὲ διαδοχικαὶ μονάδες του εἶναι δυνάμεις τοῦ 5, ἤτοι $^1=5$, $5^2=25$, $5^3=125$, $5^4=6\;5$ κ.τ.λ. Κάθε πολυψήφιος ἀριθμὸς τοῦ πενταδ. συστήματος εἶναι πολυώνυμον διατεταγμένον μὲ κατιούσας δυνάμεις τῆς βάσεως 5. Ὁ ἀριθμὸς π. χ. 320 εἰς τὸ πενταδικὸν σύστημα θὰ ἐσήμαινε: $3\times5^2+2\times5^1$, ἤτοι δεκαδικὰ γραφόμενος $3\times25+2\times5$ $(=85)$. Ἴδ καὶ *Räther* ὅπ. ἀν.] Σπανιώτερα ἀπὸ τὸ πενταδικὸν παρουσιάζεται ***τὸ εἰκοσαδικὸν σύστημα***, εἰς τοῦ ὁποίου τὸν σχηματισμὸν ἀφορμὴν θὰ ἔδωκε ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων καὶ τῶν χειρῶν καὶ τῶν ποδῶν. [Βάσις του εἶναι ὁ ἀριθμὸς 20, αἱ δὲ διαδοχικαί του μονάδες εἶναι δυνάμεις τοῦ 20, ἤτοι $20^1=20$, $20^2=400$, $20^3=8000$, $20^4=160000$ κ.τ.λ. Οἱ ἀριθμοὶ 11—20 δὲν σχηματίζονται φυσικὰ εἰς αὐτό, ὅπως εἰς τὸ δεκαδικόν, ἀπὸ τὸν 10 καὶ ἕνα μικρότερον ἀριθμόν, ἀλλ' εἶναι σχετικῶς ἁπλοῖ καὶ αὐτοτελεῖς ἀριθμοί, ὅπως εἶναι εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα οἱ ἀριθμοὶ 1—10. Κάθε πολυψήφιος ἀριθμὸς τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει διαταχθῆ εἰς κατιούσας δυνάμεις τῆς βάσεως 20. Ὁ ἀνωτέρω π. χ. ἀριθμὸς 320 εἰς τὸ εἰκοσαδικὸν σύστημα θὰ ἐσήμαινε: 3×20^2 $+2\times20^1$, ἤτοι δεκαδικὰ γραφόμενος $3\times400+2\times20$ $(=1240)$. Τὸ εἰκοσαδικὸν σύστημα ἐφαρμόζεται μέχρι τῆς σήμερον ἀπὸ τοὺς Ἀτσέκους τοῦ Μεξικοῦ (δηλ. τοὺς παλαιοὺς Μεξικανούς), οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἰδιαιτέρας λέξεις διὰ τὸ 20^1, $20^2=400$ καὶ $20^3=8000$, καθὼς καὶ ἀπὸ τὴν Ἰνδιανικὴν φυλὴν τῶν Μάγια ἐν Γουκατάν, τῶν ὁποίων ἡ γλῶσσα ἔχει ἰδιαίτερην λέξιν καὶ διὰ τὸ $20^4=160000$. Ἴδ. καὶ *Räther*, ὅπου ἀν.]. Ἀλλὰ καὶ οἱ παλαιοὶ Κέλται εἶχαν

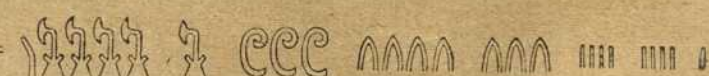
τὸ εἰκοσαδικὸν σύστημα, ὑπόλοιπα τοῦ ὁποίου δεικνύει ἡ Γαλλικὴ γλῶσσα εἰς τὰ ὀνόματα τῶν ἀπὸ τοῦ 70—99 ἀριθμῶν: 70: soixante—dix=60 $(20\times3)+10$, 80: quatre vingt$=4\times20$, 90: quatre—vingt—dix$=4\times20+10$, 95: quatre-vingt-quinze $=4\times20+15$. Πρακτικῶς εὔχρηστον θὰ ἦτο καὶ τὸ ***δωδεκαδικὸν*** σύστημα, διότι ἡ δωδεκὰς διαιρεῖται μὲ ἀρκετοὺς ἀριθμοὺς χωρὶς ὑπόλοιπον. Τὴν εἰσαγωγὴν μάλιστα τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἐπρότεινε ἀκόμη κατὰ τὸ 1800 ὁ καθηγητὴς Werneburg. Ἐν τούτοις κανὲν ἀπὸ τὰ συστήματα αὐτά, τὰ ὁποῖα εἴδαμεν, ἐκτὸς τοῦ δεκαδικοῦ δὲν ἠμπόρεσε νὰ εὕρῃ γενικώτερην διάδοσιν. Τὸ δεκαδικόν, ἐπικρατῆσαν εἰς ὅλην σχεδὸν τὴν πολιτισμένην ἀρχαιότητα, ἐξακολουθεῖ μέχρι τῆς σήμερον νὰ χρησιμοποιῆται ἀπὸ ὅλους τοὺς πολιτισμένους λαούς.

Ἀλλ' ἐνῷ ἡ γλῶσσα ἄρχισε, καθὼς εἴδαμεν, νὰ προσαρμόζεται (διὰ τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν) ἐνωρίτατα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα παντοῦ, ὅπου ἐγίνετο χρῆσίς του, δὲν συνέβηκε τὸ ἴδιον καὶ μὲ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν. «Εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν μὲ πολὺ ἀργὰ βήματα κατορθώνεται ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ δεκ. συστήματος, ὡς πρὸς τὸ ζήτημα δὲ αὐτὸ ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι εὑρισκόμεθα ἐμπρὸς εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ περιεργότατα φαινόμενα τὰ παρατηρούμενα εἰς τὴν ἐξέλιξιν τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Ἐχρειάσθηκαν ἀτελεύτηται προσπάθειαι μακρῶν αἰώνων, εἰς τὰς ὁποίας ἔλαβαν μέρος τὰ πρῶτα πνεύματα τῆς ἀρχαιότητος καὶ τοῦ μεσαίωνος, διὰ νὰ ἠμπορέσῃ ἡ γραπτὴ παράστασις τῶν ἀριθμῶν νὰ ἀνυψωθῇ εἰς μίαν σχετικῶς ἀνώτερην βαθμίδα. Ὅταν δὲ οἱ πολιτισμένοι λαοὶ τῆς Εὐρώπης ἐπλησίασαν εἰς τὸν σημερινόν, τὸν προφανῶς τελειότατον τρόπον τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, τόσον, ὥστε νὰ εἶναι ἀδύνατον νὰ μὴ κάμουν καὶ τὸ τελευταῖον πρὸς αὐτὸν βῆμα, μὲ μίαν θαυμασίαν συμπλοκὴν τῶν ἱστορικῶν γεγονότων τὸ τέρμα τῆς ἐξελίξεως αὐτῆς μεταδίδεται ἕτοιμον εἰς αὐτοὺς ἀπὸ μίαν ξένην ἐκπολιτιστικὴν πηγήν, ἤτοι τοὺς Ἰνδοὺς διαμέσου τῶν Ἀράβων». (Πρβ. *Stoy*, Zur Geschichte des Rechenunterrichts, σελ. 22).

[Ὁ ἀρχικὸς τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον οἱ ἄνθρωποι παρίσταναν κάθε ἀριθμὸν μὲ τὰ ἀριθμητικὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιοῦσαν, εἴτε γραμμαὶ ἦσαν, εἴτε σφῆνες, εἴτε ἄλλα, δὲν ἦτο δυνατὸν χωρὶς ἀμφιβολίαν νὰ ἦτο ἄλλος παρὰ νὰ γράφουν τόσα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά, ὅσας μονάδας εἶχεν ὁ ἀριθμός. Ἐπὶ μακροὺς χρόνους ἐξοικονομοῦντο μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, διότι εἰς τὴν κατάστασιν τοῦ πολιτισμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκοντο, δὲν ἐπαρουσιάζετο ἡ ἀνάγκη νὰ μεταχειρίζωνται μεγάλους ἀριθμούς. Ἐφόσον ὅμως μὲ τὴν πρόοδον τοῦ πολιτισμοῦ ἄρχισαν νὰ σχηματίζουν καὶ νὰ μεταχειρίζωνται καὶ μεγαλυτέρους ἀριθμούς, ἡ ἀνάγκη τῆς γραπτῆς παραστάσεως καὶ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἐπροκάλεσε τὴν ἐφεύρεσιν τῆς συντόμου παραστάσεως ὡρισμένων ἀριθμῶν. Ἔτσι μερικοὶ λαοὶ ἀπὸ τοὺς μεταχειριζομένους τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἐφεῦραν διὰ τὰς δεκαδικὰς μονάδας 10, 100, 1000, 10000 ἰδιαίτερα σημεῖα. Εἴδαμεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ, μὲ ποῖα σημεῖα παρίσταναν οἱ Αἰγύπτιοι τὰς μονάδας αὐτάς. Παραθέτομεν ἐδῶ καὶ τὰ σφηνοειδῆ σημεῖα, μὲ τὰ ὁποῖα οἱ Ἀσσύριοι καὶ Βαβυλώνιοι παρίσταναν τὰς δεκαδ. μονάδας τῶν ἰδίων τάξεων:

1 10 100 1000 10000

Ἐννοεῖται τώρα, ὅτι διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἰδίας τάξεως ἐκράτησαν τὸν παλαιὸν τρόπον τῆς παραστάσεως. Διὰ νὰ παραστήσουν π. χ. οἱ Αἰγύπτιοι 8 μονάδας ἔγραφαν κατὰ σειρὰν 8 σημεῖα τῶν μονάδων, ἤτοι 8 ῥάβδους μετρήσεως, διὰ νὰ παραστήσουν 8 δεκάδας ἔγραφαν κατὰ σειρὰν 8 σημεῖα τῶν δεκάδων, ἤτοι 8 ζεύγη τεντωμένων βραχιόνων κ. οὕτ. καθ. Μὲ τὸν τρόπον φυσικὰ αὐτὸν τῆς γραπτῆς παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν ἡ χρησιμοποίησις τῶν ἰδιαιτέρων σημείων τῶν δεκαδ. μονάδων δὲν τοὺς ὠφέλησε πολύ, ἡ δὲ γραφὴ κάθε ἀριθμοῦ, ἰδίως ὅμως τῶν πολυψηφίων, ἦτο δυσκολωτάτη. Διὰ νὰ γράψουν π.χ. οἱ Αἰγύπτιοι τὸν ἀριθμὸν 15379, ἔπρεπε νὰ γράψουν τὰ ἀκόλουθα 25 σημεῖα:

15379 = 

Διὰ νὰ γράψουν οἱ Βαβυλώνιοι τὸν ἀριθμὸν 36830 ἔπρεπε νὰ

γράψουν τὰ ἀκόλουθα 28 σημεῖα:

36830 = 

Φυσικὰ δὲ μὲ τὸ σύστημα αὐτὸ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ λόγος περὶ γραπτῆς ἐκτελέσεως τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., σ. 80 κ. ἀκ.

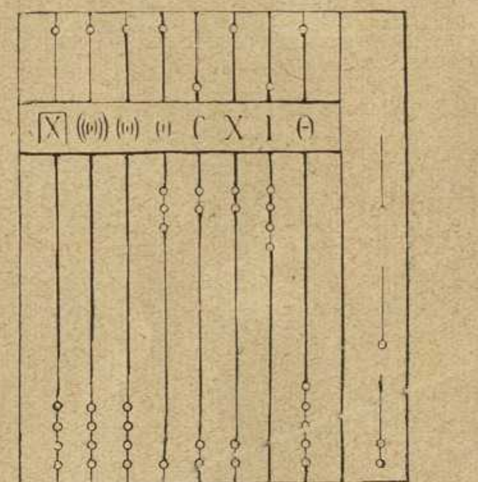
Ἐρχόμενοι τώρα εἰς ***τοὺς Ἕλληνας*** παρατηροῦμεν, ὅτι ἕως τὸν $5^{ον}$ π. χ. αἰῶνα ἐχρησιμοποιοῦσαν καὶ αὐτοὶ τὸν ἁπλοῦν τρόπον τῆς παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν μὲ γραμμάς, καθὼς καὶ μὲ τὰ ἀρχικὰ γράμματα μερικῶν ἀριθμητικῶν (ἤτοι: Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, ΙΙΙΙ = 1, 2, 3, 4, Π=5, Δ=10 κ. τ. λ.). Ἔκτοτε ἄρχισαν νὰ μεταχειρίζωνται πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου των, προσθέσαντες εἰς τὰ ἐν χρήσει 24 καὶ τρία παλαιότερα, ἤτοι τὸ ϛ, στίγμα καλούμενον, τὸ ϙ κόππα καὶ τὸ ϡ σαμπῖ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ μὲν πρῶτον ἔλαβε εἰς τὸ ἀλφάβητον τὴν ἕκτην θέσιν, τὸ δὲ δεύτερον τὴν $18^{ην}$ καὶ τὸ τρίτον τὴν $27^{ην}$. [Μὲ τὰ 9 πρῶτα ἀπὸ τὰ 27 αὐτὰ γράμματα παρίσταναν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἁπλῶν μονάδων 1—9, μὲ τὰ κατόπιν 9 τοὺς ἀριθμοὺς τῶν καθαρῶν δεκάδων 10, 20 . . . 90 καὶ μὲ τὰ 9 τελευταῖα τοὺς ἀριθμοὺς τῶν καθαρῶν ἑκατοντάδων 100, 200 . . . 900]. Διὰ νὰ διακρίνεται δέ, ὅτι τὰ γράμματα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, ἔθεταν ἐπάνω των μίαν γραμμήν. [Τὰ ἴδια γράμματα μὲ τὴν γραμμὴν ὑποκάτω καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐφανέρωναν τοὺς ἀνωτέρους ἀπὸ τὸν 1000 ἀριθμούς. Ἡ παράστασις τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—9 μὲ ἰδιαίτερα ἁπλᾶ σημεῖα εἶναι προφανῶς σημαντικὴ πρόοδος]. Δυστυχῶς ὅμως ἡ πρόοδος αὐτὴ ἔμενεν ἄχρηστη, ἐφόσον εἶχαν εἰσαγάγει τέτοια σημεῖα καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν καθαρῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων κ. τ. λ. Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν σημείων αὐτῶν δὲν ἐπέτρεπεν εἰς τοὺς Ἕλληνας νὰ χρησιμοποιήσουν τὰ πλεονεκτήματα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος οὔτε εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, οὔτε εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν. [Ἡ γραφὴ π. χ. τοῦ 25 δὲν ἠμποροῦσε νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν γραφὴν τοῦ 2 (β) καὶ τοῦ 5 (ε), ἐφόσον πρὸς παράστασιν τοῦ 20 εἶχαν ἰδιαίτερον σημεῖον, τὸ κ]. Ἡ πρόσθεσις 40 (μ) + 30 (λ) δὲν ἠμποροῦσε νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν πρόσθεσιν 4+3 (δ+γ) καὶ οὕτ. καθ. [Φυσικὰ δὲ ἔτσι καὶ ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν ἦτο σχετικῶς δύσκολη, διότι ἀπαιτοῦσε τὴν εἰς τὴν μνήμην συγκράτησιν πολλῶν ἀριθμ. σημείων, καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις ἐγίνετο ἀσυγκρίτως δυσκολώτερα.

Οἱ Ῥωμαῖοι ἐφύλαξαν μέχρι τέλους τὰ ἁπλᾶ καὶ μέχρι σήμερον εἰς ἡμᾶς γνωστὰ ἀριθμητικά των σημεῖα. Τὰ σημεῖα αὐτὰ ἠμποροῦν νὰ γράφωνται καὶ νὰ διακρίνωνται τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο εὔκολα. Εἶναι δὲ τὰ ἀκόλουθα ἑπτά: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500 καὶ M=1000. Σημαντικὸν μειονέκτημα τοῦ Ῥωμαϊκοῦ συστήματος ἦτο, ὅτι ἀπὸ τοὺς 9 πρώτους ἀριθμοὺς μόνον ὁ 1 καὶ ὁ 5 ἐπαριστάνοντο μὲ ἁπλᾶ σημεῖα (τὸ I καὶ V), ἐνῷ οἱ λοιποὶ ἐπαριστάνοντο μὲ σύνθετα (π. χ. ὁ 2 μὲ τὸ σημεῖον II, ὁ 6 μὲ τὸ VI κ. τ. λ.). Ὅθεν τὰ Ῥωμαϊκὰ ψηφία δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν, ὅταν ἄρχισε νὰ εἰσάγεται τὸ σήμερον ἰσχύον σύστημα τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ ἀξία τῶν ψηφίων τῶν 9 πρώτων ἀριθμῶν ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ καθὲν μεταξὺ τῶν ἄλλων. Ἐν τούτοις καὶ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν Ἀραβικῶν ψηφίων ἐχρησιμοποιοῦσαν ἐπὶ μακρὸν τὰ Ῥωμαϊκά, μεταχειριζόμενοι κατ' ἀρχὰς τὰ Ἀραβικὰ μόνον διὰ τὴν παράστασιν τῶν χρονολογιῶν. Σήμερον πλέον συμβαίνει, καθὼς εἶναι γνωστόν, ἀκριβῶς τὸ ἀντίθετον· μὲ τὰ Ῥωμαϊκὰ παριστάνονται συνήθως μόνον αἱ χρονολογίαι, καθὼς εἰς ἐπιγραφάς, εἰς ἐκδόσεις βιβλίων κ. τ. λ.

Οἱ Ῥωμαῖοι ἕνεκα τῆς μικρᾶς ἐν γένει διαδόσεως τῆς τέχνης τοῦ γράφειν καὶ ἕνεκα τῶν δυσκολιῶν, εἰς τὰς ὁποίας ἐπρόσκοπτε ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις ὡς ἐκ τοῦ εἴδους τῶν ἀριθμητικῶν των σημείων, ἐχρησιμοποιοῦσαν διὰ τὴν αἰσθητοποίησιν τῶν ἀριθμῶν τὸν ***ἄβακα,*** ὁ ὁποῖος ἦτο δύο εἰδῶν, ***γραμμικὸς*** καὶ ***κατὰ στήλας.***

Ὁ γραμμικὸς ἄβαξ εἶναι ἕνας ὀρθογώνιος πίναξ, εἰς τὸν ὁποῖον ἦσαν χαραγμέναι 8 (κατὰ πᾶσαν πιθανότητα κάθετοι) γραμμαί. (Ἴδ. τὴν ὑπ' ἀρ. 1 εἰκ., ἡ ὁποία ἔχει ληφθῆ ἀπὸ τὸ βιβλίον τοῦ *Steinweller*, Kurzer Abriss der Geschichte des Rechenunterrichts). Εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς γραμμὰς αὐτὰς ἐσημειώνετο τὸ σημεῖον τὸ δηλῶνον τὴν ἀριθμητικὴν ἀξίαν τῆς

γραμμῆς, ἤτοι τὴν τάξιν τῶν μονάδων, τὴν ὁποίαν ἀντιπροσώπευε· [τὸ σημεῖον π. χ. I τὸ ὑπάρχον εἰς τὴν δεύτερην γραμμὴν (ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ) ἐδήλωνε, ὅτι ἡ γραμμὴ αὐτὴ παριστάνει τὰς ἁπλᾶς μονάδας 1—9, τὸ σημεῖον X, τὸ σημειωνόμενον εἰς τὴν τρίτην γραμμήν, ἐφανέρωνεν, ὅτι ἡ γραμμὴ αὐτὴ ἀντιπροσωπεύει τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἤτοι τὰς δεκάδας 10, 20... 90 κ. οὕτ. καθ.]. Μὲ τὰ μνημονευθέντα σημεῖα ὁ πίναξ ἐχωρίζετο εἰς δύο ἄνισα μέρη. Εἰς τὸ μακρότερον μέρος κάθε γραμμῆς ὑπῆρχαν 4 ἀριθμητικαὶ ψηφῖδες, εἰς δὲ τὸ βραχύτερον 1, ἡ ὁποία ὅμως εἶχεν ἀξίαν ἴσην μὲ 5 ψηφῖδας τοῦ μακροτέρου μέρους.



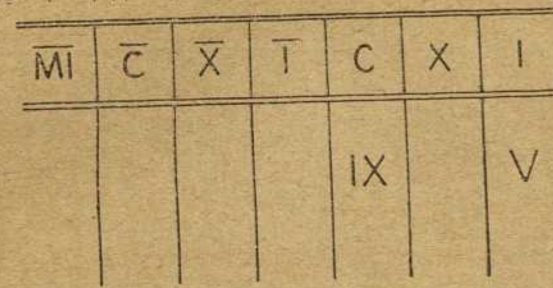
Εἰκ. 1. Ὁ γραμμικὸς ἄβαξ.

Ἐφόσον λοιπὸν ἤθελαν νὰ παραστήσουν ἕνα ἀριθμὸν μὲ τὰς ψηφῖδας, τὰς ὤθουν καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα τοῦ πίνακος, εἰς τὰ ὁποῖα ἀρχικῶς ἦσαν τοποθετημέναι, πρὸς τὸ μέσον του, ἕως δηλ. τὸ μέρος περίπου, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπῆρχαν τὰ σημεῖα τὰ φανερώνοντα τὴν ἀριθμητικὴν ἀξίαν τῶν γραμμῶν. Ἔτσι ἠμποροῦσαν νὰ παραστήσουν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἕως τὸν 9.999.999. Εἰς τὴν μνημονευθεῖσαν εἰκόνα ὑπ' ἀρ. 1 παριστάνεται ὁ ἀριθμὸς 3729. [Εἰς τὴν πέμπτην γραμμήν, ἡ ὁποία παριστάνει τὰς χιλιάδας, ἔχουν φερθῆ πρὸς τὸ μέσον τοῦ πίνακος 3 ψηφῖδες τοῦ μακροτέρου μέρους της, αἱ ὁποῖαι ἔτσι παριστάνουν 3 χιλιάδας. Εἰς τὴν τέταρτην γραμμήν, ἡ ὁποία παριστάνει τὰς ἑκατοντάδας, ἔχουν φερθῆ πρὸς τὸ μέσον τοῦ πίνακος μία μὲν ψηφὶς ἀπὸ τὸ βραχύτερον μέρος τῆς γραμμῆς, παριστάνουσα 5 ἑκατοντάδας, δύο δὲ ψηφῖδες ἀπὸ τὸ μακρότερον, παριστάνουσαι δύο ἑκατοντάδας (5+2=7 ἑκατοντάδες) κ. οὕτ. καθ.]. Ἡ πρώτη γραμμὴ ἡ ἔχουσα τὸ σημεῖον Θ παριστάνει ἀξίας κατωτέρας ἀπὸ τὴν μονάδα· τέτοιαι δὲ ἦσαν εἰς τὸ νομισματικὸν σύστημα τῶν Ῥωμαίων αἱ οὐγγίαι· δώδεκα οὐγγίαι ἔκαμναν ἕνα ἀσσάριον, τὸ ὁποῖον καὶ ἦτο ἡ νομισματικὴ μονὰς τῶν Ῥωμαίων. Δι' αὐτὸ δὲ κατ' ἐξαίρεσιν εἰς μὲν τὸ μακρότερον μέρος τῆς γραμμῆς αὐτῆς ὑπάρχουν 5 ψηφῖδες, ἡ δὲ ψηφὶς ἡ ὑπάρχουσα εἰς τὸ βραχύτερον μέρος ἰσοδυναμεῖ μὲ 6 ψηφῖδας τοῦ μακροτέρου.

[Εἶναι προφανὲς τώρα ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω, ὅτι ὁ γραμμικὸς ἄβαξ τῶν Ῥωμαίων—τοῦ ὁποίου γίνεται χρῆσις ἀπὸ τὸν χριστιανικὸν κόσμον τῆς Εὐρώπης μέχρι τοῦ 10 περίπου αἰῶνος—χρησιμοποιεῖ εἰς ἀρκετὸν βαθμὸν τὰ πλεονεκτήματα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν καὶ εἰς τὴν ἀρίθμησιν ἐν γένει. Οἱ ἀριθμοὶ παριστάνονται εἰς αὐτὸν ὡς ἀποτελούμενοι ἀπὸ μονάδας τῶν διαφόρων δεκαδικῶν τάξεων καὶ αἱ μονάδες τῆς κάθε τάξεως λογαριάζονται, ὅπως αἱ μονάδες τῆς κατωτάτης. Δικαίως δὲ δι' αὐτὸ θεωρεῖται ὁ γραμμικὸς ἄβαξ ὡς σπουδαῖος σταθμὸς εἰς τὴν ὁδὸν τὴν ἄγουσαν εἰς τὸν σημερινὸν τρόπον τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως. (Ἴδ. καὶ *Hartmann*, Der Rechenunterricht, 4 ἔκδ., Leipzig καὶ Frankfurt a. M., Kesselring, 1913 σ. 7). Ἐννοεῖται ὅμως, ὅτι δὲν εἶναι παρὰ ἕνας σταθμὸς εἰς τὴν ὁδὸν αὐτήν. Διότι ὡς ἐκ τῆς φύσεώς του δὲν εἶναι παρὰ ἕνα μέσον τῆς ὀργανικῆς μόνον παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς ὀργανικῆς ἀριθμήσεως, δὲν κατορθώνεται δὲ μὲ αὐτὸν οὔτε γραφὴ τῶν ἀριθμῶν, οὔτε γραπτὴ ἀρίθμησις].

Πολὺ μεγαλύτερην πρόοδον ἀπὸ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἀπόψεως σημειώνει ὁ **ἔνστηλος** ἄβαξ, τοῦ ὁποίου ἀρχίζει νὰ γενικεύεται ἡ χρῆσις εἰς τὴν χριστιανικὴν Εὐρώπην ἀπὸ τὸν 10 περίπου αἰῶνα. Ὁ ἄβαξ αὐτὸς εἶχε τὴν ἴδιαν μὲ τὸν γραμμικὸν διάταξιν (ἴδ. εἰκ. ὑπ' ἀριθ. 2, ἡ ὁποία ἔχει ληφθῆ ἀπὸ τὸ βιβλίον τοῦ *Friedlein*, Die Zahlenzeichen κ.τ.λ.). [Διαφέρει ὅμως ἀπὸ αὐτὸν εἰς τὰ ἑξῆς. Αἱ τάξεις τῶν διαφόρων μονάδων δὲν ἐπαριστάνοντο μὲ τὰς γραμμὰς τοῦ ἄβακος, ἀλλὰ μὲ τὰς στήλας, τὰς ὁποίας ἐσχημάτιζαν αἱ γραμμαὶ αὐταί. Ἡ πρώτη στήλη ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ φανερώνει τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἡ δευτέρη τὰς δεκάδας, ἡ τρίτη τὰς ἑκατοντάδας κ. οὕτ. κ. Ἐφόσον τώρα

ἤθελαν νὰ παραστήσουν ἕνα ἀριθμὸν εἰς μίαν στήλην, δὲν τὸν ἐσχημάτιζαν μὲ ψηφῖδας, ὅπως εἰς τὸν γραμμικὸν ἄβακα, ἀλλ' ἢ τὸν



Εἰκ. 2. Ὁ ἔνστηλος ἄβαξ.

ἔγραφαν μὲ τὸ ἀριθμητικόν του σημεῖον ἢ τὸν παρίσταναν μὲ ἕνα κῶνον, ἐπάνω εἰς τὸν ὁποῖον ἦτο σημειωμένον τὸ σημεῖον αὐτό. Ἔτσι τὰ σημεῖα τῶν ἀριθμῶν 1—9 γραφόμενα (ἢ θετόμενα διὰ τῶν κώνων) εἰς τὴν πρώτην στήλην ἐφανέρωναν 1—9 ἁπλᾶς μονάδας, εἰς τὴν δευτέρην 1—9 δεκάδας, εἰς τὴν τρίτην 1—9 ἑκατοντάδας κ. οὕτ. καθ.)]. Μὲ τὸν τρόπον δὲ αὐτὸν τῆς παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν ἦτο φυσικὰ περιττὴ ἡ χρῆσις πενταδικοῦ ἀριθμητικοῦ σημείου, ὅπως ἐγίνετο χρῆσις πενταδικῆς ψηφῖδος εἰς τὸν γραμμικὸν ἄβακα. Αἱ διαφοραὶ αὐταί, τὰς ὁποίας παρουσιάζει ὁ ἔνστηλος ἄβαξ ἐν συγκρίσει μὲ τὸν γραμμικόν, κάμνουν τὴν διάταξίν του ἁπλουστάτην. Ὁ ἀναγνώστης ἠμπορεῖ νὰ ἀναγνώσῃ εὐκολώτατα εἰς τὴν παραθετομένην εἰκόνα τὸν ἀριθμὸν 905· τὸ μὲν σημεῖον IX=9 γραμμένον εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων C παριστάνει 9 ἑκατοντάδας, τὸ δὲ σημεῖον V=5 γραμμένον εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων I παριστάνει 5 μονάδας, καὶ τὰ δύο δέ, μαζὶ λαμβανόμενα, παριστάνουν τὸν **ἀριθμὸν** 905. [Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω, εἰς τὸν ἔνστηλον ἄβακα δὲν ἔχομεν πλέον μέσον τῆς ὀργανικῆς παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ μέσον τῆς γραφῆς των, καὶ μάλιστα γραφῆς, ἡ ὁποία ἔχει πλησιάσει ἀρκετὰ εἰς τὸν σημερινὸν τρόπον τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν. Μὲ τὸν ἔνστηλον ἄβακα ἠμποροῦσαν νὰ γράφωνται ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ μὲ 9 μόνον ἀριθμητικὰ σημεῖα, τὰ σημεῖα δηλ. τῶν ἀριθμῶν 1—9, διότι τὸ καθένα των ἐκτὸς τῆς ἀπολύτου του ἀξίας εἶχε καὶ σχετικὴν ἐξαρτωμένην ἀπὸ τὴν στήλην, εἰς τὴν ὁποίαν ἐγράφετο]. Διὰ νὰ φθάσουν οἱ ἄνθρωποι εἰς τὸν σημερινὸν τρόπον τῆς γραφῆς, δὲν ὑπελείπετο παρὰ νὰ εὕρεθοῦν ἁπλούστερα ἀριθμητικὰ σημεῖα καὶ ἕνα σημεῖον φανερῶνον τὰς κενὰς θέσεις, τὴν ἔλλειψιν δηλ. μονάδων ὡρισμένων τάξεων.

Τὰ στοιχεῖα αὐτὰ ἐμεταδόθηκαν εἰς τὴν Δύσιν ἀπὸ τὴν Ἀνατολήν. Ὁ σημερινός μας τρόπος τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν προέρχεται ἀπὸ τὰς Ἰνδίας. Οἱ παλαιοὶ Ἰνδοὶ εἶχαν ἀναπτύξει πολὺ τὴν ἀριθμητικὴν τέχνην, εἰς τὴν ὁποίαν ἦσαν ἐντριβεῖς ὄχι μόνον οἱ λόγιοι, ἀλλὰ καὶ πολλοὶ ἀπὸ τοὺς ἀνθρώπους τοῦ λαοῦ. Ἐγνώριζαν τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις τῆς ἀριθμήσεως, καθὼς καὶ ἀρκετὰς ἀπὸ τὰς μεθόδους, τὰς χρησιμοποιουμένας πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ πρακτικοῦ βίου, ἔκαμναν δὲ μεγάλην χρῆσιν τῆς Ἀλγέβρας. Ἀλλ' ἄφθιτην ὑπηρεσίαν προσέφεραν οἱ Ἰνδοὶ εἰς τὴν ἀνθρωπότητα ἐφευρόντες κατὰ τοὺς πρώτους μ.Χ. αἰῶνας τὸν καὶ σήμερον κρατοῦντα τρόπον τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος στηρίζεται εἰς τὴν κατὰ θέσιν ἀξίαν τῶν ἀριθμ. σημείων καὶ ἠμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ σύντομα ἡ ***κατὰ θέσιν*** ἢ ἡ ***τακτικὴ*** γραφὴ τῶν ἀριθμῶν. [Ὁ τρόπος αὐτὸς προσαρμόζεται τέλεια εἰς τὸν κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν εἰς τὸν νοῦν καὶ εἰς τὴν γλῶσσαν καὶ κάμνει τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν εὐκολώτατην]. Σύμφωνα μὲ αὐτὸν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ γράφονται μὲ ἐννέα μόνον ἁπλᾶ σημεῖα ἢ ψηφία, ἤτοι τὰ ψηφία τῶν ἁπλῶν μονάδων 1—9—προερχόμενα κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ γράμματα τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν—, τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐκτὸς τῆς ἀπολύτου του ἀξίας ἔχει καὶ σχετικὴν ἐξαρτωμένην ἀπὸ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν κατέχει καὶ ἡ ὁποία φανερώνει τὴν τάξιν τῶν μονάδων, τὴν ὁποίαν παριστάνει. Ἔτσι κάθε ψηφίον ἀπὸ αὐτὰ γραφόμενον κατὰ μίαν μὲν θέσιν ἀριστερώτερα λαμβάνει δεκαπλάσιαν ἀξίαν ἀπὸ τὴν προηγουμένην του, κατὰ μίαν δὲ θέσιν δεξιώτερα γίνεται δέκα φορὰς μικρότερον. Εἰς τὴν τελείωσιν τώρα τοῦ τρόπου αὐτοῦ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν συνετέλεσε καὶ ἡ κατὰ τὸν 3 περίπου μ. Χ. αἰῶνα γενομένη ἀπὸ τοὺς Ἰνδοὺς ἐφεύρεσις τοῦ μηδενικοῦ, τὸ ὁποῖον χρησιμεύει πρὸς δήλωσιν κάθε κενῆς θέσεως, τῆς ἐλλείψεώς δηλ. μονάδων ὡρισμένης τάξεως. Δικαίως λέγει ὁ *Laplace*: «Ἡ ἰδέα, ὅπως ὅλα τὰ ποσὰ

παριστάνωνται μὲ ἐννέα μόνον ἀριθμητικὰ σημεῖα, καθόσον προσδίδεται εἰς αὐτὰ ἀπόλυτη μαζὶ καὶ σχετικὴ ὡς ἐκ τῆς θέσεώς των ἀξία, εἶναι τόσον ἁπλῆ, ὥστε ἀκριβῶς διὰ τὴν ἁπλότητά της δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν ὅσον πρέπει, πόσου θαυμασμοῦ εἶναι ἀξία».

Κατὰ τὸν 8 μ. Χ. αἰῶνα παρέλαβαν ἀπὸ τοὺς Ἰνδοὺς τὸν τακτικὸν τρόπον τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν οἱ Ἄραβες, οἱ ὁποῖοι τὸν μετέφεραν εἰς τὴν Ἱσπανίαν, τῆς ὁποίας ἡ πόλις Τολέδον ἔγινε ἡ ἑστία τῆς Ἀραβικῆς ἐπιστήμης. Ἀπὸ τὴν Ἱσπανίαν ἐξαπλώνεται ἡ Ἀριθμητικὴ τῶν Ἀράβων, ὁ Ἀλγόριθμος, κατὰ μὲν τὸν 11 αἰῶνα εἰς τὴν Ἰταλίαν, κατὰ δὲ τὸν 12 εἰς τὴν Γαλλίαν, τὴν Γερμανίαν καὶ τὴν Ἀγγλίαν. Κατὰ τὸν 13 καὶ 14 αἰῶνα ἔκαμνεν ὁ Ἀλγόριθμος μεγαλυτέρας πάντοτε προόδους, ἐκτοπίζων ὀλίγον κατ' ὀλίγον τὴν ἀριθμητικὴν τέχνην τῶν Ῥωμαίων, ἤτο τὴν ἀρίθμησιν μὲ τὸν ἄβακα. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ βιβλία τῆς νέας Ἀριθμητικῆς ἦσαν συνταγμένα εἰς τὴν Λατινικὴν γλῶσσαν, ἤτοι χάριν τῶν λογίων, μόνον αὐτοὶ κατ' ἀρχὰς ἔγιναν κάτοχοι τοῦ Ἀλγορίθμου. Γενικὴ δὲ ἔγινε ἡ χρῆσις τοῦ νέου τρόπου τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν εἰς τὸν πρακτικὸν βίον τῶν Εὐρωπαϊκῶν ἐθνῶν ἀπὸ τὸ τέλος περίπου τοῦ 15 αἰῶνος.

Ὡς πρὸς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀριθμήσεως ἴδ. καὶ τὰ ἀκόλουθα ἔργα: [*M. Cantor*, Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker, Halle, 1863]. *Steinweller*, Kurzer Abriss der Geschichte des Rechenunterrichts u. s. w., 2 ἔκδ., 1899, Leipzig, Hirt, 50 λ.—*Adam*, Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts, Gross-Lichterfelde, Vieweg, 1892, 2, 40 μ.—*Koeltzsch*, Das Deutsche Volksschulrechnen nach seiner geschichtlichen Entwicklung u. s. w., Leipzig, Merseburger, 1894, λ. 75.— *Sterner*, Geschichte der Rechenkunst, München u. Leipzig, Oldenbourg, 1891, 1, 50 μ.— *Villicus*, Geschichte der Rechenkunst u. s. w., 3 ἔκδ., 1897, Wien, Gerold u. S., 2,80 μ., δεμ. 3,20 μ.— *Friedlein*, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7 bis 13 Jahrhundert, Erlangen, 1869. *Stoy*, Zur Geschichte des

Rechenunterrichts, πρῶτον μέρος, Jena 1876.— *Grosse*, Historische Rechenbücher u. s. w., Leipzig, Dürr, 1901, 3,60 μ.

III. ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ.

Μεταξὺ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως καὶ τῆς γραμμικῆς, ὅπως ἐκαλεῖτο ἡ νέα καὶ ἡ παλαιά, ἡ Ῥωμαϊκή, ἀρίθμησις κατὰ τοὺς χρόνους τῆς εἰσαγωγῆς τῆς πρώτης εἰς τὴν χριστιανικὴν Εὐρώπην, ἔγινε κατ' ἀρχὰς σφοδρότατος ἀγών. [Σημειωτέον, ὅτι εἰς τὴν παλαιὰν εἶχαν γίνει ἐν τῷ μεταξὺ μερικαὶ τροποποιήσεις. Εἰς τὸν ἄβακα ἐχαράσσοντο μερικαὶ ὁριζόντιαι γραμμαὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις (ἴδ. εἰκ. ὑπ' ἀρ. 3), αἱ ὁποῖαι ἐτέμνοντο ἐγκάρσια μὲ ἄλλας καθέτους. Αἱ ὁριζόντιαι γραμμαὶ ἐφανέρωναν τὰς διαφόρους τάξεις τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος. Ὁ μεταξὺ δύο τέτοιων γραμμῶν χῶρος ἐπαρίστανε τὸ πενταπλάσιον ἀπὸ ὅ,τι ἐπαρίστανε ἡ κατώτερη ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς γραμμάς. Ὁ χῶρος, ὁ ὁποῖος εὑρίσκετο κάτω ἀπὸ τὴν τελευταίαν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἐσήμαινε τὸ $\frac{1}{2}$. Διὰ νὰ λογαριάζουν, ἐχρησιμοποιοῦσαν ἀριθμ. ψηφῖδας,

Εἰκ. 3. Ὁ ἄβαξ εἰς τὰς ἀρχὰς τῶν νεωτέρων χρόνων.

λιθάρια ἢ στρογγυλὰ ξύλινα δισκάρια, τὰ ὁποῖα ἔθεταν ἐπάνω εἰς τὰς ὁριζοντίας γραμμὰς ἢ εἰς τοὺς μεταξύ των χώρους. Προπάντων ἠσκοῦντο οἱ μανθάνοντες εἰς τὴν παράστασιν («τὴν θέσιν») τῶν ἀριθμῶν. Ἡ ὑπ' ἀρ. 1 στήλη τῆς εἰκόνος δεικνύει τὴν παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ $6783\frac{1}{2}$, ἡ ὑπ' ἀρ. 2 τοῦ ἀριθμοῦ $5697\frac{1}{2}$ καὶ ἡ ὑπ' ἀρ. 3 τοῦ ἀθροίσματος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν πρόσθεσίν των, ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ 12481. (Ἴδ. *Büttner*, Anleitung für den Rechen—und Raumlehre—Unterricht, ἔκδ. 24, Leipzig, Hirt u. Sohn, σελ. 56 κ. ἀκ.)]. Ὁ μεταξὺ τῆς παλαιᾶς καὶ τῆς νέας ἀριθμήσεως ἀγὼν ἐτελείωσε μὲ τὴν νίκην τῆς τελευταίας.

Εἰς τὴν Γερμανίαν συνέτεινε ἰδιαιτέρως εἰς τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ὁ *Adam Ries*, ὁ ὁποῖος εἶναι καὶ ὁ πατὴρ τῆς Γερμανικῆς Μεθοδικῆς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας. Ὁ Ries ἐγεννήθηκε μὲν τὸ 1492, ἀπέθανε δὲ τὸ 1559. Κατὰ τὸ 1518 ἔγραψε τὸ πρῶτόν του ἀριθμητικὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐπραγματεύετο μόνον τὴν γραμμικὴν ἀρίθμησιν. [Μὲ αὐτὸ ἐδίδασκε τὴν διὰ μέσου τοῦ ἀριθμητικοῦ ἄβακος ἐκτέλεσιν τῶν 7 ἀριθμητικῶν πράξεων, ἤτοι τῆς παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν, τῆς προσθέσεως, τῆς ἀφαιρέσεως, τοῦ διπλασιασμοῦ, τῆς διχοτομήσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως. Μὲ τὸ σύστημά του ἠμποροῦσε καὶ ὁ ἀγνοῶν τὴν γραφὴν καὶ ἀνάγνωσιν μαθητὴς νὰ ἐκτελῇ τὰς ἀνωτέρω ἀριθμητικὰς πράξεις]. Κατὰ τὸ 1522 ἐδημοσίευσε τὸ ἔργον του «Rechnung auff der linihen und federn», τὸ ὁποῖον ἐπραγματεύετο καὶ τὴν γραμμικὴν καὶ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν. Τέλος κατὰ τὸ 1558 ἐδημοσιεύθηκε τὸ σημαντικώτερον ἔργον του «Rechenung nach der lenge κ. τ. λ.», ἤτοι Διεξοδικὴ Ἀριθμητική, τὸ ὁποῖον ἐπίσης συνετέλεσε σημαντικὰ εἰς τὴν διάδοσιν τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως. Ὁ Ries ἦτο μὲν σημαντικὸς λογιστικός, ἀλλὰ δὲν συνετέλεσε εἰς τὴν πρόοδον τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπὸ πραγματικῆς ἀπόψεως· ἡ ἀξία του ἦτο μεγάλη κυρίως ἀπὸ τῆς μεθοδικῆς ἀπόψεως. Ὁ *Berthold Hartmann* τὸν ὀνομάζει «τὸν μέγιστον Γερμανὸν Μεθοδικὸν τῆς Ἀριθμητικῆς τοῦ 16 καὶ 17 αἰῶνος». Ὁ Ries περιορίζει τὴν ὕλην εἰς τὸ πρέπον μέτρον, χωρεῖ δὲ εἰς τὴν διάταξίν της ἀπὸ τὰ εὐκολώτερα εἰς τὰ δυσκολώτερα, ἀπὸ τὰ ἁπλᾶ εἰς τὰ σύνθετα. Δὲν προχωρεῖ εἰς νέον ὑλικόν, πρὶν γίνῃ ὅλως διόλου σαφὲς τὸ μέχρι τοῦδε διδαχθέν, φροντίζει ἰδίως διὰ τὴν ἐντύπωσιν τῶν κυρίων σημείων, ἐφαρμόζει τὴν «ἐσωτερικὴν» ἐπανάληψιν, ἔχει σαφῆ καὶ σύντομην τὴν ἔκφρασιν καὶ τονίζει τὴν σπουδαιότητα τῆς εὐχαρίστου μαθήσεως. [Ἐν τούτοις ἡ ἐπεξεργασία τῆς κάθε ὕλης γίνεται ἀπὸ τὸν Ries μηχανικά. Ἀρχίζει μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς διδασκομένης πράξεως καὶ τὴν ἐντύπωσιν τοῦ σχετικοῦ κανόνος. Ἐπακολουθοῦν πρὸς ἄσκησιν παραδείγματα, εἰς τὰ ὁποῖα καὶ ἡ κατάστρωσις καὶ ἡ διατύπωσις τοῦ τρόπου τῆς λύσεως γίνονται μηχανικά, σύμφωνα δηλ. μὲ τὸν ἀπομνημονευθέντα κανόνα καὶ χωρὶς ὁποιανδήποτε διασάφησιν καὶ αἰτιολογίαν. Ἴδ. *Büttner*, ὅπ. ἀν., σ. 58].

Κατὰ τὸν 17 αἰῶνα ἠσχολοῦντο οἱ λόγιοι περισσότερον μὲ τὰ ἀνώτερα κεφάλαια τῆς Ἀριθμητικῆς, ἄφηναν δὲ τὰ κατώτερα εἰς τοὺς λογιστάς, τοὺς καταστιχογράφους κ. τ. ὅμ. Οἱ τελευταῖοι αὐτοὶ ἐπροσπαθοῦσαν νὰ ἐφεύρουν διάφορα τεχνάσματα πρὸς διευκόλυνσιν τῆς πρακτικῆς ἀριθμήσεως. Ἔτσι ὅμως ἐπικρατοῦν καθ' ὅλην τὴν γραμμὴν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ὁ μηχανισμὸς καὶ ἡ παιδιά. Ἔμμετροι ἀριθμητικοὶ κανόνες, ποιήματα ἐγκωμιαστικὰ τῆς ἀριθμητικῆς τέχνης, ἔμμετρα προβλήματα, ἀκόμη δὲ καὶ εἰκόνες ἐπεριλαμβάνοντο εἰς τὰ βιβλία τῆς Ἀριθμητικῆς. Αἱ σπουδαιόταται πρόοδοι ἦσαν ἡ εἰσαγωγὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων καὶ τῆς λεγομένης Ἰταλικῆς μεθόδου. Περὶ **τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων** ἐπραγματεύθηκε ὁ *Beyer* εἰς τὸ ἔργον του «Kunstrechnung der zehnteiligen Brüche» (1619). Ὁ τρόπος τῆς γραφῆς τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἀπὸ τὸν Beyer εἶναι ἐν μέρει διάφορος ἀπὸ τὸν σημερινόν, ὁ ὁποῖος ἄρχισε νὰ χρησιμοποιῆται κατὰ πρῶτον ἀπὸ τὸ 1750. **Ἡ Ἰταλικὴ μέθοδος** εἰσήχθη εἰς τὴν Γερμανίαν ἀπὸ τὴν Ἰταλίαν κατὰ τὰ τέλη τοῦ 17 αἰῶνος. Εἶναι δὲ ἡ μέθοδος αὐτή, ἡ ὁποία ὀνομάζεται κατόπιν καὶ «ἀναλυτικὴ» ἢ «μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν», ἀρίθμησις μὲ εὐκολίας, ἐφαρμοζομένη ἰδίως εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ ἀποβλέπουσα, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος, εἰς τὸ νὰ ἐκτελοῦνται οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ αἱ διαιρέσεις τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου αὐτῆς εὐκολώτερα μὲ τὴν ἀνάλυσιν ἑνὸς

ἀπὸ τοὺς ὅρους των εἰς ἁπλουστέρους καὶ καταλληλοτέρους διὰ τὰς πράξεις αὐτὰς ἀριθμούς. Ἔτσι π. χ. τὸ πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν «1000 κεραμίδια στοιχίζουν 1200 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 350 ; » λύεται μὲ τὴν Ἰταλικὴν μέθοδον ὡς ἑξῆς :

Τὰ	1000 στοιχ.		1200 δρ.
Τὰ	250 »	1200 δρ. : 4 =	300 δρ.
Τὰ	100 »	1200 δρ. : 10 =	120 »
Τὰ	350 στοιχ.		420 δρ.

Ὁ λογιστικὸς Paricius ἐσυνόψισε τὴν Ἰταλικὴν μέθοδον εἰς ἐννέα κανόνας.

Ἀπὸ τοὺς χρόνους αὐτοὺς ἀρχίζουν νὰ συμπεριλαμβάνουν καὶ τὴν Ἀριθμητικὴν εἰς τὰ ἀπαραίτητα μαθήματα τοῦ δημοτικοῦ σχολείου. Ἔτσι «**ἡ Σχολικὴ Μέθοδος**», ἡ ὁποία εἶχε ἐκδοθῆ σύμφωνα μὲ τὴν διαταγὴν τοῦ πρίγκιπος τῆς Γόθας **Ἐρρίκου τοῦ εὐσεβοῦς**, ὁρίζει τὰ ἑξῆς: «Ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς πρέπε νὰ προχωρήσῃ τόσον εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς μεσαίας τάξεως, ὥστε νὰ μάθουν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐφόσον δὲ εἶναι δυνατόν, καὶ τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν. Τὸν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ τὸν μάθουν ἀπὸ στήθους, ἀναγινώσκοντες αὐτὸν κατ' ἐπανάληψιν εἰς τὴν ὥραν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας ἀπὸ τὸ ἀναγνωσματάριόν των, εἰς τὸ τέλος τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ εὑρίσκεται τυπωμένος. Εἰς δὲ τὴν ἀνώτερην τάξιν πρέπει νὰ προχωρήσῃ ἀκόμη περισσότερον ἡ ἄσκησις εἰς τὰς 4 θεμελιώδεις ἀριθμ. πράξεις ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ βιβλιαρίου τῆς Ἀριθμητικῆς, (τὸ ὁποῖον εἶχεν ἐκδοθῆ ἀπὸ τὸν *Reyer*, τὸν συντάκτην τῆς Σχολικῆς Μεθόδου,), προσέτι δὲ νὰ διδαχθῇ ἡ ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν καὶ τέλος, ἐφόσον εἶναι δυνατόν, καὶ τὰ κλάσματα· πρέπει δὲ ὁ διδάσκαλος ὄχι μόνον νὰ ἐξετάζῃ τὸν ἕνα παῖδα μετὰ τὸν ἄλλον εἰς τὸν πίνακα, ἀλλὰ καὶ νὰ ὑποδεικνύῃ εἰς αὐτοὺς μὲ διαφόρους προφορικὰς ἀσκήσεις τὸν λόγον τῆς τοιαύτης ἢ τοιαύτης λύσεως».

Ἀντιθέτως πρὸς τὸν μέχρι τοῦδε κρατοῦντα μηχανισμὸν **κατὰ τὸν 18 αἰῶνα** τονίζεται ἡ εἰδολογικὴ μορφωτικὴ ἀξία τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἡ γραμμικὴ ἀρίθμησις δὲν παρουσιάζεται πλέον εἰς τὰ διδακτικὰ βιβλία. Αἱ θεμελιώδεις πράξεις περιορίζονται εἰς τέσσαρας. Ὁ τρόπος τῆς ἀριθμήσεως λαμβάνει ὀλίγον κατ' ὀλίγον τὴν σημερινήν του μορφήν.

Ὅπως κατὰ τὸν 17 αἰῶνα ἐχρησιμοποιεῖτο ἰδιαιτέρως ἡ Ἰταλικὴ μέθοδος, τοιουτοτρόπως κατὰ τὸν 18 ἐγίνετο μεγάλη χρῆσις τῆς καλουμένης **Ρεσσείου μεθόδου** ἢ **μεθόδου τῆς ἀλύσεως**. Κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν περισσότερα τοῦ ἑνός, ἀλλὰ σχετικὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν συνενώνονται εἰς ἕνα πρόβλημα. Εἰς τὴν διάταξιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ὅλα τὰ μέλη του κατατάσσονται εἰς δύο καθέτους στήλας εἰς τρόπον, ὥστε εἰς μὲν τὴν ἀριστερὰν ἔρχονται ὅλοι οἱ διαιρέται, εἰς δὲ τὴν δεξιὰν ὅλοι οἱ διαιρετέοι. Εἰς τὴν πρώτην σειρὰν ἀναγράφεται δεξιὰ μὲν τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμή, ἀριστερὰ δὲ τὸ ζητούμενον. [Κάθε κατώτερη σειρὰ ἀρχίζει ἀπὸ ποσὸν ὁμοειδὲς μὲ ἐκεῖνο, μὲ τὸ ὁποῖον τελειώνει ἡ ἀμέσως προηγούμενη. Τὸ τελευταῖον μέλος τῆς τελευταίας σειρᾶς πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸ πρῶτον τῆς πρώτης σειρᾶς, ἤτοι μὲ τὸ ζητούμενον, διὰ νὰ κλείσῃ ἔτσι ἡ σχηματισθεῖσα ἅλυσις. Τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται, καθόσον διαιρεῖται τὸ γινόμενον τῶν δεξιὰ εὑρισκομένων ἀριθμῶν μὲ τὸ γινόμενον τῶν εὑρισκομένων ἀριστερά. Πρόβλημα λυόμενον κατὰ τὴν Ρ. μέθοδον εἶναι π. χ. τὸ ἑξῆς: Ἔχει κάποιος 250 φρ. καὶ θέλει νὰ τὰ μετατρέψῃ εἰς μάρκα, ὅταν τὸ μὲν ἕνα φράγκον ἀξίζῃ 2,70 δρ., τὸ δὲ 1 μάρκον 0,90 δρ. Πόσα μάρκα θὰ λάβῃ; Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμεν, ἡ διάταξις τοῦ προβλήματος θὰ ἔχῃ κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν ὡς ἑξῆς:

X μάρκα	250 φρ.
1 φρ.	270 λεπ.
90 λεπτ.	1 μάρκ.

θὰ ἀναγινώσκεται δὲ ἔτσι: Πόσα μάρκα εἶναι 250 φρ., ὅταν 1 φρ. εἶναι 270 λεπτ. καὶ 90 λεπτ. εἶναι 1 μάρκον;

Τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται μὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων: (250×270):90, εἶναι δὲ 750 μάρκα]. Ἡ μέθοδος τῆς ἁλύσεως ἐχρησιμοποιεῖτο καὶ παλαιότερον εἰς τὴν Γερμανίαν, ἔλαβε ὅμως κατὰ πρῶτον μεγαλύτερην διάδοσιν, ἀφότου εἰσήχθη εἰς αὐτὴν ἐκ νέου ἀπὸ τὴν Ὁλλανδίαν, ὅπου τὴν εἶχε διαδόσει ὁ *Kaspar Franz von Rees* (γεννηθεὶς τὸ 1690).

Ὁ σημαντικώτατος ἀντιπρόσωπος τῆς σχολικῆς Ἀριθμητικῆς κατὰ τὸν 18 αἰῶνα εἶναι ὁ *Christian Pescheck*, ὁ «Adam

Ries τοῦ 18 αἰῶνος». Ἐγεννήθηκε τὸ 1676 εἰς τὸ Zittau, ἐργάσθηκε δὲ εἰς τὸ Γυμνάσιον τῆς πόλεως αὐτῆς ὡς διδάσκαλος τῆς Ἀριθμητικῆς περισσότερα ἀπὸ 40 ἔτη. Ἔγραψε περισσότερα ἀπὸ 30 ἀριθμητικὰ βιβλία, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὴν «Θεμελιώδη κλεῖδα τῆς Ἀριθμητικῆς», ἡ ὁποία εἶναι τὸ πρῶτον μεθοδικὸν ἐγχειρίδιον τῆς Ἀριθμητικῆς. Μολονότι τὰ βιβλία τοῦ Pescheck [εἶχαν τὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὰς ἀτελείας, τὰς ὁποίας εἴδαμεν εἰς τὰ βιβλία τοῦ 17 αἰῶνος, ἰδίως δὲ τὸν φόρτον τῶν κανόνων καὶ τῆς ἐμμέτρου ἀριθμήσεως], τοὺς ἔλειπε δὲ καὶ κάθε βαθύτερον περιεχόμενον, ἐν τούτοις ἔτυχαν μεγάλης καὶ [μακροχρονίου] διαδόσεως, διότι [οἱ μὲν κανόνες των ἦσαν σαφεῖς καὶ εὔληπτοι,] τὰ δὲ προβλήματά των ἦσαν εὔκολα καὶ ἀπέβλεπαν εἰς τὴν πλήρωσιν τῶν συνήθων ἀναγκῶν τοῦ βίου, [περιεῖχαν δὲ καὶ σαφεῖς καὶ εὐλήπτους ὁδηγίας].

Ἡ ἀναγκαιότης **τῆς ἐποπτείας** εἶχε τονισθῇ ἀκόμη ἀπὸ τὸν Κομένιον. Ἐντελῶς ὅμως ἰδιαίτερην σημασίαν ἀπέδωκεν εἰς αὐτὴν ὁ καθηγητὴς τοῦ Φιλανθρωπείου τῆς Δεσσαυΐας *Trapp* (1754—1818). Ὁ Τ. ἀπαιτεῖ τὴν χρησιμοποίησιν καρύων καὶ ἄλλων μέσων τῆς ἐποπτείας. «Διὰ νὰ σχηματίζουν οἱ μαθηταὶ ὀρθὰς ἐννοίας τῶν μονάδων καὶ τῶν δεκάδων, σκόπιμον εἶναι νὰ κατασκευάζωνται κιβωτίδια· εἰς τὸ διαχώρισμα τῶν μονάδων θὰ ὑπάρχουν μικρότατα τετραγωνίδια, 9 τὸ ὅλον, τὸ καθένα μὲ μίαν στιγμήν· εἰς τὸ διαχώρισμα τῶν δεκάδων θὰ ὑπάρχουν μεγαλύτερα τετράγωνα, τὸ καθένα μὲ 10 στιγμὰς κ.τ.λ.». Ὁ *Busse* (1756—1836), ὁ διαδεχθεὶς τὸν Trapp, αἰσθητοποιεῖ τοὺς ἀριθμοὺς μὲ στιγμάς, γενόμενος ἔτσι ὁ εἰσηγητὴς **τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν**. Αὐτὸς ἐδημοσίευσε καὶ τὸ κάλλιστον μεθοδικὸν ἐγχειρίδιον τῶν χρόνων του. Οἱ Φιλανθρωπικοὶ ἐπεδίωκαν μὲ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν προπάντων τὴν μόρφωσιν τοῦ νοῦ. Ἡ διδασκαλία ἀρχίζε μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν ἀντικειμένων τῆς ἐποπτείας. Ἐσχηματίζοντο σειραί. Κατὰ τὴν ἐκλογὴν τῆς ὕλης ἐλαμβάνοντο ὑπ' ὄψει αἱ ἀντιληπτικαὶ δυνάμεις τῶν μαθητῶν. Ἐδίδετο δὲ πολλὴ σημασία εἰς τὴν κατανόησιν τῶν λύσεων. Ἀλλὰ καὶ ὁ *Rochow* (1734—1805) εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν τῶν ἀγροτικῶν του σχολείων ἔστρεφε ἰδιαιτέρως τὴν προσοχήν του εἰς τὴν αἰσθητοποίησιν. Ὡς μέσα της δὲ ἐχρησιμοποιοῦσε τὰ δάκτυλα τῆς μιᾶς χειρὸς ἢ καὶ τῶν δύο, τὰ δάκτυλα ὅλων τῶν μαθητῶν ἑνὸς θρανίου, τὰ κομβία τῶν ἐνδυμάτων, τὰς ὑάλους τῶν παραθύρων, καθὼς καὶ γραμμὰς εἰς τὸν πίνακα. Ἐπροχώρει πρὸς τὰ ἐμπρὸς βαθμιαίως. Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις ἐδιδάσκοντο ἐκ παραλλήλου. Εἰς τὰ προβλήματα ἐλαμβάνοντο ὑπ' ὄψιν αἱ σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου.

Κατὰ τὸν Berthold Hartmann (Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule vom Standpunkte des erziehenden Unterrichts, 4 ἐκδ., Leipzig-Frankfurt a. M., Kesselring, 1913, σ. 52) αἱ μεθοδικαὶ πρόοδοι τοῦ 18 αἰῶνος εἶναι ἐν συνόψει αἱ ἑξῆς:

α) Κατὰ τὴν ἐκλογὴν τῆς ὕλης λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ ἀντιληπτικαὶ δυνάμεις τῶν μαθητῶν.

β) Ἐπιδιώκεται ἡ κατανόησις.

γ) Ἡ πρόοδος γίνεται βαθμιαία.

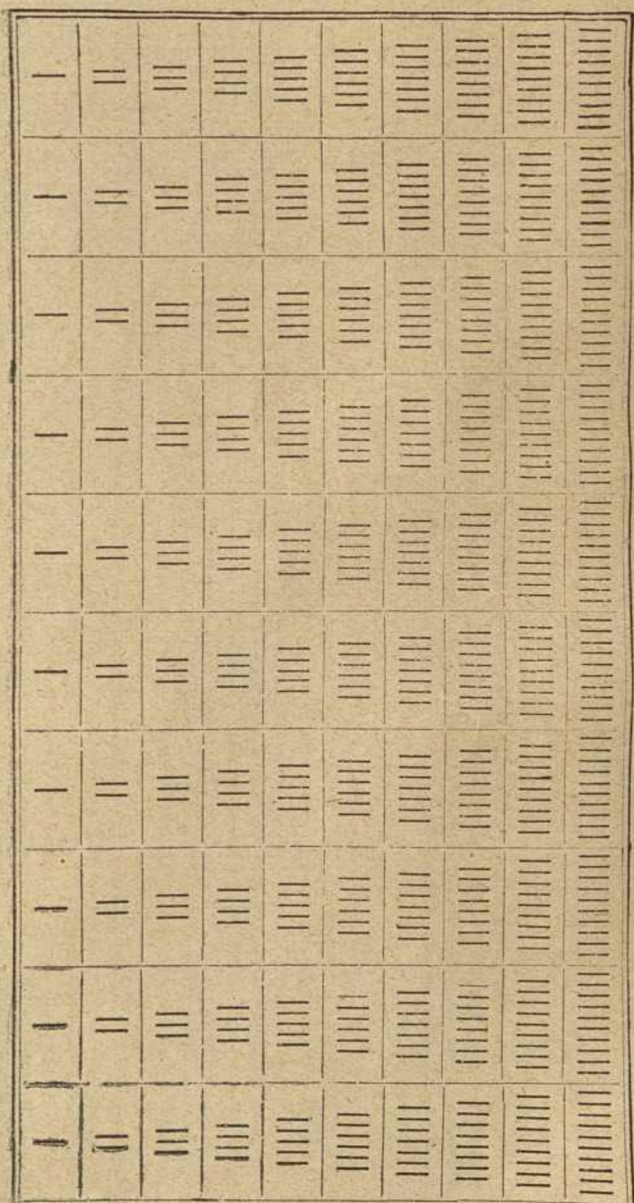
δ) Ἡ διδασκαλία βασίζεται εἰς τὴν αἰσθητοποίησιν.

ε) Γίνεται ἄσκησις οὐ μόνον εἰς τὴν γραπτήν, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν.

Ὁ ***Πεσταλότσης*** ἤσκησε σημαντικὴν ἐπίδρασιν εἰς τὴν διαρρύθμισιν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας. Βλέπων, ὅτι εἰς τὴν διδασκαλίαν αὐτὴν ἦσαν ἀπαραίτηται πολλαὶ καὶ ῥιζικαὶ πρακτικαὶ μεταρρυθμίσεις, ἐσκέφθηκε, ὅτι, πρὶν προβῇ εἰς αὐτάς, ἔπρεπε πρῶτα νὰ τὰς στηρίξῃ ἐπάνω εἰς ἀσφαλεῖς θεωρητικὰς ἀρχάς. Ἔπρεπε πρῶτα νὰ ὁρίσῃ ***σκοπὸν*** εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν]. Φυσικὰ δὲ σκοπός της δὲν ἠμποροῦσε κατὰ τὸν Π. νὰ εἶναι ἄλλος παρὰ ὁ σκοπὸς τῆς ὅλης παιδαγωγούσης διδασκαλίας, ὁ ὁποῖος ἐσυνίστατο κατὰ τὸν Π. εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν πνευματικῶν δυνάμεων τῶν παίδων, ἤτοι εἰς ***τὴν εἰδολογικὴν μόρφωσίν των***. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἠμπορέσῃ ἡ ἀριθμητ. διδασκαλία νὰ ἐκπληρώσῃ τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἔπρεπε κατόπιν νὰ στηριχθῇ ἐπάνω εἰς μίαν στερεὰν ***βάσιν***. Τέτοια ὅμως βάσις ἦτο κατὰ τὸν Π. δι' ὅλην τὴν παιδαγωγοῦσαν διδασκαλίαν ***ἡ ἐποπτεία***. Μόνον εἰς τὴν βάσιν αὐτὴν στηριζομένη ἡ παιδαγ. διδασκαλία ἠμπορεῖ καὶ ὀφείλει νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀνωτέρων νοητικῶν πλασμάτων, καὶ ἰδίως τῶν ἐννοιῶν, καὶ ἔτσι νὰ ἐκπληρώσῃ τὸν εἰδολογικὸν σκοπόν της. Καὶ ἡ ἀριθμητικὴ λοιπὸν δι-

δασκαλία πρέπει νὰ στηριχθῇ κατὰ τὸν Π. εἰς τὴν ἴδιαν βάσιν, εἰς τὴν ἐποπτείαν. [Στηριζομένη εἰς τὴν βάσιν αὐτὴν ἠμπορεῖ νὰ συντελέσῃ κάλλιστα εἰς τὴν πλήρωσιν τοῦ εἰδολογικοῦ σκοποῦ τῆς διδασκαλίας τόσον μᾶλλον, καθόσον παρουσιάζει εἰς τοὺς παῖδας τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι μαζὶ μὲ τὴν λέξιν (τὸ ὄνομα) καὶ τὴν μορφὴν ἀποτελοῦν τὰ τρία θεμελιώδη μέσα τῆς αἰσθητοποιήσεως τῶν ἐννοιῶν. Καθόσον δὲ μάλιστα ὁ ἀριθμὸς ὁδηγεῖ εἰς ἀσφαλῆ πορίσματα, ἐνῷ ἡ λέξις καὶ ἡ μορφὴ ἐγκλείουν συχνὰ τὸ σπέρμα τῆς πλάνης, ἐξάγει ὁ Π. τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἐκπληρώνει καλύτερα ἀπὸ κάθε ἄλλο μάθημα τὸν εἰδολογικὸν σκοπὸν τῆς παιδαγωγούσης διδασκαλίας, εἶναι τὸ σπουδαιότατον μέσον τῆς εἰδολογικῆς μορφώσεως τῶν παίδων, εἶναι αὐτόχρημα ἡ πανάκεια τῆς μορφώσεως. Τέλος ἀντιλαμβάνεται ὁ Π., ὅτι διὰ νὰ ἠμπορέσῃ ἡ ἀριθμ. διδασκαλία νὰ ἐκπληρώσῃ τὸν σκοπόν της, δὲν ἀρκεῖ μόνον νὰ στηρίζεται ἐπάνω εἰς μίαν ἀσφαλῆ βάσιν, ἀλλὰ πρέπει καὶ νὰ ἀκολουθῇ μίαν ὀρθὴν ***πορείαν***]. Ὀρθὴ δὲ εἶναι κατὰ τὸν Π. ἡ διδακτικὴ πορεία της, ἂν βασίζεται ἐπάνω εἰς τὴν ἀρχὴν ***τῆς ἄνευ χασμάτων, τῆς ἀδιασπάστου προόδου***. [Αὐταὶ εἶναι αἱ θεωρητικαὶ ἀρχαί, ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας ἐστήριξεν ὁ Π. τὰς πρακτικάς του μεταρρυθμίσεις εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὰς μεταρρυθμίσεις αὐτάς.

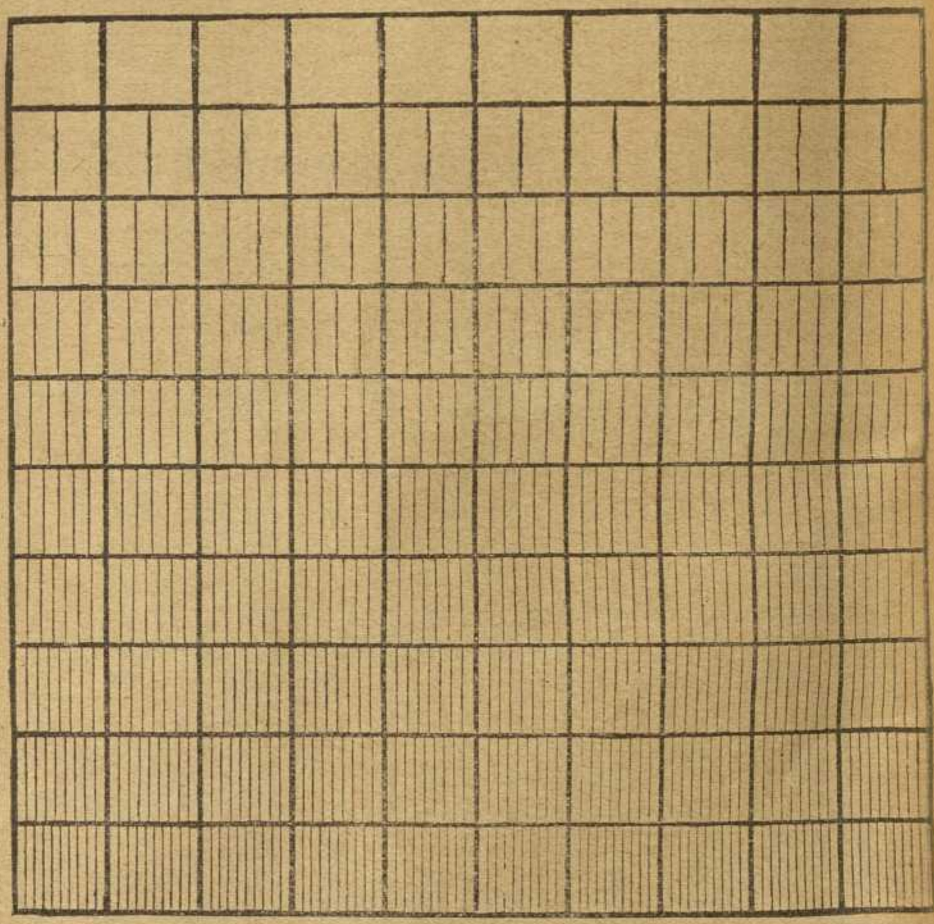
Ἐν πρώτοις ὁ Πεσταλότσης ἔκαμε τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν ἀπὸ ἀτομικὴν ***διδασκαλίαν τάξεως]***. Ἔπειτα τὴν ἄρχιζε ὄχι ἀπὸ τὴν μεσαίαν βαθμίδα, ὅπως ἔκαμναν μέχρι τοῦδε, ἀλλὰ ἀπὸ αὐτὴν ***τὴν κατωτάτην τάξιν*** τοῦ δημοτ. σχολείου. Ἐγίνετο δὲ ἡ ἔναρξις τῆς διδασκαλίας μὲ τὴν ἐποπτικὴν παρατήρησιν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχέσεών των. Οἱ μαθηταὶ ἔπρεπε νὰ μάθουν νὰ ἀριθμοῦν παρατηροῦντες πραγματικὰ ἀντικείμενα, καθὼς τὰ δάκτυλα, πίσα, λιθάρια κ. τ. λ. Ἀλλ' ὁ Πεσταλότσης ἀπαιτοῦσε τὴν ἐποπτείαν ὄχι μόνον κατὰ τὴν ἔναρξιν, ἀλλὰ καὶ κατὰ τὴν πρόοδον τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας. Ὡς ἐποπτικὴν βάσιν τῆς κατόπιν διδασκαλίας ἐχρησιμοποιοῦσε εἰδικοὺς ἀριθμητικοὺς πίνακας, ἤτοι τὸν καλούμενον πίνακα τῶν μονάδων καὶ τοὺς τρεῖς πίνακας τῶν κλασμάτων (ἕνα μὲ γραμμὰς καὶ δύο μὲ τετράγωνα). Ὁ ***πίναξ τῶν μονάδων*** εἶναι [(ἴδ. εἰκ. ὑπ' ἀρ. 4)] ἕνα μέγα ὀρθο-



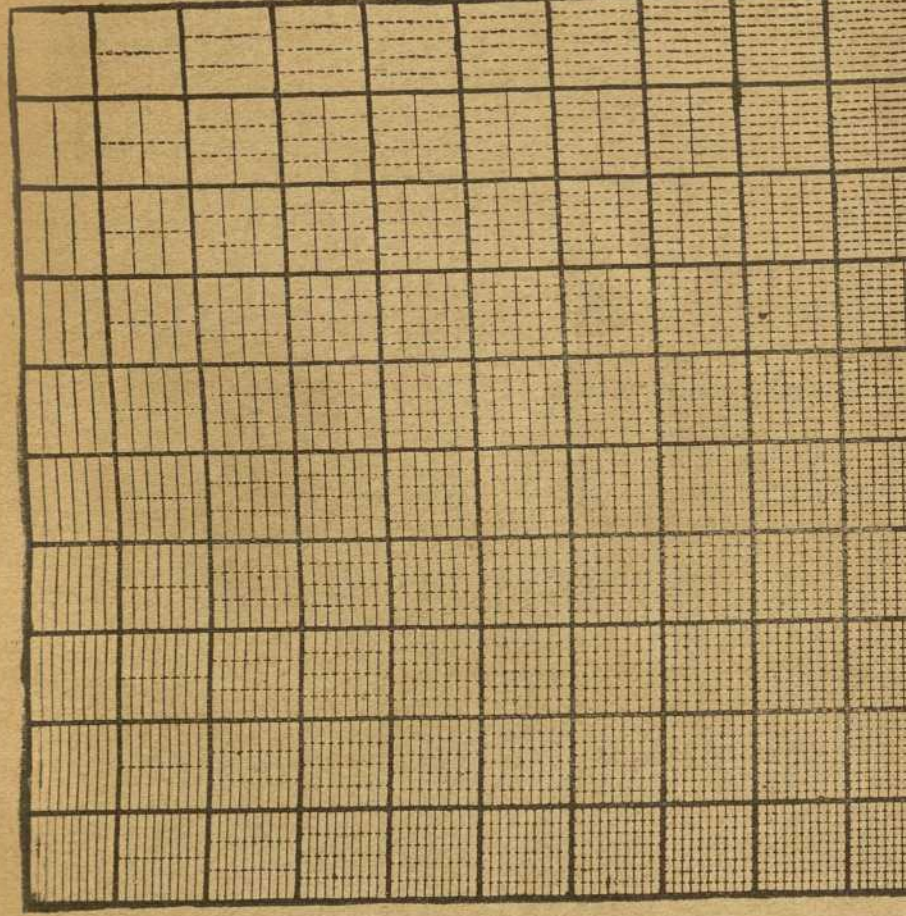
Εἰκ. 4. Ὁ πίναξ τῶν μονάδων τοῦ Πεσταλότση.

γώνιον, τὸ ὁποῖον τέμνεται κατὰ μῆκος μὲ ἐννέα παραλλήλους εὐθείας εἰς 10 παράλληλα ὀρθογώνια. Τὸ καθὲν τώρα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ χωρίζεται εἰς 10 μικρὰ ὀρθογώνια. Τὰ 10 μικρὰ ὀρθογώνια τῆς πρώτης σειρᾶς περιέχουν ἀπὸ μίαν γραμμήν, τὰ 10 τῆς δεύτερης ἀπὸ δύο, τὰ 10 τῆς τρίτης ἀπὸ τρεῖς καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ κλάσματα, καθὼς εἴπαμεν, ἐδιδάσκοντο ἐπὶ τῇ βάσει τῶν 3 πινάκων τῶν κλασμάτων. Ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτούς, ***ὁ πίναξ τῶν γραμμῶν***, περιλαμβάνει 36 ζεύγη γραμμῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι μὲν ἰσομήκη, ἀλλ' ἔχουν διαιρεθῆ διαφορετικά. Ὁ καθένας τώρα ἀπὸ τοὺς δύο ἄλλους πίνακας, τοὺς λεγομένους ***πίνακας τῶν τετραγώνων***, διαιρεῖται εἰς δέκα παράλληλα ὀρθογώνια, τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα διαιρεῖται πάλιν εἰς δέκα μικρὰ τετράγωνα. Εἰς τὸν πρῶτον ἀπὸ τοὺς πίνακας αὐτοὺς [(ἴδ. εἰκ. ὑπ' ἀρ. 5)] τὰ μὲν τετράγωνα τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι ἀδιαίρετα, τὰ δὲ τετράγωνα τῆς δεύτερης σειρᾶς διαιροῦνται μὲ μίαν κάθετον γραμμὴν εἰς δύο ἴσα μέρη (δύο δεύτερα), τὰ δὲ τετράγωνα τῆς τρίτης σειρᾶς διαιροῦνται μὲ δύο καθέτους γραμμὰς εἰς τρία ἴσα μέρη (τρία τρίτα) κ. οὕτ. καθ. [Τὸν δεύτερον ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν τετραγώνων ἠμπορεῖ νὰ ἴδῃ εἰς ὅλας του τὰς λεπτομερείας ὁ ἀναγνώστης εἰς τὴν παραθετομένην εἰκόνα ὑπ' ἀρ. 6]. Μὲ τοὺς πίνακας αὐτοὺς τῶν κλασμάτων αἰσθητοποιεῖ ὁ Πεσταλότσης ὅλα τὰ κλάσματα ἀπὸ τὰ δεύτερα ἕως τὰ δέκατα, καθὼς καὶ τὰ γινόμενα τὰ προκύπτοντα ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμόν των μὲ τὸ 2, 3, 4 κ. τ. λ. Διεξοδικὴν κρίσιν διὰ τοὺς πίνακας τοῦ Πεσταλότση, μὲ τοὺς ὁποίους ὁ μέγας Παιδαγωγικὸς παρουσιάζεται ὡς ἕνας ἀπὸ τοὺς προδρόμους ***τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν***, ἴδε παρὰ Meumann (Experimentelle Pädagogik, τ. 3 σ. 627 κ. ἀκ.).

Αἱ ἀσκήσεις τώρα, αἱ ὁποῖαι ἔπρεπε νὰ γίνωνται ἐπάνω εἰς τοὺς ἀνωτέρω πίνακας, περιλαμβάνονται εἰς τὰ 3 τεύχη τῆς «Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse», ἡ ὁποία ἐδημοσιεύθηκε τὸ 1803 ἀπὸ τὸν μαθητὴν τοῦ Πεσταλότση Krüsi. Τὸ πρῶτον τεῦχος, τὸ ὁποῖον περιέχει ὀκτὼ σειρὰς ἀσκήσεων, προσαρμόζεται εἰς τὸν πίνακα τῶν μονάδων, τὸ δὲ δεύτερον καὶ τρίτον εἰς τοὺς πίνακας τῶν κλασμάτων. Εἰς τὰ 3 αὐτὰ τεύχη περιλαμβάνεται ἀπιστεύτως μέγας ἀριθμὸς ἀσκήσεων, αἱ ὁποῖαι ἔπρεπε νὰ λυθοῦν ὅλαι ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Μόνον ἡ τρίτη σειρὰ



Εἰκ. 5. Ὁ πρῶτος ἐκ τετραγώνων πίναξ τῶν κλασμάτων τοῦ Πεσταλότση.



Εἰκ. 6. Ὁ δεύτερος ἐκ τετραγώνων πίναξ τῶν κλασμάτων τοῦ Πεσταλότση.

τῶν ἀσκήσεων τοῦ 2 τεύχους περιέχει 17000 ἀσκήσεις! Τὸ μεγάλον αὐτὸ ἄτοπον ἐχρεωστεῖτο εἰς τὴν ἐντελῶς ἐσφαλμένην ἐφαρμογὴν τῆς ἀρχῆς τῆς ἄνευ χασμάτων καὶ ἀδιασπάστου προόδου τῆς διδασκαλίας. Ἄλλα ἄτοπα τῶν ἀσκήσεων αὐτῶν εἶναι, ὅτι αἱ πλεῖσται εἶναι μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς καὶ πολυπλοκώταται, [ἄτοπα χρεωστούμενα εἰς τὴν ἐσφαλμένην ἀντίληψιν τοῦ Π., ὅτι μὲ τέτοιας ἀσκήσεις ἠμπορεῖ νὰ ἐκπληρώνεται καλύτερα ὁ εἰδολογικὸς σκοπὸς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας]. Ἔτσι ζητεῖται ἀπὸ τοὺς μαθητὰς ἡ λύσις ἀσκήσεων, ὁποῖαι εἶναι αἱ ἑξῆς: πόσας φορὰς τὰ $5\frac{3}{4}$ ἐμπεριέχονται εἰς τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου 3 φορὰς τὸ 4ον μέρος εἶναι τὰ $6\frac{3}{5}$; — Τὸ 4πλάσιον τοῦ 5ου ἑνὸς ἀγνώστου ἀριθμοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ 6πλάσιον τοῦ 7ου τοῦ 4πλασίου τοῦ 5ου μέρους τοῦ 70. Ποῖος εἶναι ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς καὶ πόσας φορὰς τὰ $\frac{11}{12}$ αὐτοῦ περιέχουν τὸ ἥμισυ τοῦ 12; κ. τ. λ. [Ἡ ἀπόκρισις εἰς τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω προβλήματα εἶναι: ἐμπεριέχονται 1 φορὰν καὶ $\frac{61}{115}$ τῆς φορᾶς. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρουν οἱ μαθηταὶ τὴν ἀπόκρισιν αὐτὴν ἔπρεπε νὰ κάμουν τὰς ἑξῆς σκέψεις: 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει $\frac{5}{5}$. 6 ἀκέραιαι μονάδες ἔχουν 6 φορὰς $\frac{5}{5}$. 6 φορὰς τὰ $\frac{5}{5}$ εἶναι $\frac{30}{5}$. $\frac{30}{5}$ καὶ $\frac{3}{5}$ κάμνουν $\frac{33}{5}$. Τὰ $\frac{33}{5}$ εἶναι 3 φορὰς $\frac{11}{5}$. 3 φορὰς τὰ $\frac{11}{5}$ εἶναι 3 φορὰς τὸ 4ον μέρος τοῦ τετραπλασίου τῶν $\frac{11}{5}$. Τὸ τετραπλάσιο τῶν $\frac{11}{5}$ εἶναι $\frac{44}{5}$. Τὰ $6\frac{3}{5}$ εἶναι λοιπὸν 3 φορὰς τὸ 4ον μέρος τῶν $\frac{44}{5}$. Πόσας φορὰς τώρα ἐμπεριέχονται τὰ $5\frac{3}{4}$ εἰς τὰ $\frac{44}{5}$; Τὰ πέμπτα καὶ τὰ τέταρτα γίνονται ὁμώνυμα τρεπόμενα εἰς εἰκοστά. $\frac{1}{5}$ ἔχει $\frac{4}{20}$. Τὰ $\frac{44}{5}$ ἔχουν $\frac{176}{20}$. 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει $\frac{4}{4}$. 5 ἀκέραιαι μονάδες καὶ $\frac{3}{4}$ ἔχουν $\frac{23}{4}$. $\frac{1}{4}$ ἔχει $\frac{5}{20}$. $\frac{23}{4}$ ἔχουν $\frac{115}{20}$. Τὰ $\frac{115}{20}$ ἐμπεριέχονται εἰς τὰ $\frac{176}{20}$ 1 φορὰν καὶ $\frac{61}{115}$ τῆς φορᾶς]. Δὲν πρέπει

τώρα νὰ λησμονηθῇ, ὅτι ὁ Π. παραλείπει ὅλως διόλου τὰς ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως καὶ παραμελεῖ τὰς ἀσκήσεις τῆς διαιρέσεως, τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν καὶ τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα. Σχετικὰ μὲ τὴν παραμέλησιν τῶν τελευταίων ὀφείλομεν νὰ ἀναφέρωμεν, ὅτι εἶναι μὲν ἀληθές, ὅτι ὁ Πεσταλότσης πολλὰς φορὰς τονίζει τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ ἀριθμητικὴ δεξιότης διὰ τὴν οἰκονομικὴν πρόοδον, εἰς τὴν ἀριθμητικήν του ὅμως διδασκαλίαν ἐλάχιστα ἔλαβεν ὑπ᾽ ὄψιν τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου. Δι᾽ αὐτὸ δὲ γράφει καὶ ὁ Gruner (Praktischer Erzieher, Briefe aus Burgdorf κ. τ. λ., σ. 191): «Γνωρίζεις τώρα πλέον ἀρκετὰ τὴν μέθοδον τοῦ Πεσταλότση, διὰ νὰ κρίνῃς, ὅτι, ἂν θεωρηθῇ ὡς κύριος σκοπός της ἡ προετοιμασία τῶν μαθητῶν διὰ τὰς ἀριθμητικὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου, ἡ περὶ αὐτῆς γνώμη θὰ εἶναι πολὺ ταπεινὴ καὶ ἀναξία της». [Τέλος δὲν πρέπει νὰ λησμονηθῇ, ὅτι αἱ μέχρι καὶ τῶν τελευταίων λεπτομερειῶν φθάνουσαι μεθοδικαὶ ὁδηγίαι τοῦ Π. ἔτειναν νὰ καταστήσουν ἐντελῶς περιττὸν τὸν διδάσκαλον καὶ νὰ ἀφήσουν ἀχρησιμοποιήτους καὶ τὰς γνώσεις του καὶ τὴν διδακτικήν του δεξιότητα.

Εἶναι τώρα προφανές, ὅτι αἱ ἀριθμητικαὶ ἀσκήσεις τοῦ Π. δι᾽ ὅλα τὰ ἀνωτέρω μειονεκτήματά των καὶ τὴν πνευματικὴν ἐξάντλησιν τῶν μαθητῶν ἐπροκαλοῦσαν καὶ τὴν πρόοδον τῆς διδασκαλίας ἐμπόδιζαν, δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ ἐσυντελοῦσαν εἰς τὴν κατάπνιξιν τοῦ ἀριθμητικοῦ των διαφέροντος. Τὴν ὀρθότητα δὲ τοῦ συμπεράσματος αὐτοῦ δὲν αἴρουν βέβαια μαρτυρίαι, ὅπως τοῦ Gruner καὶ τοῦ Türk], οἱ ὁποῖοι ἀναφέρουν διὰ τοὺς μαθητὰς τοῦ Πεσταλοτσιανοῦ σχολείου τῆς München Buchsee, ὅτι ἔλυαν γρηγορώτατα δύσκολα καὶ περίπλοκα προβλήματα. Δὲν εἶναι περίεργον, ὅτι ἠμποροῦσαν νὰ φθάσουν εἰς τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ἐπάνω εἰς ἀσκήσεις τοῦ Πεσταλοτσιανοῦ τύπου μαθηταί, ἀσχολούμενοι μὲ τέτοιας ἀσκήσεις δύο συνεχεῖς ὥρας κάθε ἡμέραν ἐπὶ 6 ἔτη καὶ μὴ προχωροῦντες εἰς νέον εἶδος ἀσκήσεως, πρὶν ἀσκηθοῦν ἐντελῶς εἰς τὸ ἑκάστοτε διδασκόμενον. Δὲν πρέπει ἄλλωστε νὰ παροραθοῦν καὶ αἱ ἐναντίαι μαρτυρίαι περὶ τῶν ἀποτελεσμάτων, τὰ ὁποῖα εἶχεν ἡ ἀριθμητικὴ μέθοδος τοῦ Πεσταλότση. Τοιουτοτρόπως π. χ. ὁ Soyaux λέγει, ὅτι τὰ ἐκθειαζόμενα καλὰ ἀποτελέσματα ἐκατορθώνοντο ἀπὸ τοὺς μαθητὰς μόνον, ἐφόσον ἐβοηθοῦντο ἀπὸ τοὺς πίνακας τῆς ἐποπτείας, ὁ δὲ I. F. Schmidt ἀναφέρει, ὅτι ἡ λύσις καὶ ἑνὸς ἁπλοῦ προβλήματος τῆς προσθέσεως ἔφερεν εἰς δυσκολίας τοὺς μαθητὰς αὐτούς, οἱ ὁποῖοι ἄλλως ἦσαν τόσον ἐντριβεῖς εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Συνοψίζοντες τὰ περὶ τοῦ Πεσταλότση λεχθέντα παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μὲν θεωρητικαί του ἀρχαί, αἱ ἀφορῶσαι τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν, (ἰδίως δὲ ἡ ἀρχή, ὅτι καὶ ἡ ἀριθμ. διδασκαλία πρέπει νὰ συντελῇ εἰς τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ σκοποῦ τῆς ὅλης διδασκαλίας, ἀδιάφορον ποῖος εἶναι αὐτός, καθὼς καὶ ἡ ἀρχή, ὅτι καὶ ἡ ἀριθμ. διδασκαλία πρέπει νὰ βασίζεται ἐπὶ τῆς ἐποπτείας) ἦσαν πολλοῦ λόγου ἄξιαι καὶ δι' αὐτὸ ἀπέκτησαν μεγάλην σημασίαν, ἡ ἐφαρμογή των ὅμως εἰς τὴν πρᾶξιν—ὅπως ἄλλωστε συνέβηκε μὲ τὸν Πεσταλότσην καὶ εἰς ἄλλα μαθήματα—ἦτο κατὰ μέγιστον μέρος ἀτυχής, δι' αὐτὸ δὲ καὶ γρήγορα ἐγκαταλείφθηκε.

Ὁ Πεσταλότσης εὗρεν ὀπαδούς. Τέτοιοι «φορεῖς καὶ καλλιεργηταὶ τῶν ἀριθμητικῶν ἰδεῶν τοῦ Πεσταλότση» ὑπῆρξαν π. χ. οἱ Pöhlmann, Tillich, Rebs, J. Schmid, v. Türk καὶ Kawerau. Εἶναι ἀληθές, ὅτι οἱ ἄνδρες αὐτοὶ ἐπεριόρισαν τὸ μονότονον ὑλικὸν τῶν ἀσκήσεων, τῶν στηριζομένων εἰς τοὺς πίνακας τοῦ Πεσταλότση, καὶ ἔλαβαν κάπως ὑπ' ὄψει καὶ τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου· ἐν τούτοις ἔμειναν πιστοὶ εἰς τὸν εἰδολογικὸν σκοπὸν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, τὸν ὁποῖον ἔθεσεν ὁ Πεσταλότσης, καθὼς καὶ εἰς τὴν ἀρχήν του τῆς ἐποπτείας. Ὁ ὀξυνούστερος μεταξὺ αὐτῶν Μεθοδικὸς ὑπῆρξεν ὁ *Tillich*. Τὸν σκοπὸν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας ἐσυνόψισε ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦ Πεσταλότση εἰς τὴν γνωστὴν φράσιν του, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν «ἡ διδασκαλία αὐτὴ ἔργον ἔχει νὰ διδάξῃ τοὺς μαθητὰς νὰ ἀριθμοῦν νοοῦντες καὶ νὰ νοοῦν ἀριθμοῦντες». Ὁ Sterner ὀνομάζει τὸ ἔργον τοῦ Tillich «Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik» μεγαλοπράγμονα Μεθοδικὴν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, ὁποίαν δὲν ἔχουν νὰ ἐπιδείξουν οἱ προηγούμενοι χρόνοι. [Ὁ Tillich λαμβάνει περισσότερον ἀπὸ τὸν Π. ὑπ' ὄψει τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου. Ἐπειδὴ δὲ εἶχε τὴν ὀρθὴν γνώμην, ὅτι οἱ μαθηταὶ

πρέπει προπάντων νὰ σχηματίσουν ἐσωτερικὴν ἐποπτείαν ***τῆς τάξεως τῶν ἀριθμῶν***, ἔστρεψεν ἰδίως τὴν προσοχήν του εἰς ***τὴν πρώτην δεκάδα***, τὴν ὁποίαν καὶ ἔκαμε ***βάσιν*** ὅλης τῆς κατόπιν ἀριθμήσεως. Εἶναι δὲ ἀκόμη ἄξιον σημειώσεως, ὅτι ὁ Tillich θεωρεῖ ὀρθότατα ὡς θεμελιώδη ἄσκησιν πρὸς σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν ***τὴν ἀπαρίθμησιν ὁμοειδῶν ἀντικειμένων*** καὶ ὅτι ἐπεξεργάζεται τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις τῆς ἀριθμήσεως ὄχι ἐφάπαξ καὶ ἐπαλλήλως, ἀλλὰ ἐπάνω εἰς ὡρισμένην ἑκάστοτε σειρὰν ἀριθμῶν καὶ παραλλήλως (ἴδ. καὶ *Büttner*, ὅπ. ἀν., σελ. 62 καὶ *Hartmann*, ὅπ. ἀν., σ. 63 κ. ἀκ.).]. Ὁ Tillich λησμονηθεὶς ἐν τῷ μεταξὺ ἔγινε πάλιν γνωστὸς κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους ἰδίως ἀπὸ τὸ ἀριθμητικόν του κιβώτιον, τοῦ ὁποίου γίνεται σήμερον πολὺ μεγάλη χρῆσις καὶ διὰ τὸ ὁποῖον θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον «περὶ τῶν μέσων τῆς ἐποπτείας καὶ τῆς ἀσκήσεως». [Ἀπὸ τοὺς ἄλλους ὀπαδοὺς τοῦ Πεσταλότση ἄξιος ἰδιαιτέρας μνείας εἶναι ὁ συνεργάτης του *Joseph Schmid*, ὁ ὁποῖος ἀπέδιδε μέν, ὅπως ὁ Π., μεγάλην σημασίαν εἰς τὴν αἰσθητοποίησιν, ἐφρόνει ὅμως, ὅτι διὰ νὰ σχηματίζουν οἱ μαθηταὶ σαφεῖς ἐποπτείας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, δὲν πρέπει νὰ χρησιμοποιοῦν ***τοὺς ἑτοίμους πίνακας*** τοῦ Πεσταλότση, ἀλλὰ γραμμάς, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ γράφουν οἱ ἴδιοι εἰς τὸν πίνακα καὶ τὰ ἀβάκιά των, καὶ ὅτι, ἀφοῦ πλέον σχηματίσουν οἱ μαθηταὶ τὰς ἐποπτείας αὐτάς, πρέπει νὰ παύσῃ ἡ αἰσθητοποίησις καὶ νὰ χρησιμοποιοῦνται μόνον τὰ ἀριθμητικὰ ψηφία. Ἐπίσης ἄξιος μνείας εἶναι καὶ ὁ Πρῶσσος σχολικὸς σύμβουλος *Kawerau*, ὁ ὁποῖος τονίζει (εἰς τὸ ἔργον του: Leitfaden für den Rechenunterricht nach Pestalozzischen Grundsätzen, 1818), ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἐκτὸς τοῦ εἰδολογικοῦ σκοποῦ, τὸν ὁποῖον ἐπιδιώκει, ὀφείλει νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν καὶ τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου].

Ἀντίπαλοι τῶν ἀριθμητικῶν ἀρχῶν τοῦ Πεσταλότση ὑπῆρξαν οἱ Hoffmann, Stephani, Graser, Dinter, Zerrenner, Niemeyer καὶ ἄλλοι. Ὅλοι αὐτοὶ καταπολεμοῦν καὶ τὴν διδακτικὴν πορείαν τοῦ Πεσταλότση καὶ τὸν ὑπ' αὐτοῦ τονισθέντα καθαρῶς εἰδολογικὸν σκοπὸν τῆς διδασκαλίας τῆς Ἀριθμητικῆς.

Αἱ δύο μεγάλαι ἀντιθέσεις μεταξὺ τῶν ἀνδρῶν αὐτῶν καὶ τοῦ Π. ἦσαν αἱ ἑξῆς:

Ὁ μὲν Πεσταλότσης καὶ οἱ ὀπαδοί του ἐζητοῦσαν ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν νὰ ἀναπτύσσῃ τὰς πνευματικὰς δυνάμεις τῶν παίδων μὲ τὴν *λύσιν ἀσκήσεων* ἐπάνω εἰς ἀφῃρημένους ἀριθμούς.

Οἱ δὲ μὴ ἀκολουθοῦντες τὸν Π. ἀπαιτοῦσαν ἀπεναντίας ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν νὰ προπαρασκευάζῃ τοὺς παῖδας εἰς τὸν πρακτικὸν βίον μὲ τὴν *λύσιν* συγκεκριμένων καὶ εἰς τὸν βίον αὐτὸν ἀναφερομένων προβλημάτων.

Ἀλλ' ὑπῆρχαν ἀκόμη μεταξὺ τῶν δύο μερίδων καὶ ἄλλα ἐπίμαχα ζητήματα, ὅπως τὰ ἑξῆς:

α) Τὸ ζήτημα τοῦ τρόπου τῆς αἰσθητοποιήσεως.

β) Τὸ ζήτημα τῆς ἐκτάσεως τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν βαθμίδων ἢ σειρῶν (π. χ. 1—10 ἢ 1—20 κ.τ.λ.).

γ) Τὸ ζήτημα τοῦ χρόνου τῆς εἰσαγωγῆς καὶ τῆς χρήσεως τῶν ἀριθμητικῶν ψηφίων.

δ) Τὸ ζήτημα τοῦ χρόνου τῆς ἐνάρξεως καὶ τῆς ἐκτάσεως τῆς διδασκαλίας τῶν κλασμάτων.

ε) Τὸ ζήτημα τῆς σχέσεως, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῆς ἀπὸ μνήμης καὶ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως.

ς) Τὸ ζήτημα τῆς σχέσεως, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῆς ἀριθμήσεως μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς καὶ τῆς ἀριθμήσεως μὲ ἐφηρμοσμένα προβλήματα.

Ὁ ἀγὼν ἐπάνω εἰς τὰ ζητήματα αὐτὰ ἐκράτησε μὲ σφοδρότητα ἕως τὸ τέλος περίπου τῆς 2 δεκαετηρίδος τοῦ παρελθόντος αἰῶνος. Τὴν ἐξομάλυνσιν δὲ τῶν σχετικῶν ἀντιθέσεων ἐπεδίωξαν καὶ ἐπέτυχαν εἰς τὰ κύρια τοὐλάχιστον σημεῖα κυρίως ὁ Harnisch, ὁ Diesterweg καὶ ὁ Hentschel.

Ὁ *Harnisch* ἐδημοσίευσε τὸ 1814 εἰς τὸν «Schulrat an der Oder» τὴν ἐργασίαν του «Leitfaden bei dem Rechenunterricht», ἡ ὁποία σκοπὸν εἶχε «νὰ γονιμοποιήσῃ μὲν μὲ τὰς ἰδέας τοῦ Πεσταλότση τὸν παλαιὸν καὶ μηχανικὸν τρόπον τῆς ἀριθμήσεως, νὰ καταστήσῃ δὲ τὸν τρόπον τοῦ Πεσταλότση ἐφαρμόσιμον εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, καθόσον ἤθελε προσληφθῇ εἰς αὐτὸν κάθε ὀρθὸν στοιχεῖον τοῦ παλαιοῦ τρόπου».

Αἱ σπουδαιότεραι ἀπὸ τὰς ἀρχὰς τοῦ Harnisch ἦσαν αἱ ἑξῆς (ἴδ. *Jänicke*, Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts, σ. 93 κ. ἀκ):

α) Ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἀποβλέπει μέν, ὅπως καὶ τὰ ἄλλα μαθήματα, εἰς τὴν ἁρμονικὴν ἀνάπτυξιν ὅλων τῶν πνευματικῶν δυνάμεων, ἀλλ' ἀποβλέπει συγχρόνως καὶ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἀριθμητικῆς δεξιότητος τῆς ἀπαιτουμένης διὰ τὸν πρακτικὸν βίον.

β) Ὁ μαθητὴς ὀφείλει νὰ ἀριθμῇ μὲ ἐπίγνωσιν καὶ συνείδησιν, ὅσον τὸ ἐπιτρέπουν αἱ πνευματικαί του δυνάμεις· πρέπει ὅμως συγχρόνως νὰ ἀποκτήσῃ καὶ δεξιότητα, ταχύτητα καὶ ἀσφάλειαν εἰς τὴν ἀρίθμησιν.

γ) Ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις πρέπει νὰ συνδιδάσκωνται καὶ νὰ ἀλληλοβοηθοῦνται.

δ) Ἡ καθαρὰ (ἤτοι μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς) καὶ ἡ ἐφηρμοσμένη ἀρίθμησις δὲν πρέπει νὰ ἀποχωρίζωνται ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην.

ε) Ἡ ὕλη τῶν ἐφηρμοσμένων προβλημάτων πρέπει νὰ λαμβάνεται ἀπὸ τὸν πρακτικὸν βίον.

ς) Αἱ διαδοχικαὶ ἀριθμητικαὶ βαθμίδες ἢ σειραὶ πρέπει νὰ κανονίζωνται *σύμφωνα* μὲ τὸ *δεκαδικὸν σύστημα* τῆς ἀριθμήσεως (1—10, 1—100 κ.τ.λ.).

ζ) Ἡ διδασκαλία τῶν κλασμάτων πρέπει νὰ ἀρχίζῃ ὅσον τὸ δυνατὸν ἐνωρίτερα, πρέπει δὲ νὰ ἀποφεύγεται εἰς αὐτὴν καθετὶ τὸ παιγνιῶδες.

η) Εἰς τὴν ἀρίθμησιν πρέπει νὰ θέτωνται εἰς ἐνέργειαν καὶ ἡ ἐποπτεία καὶ ἡ μνήμη.

[Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀρχῶν τοῦ Harnisch καὶ κατὰ προτροπήν του συνέταξε καὶ ἐδημοσίευσε ὁ *Ch. Scholz* τὸ μεθοδικόν του ἔργον «Praktischer Rechenlehrer oder methodische Anweisung im Rechnen», τὸ ὁποῖον ἐκυριάρχησε ἐπὶ πολλὰς δεκαετηρίδας εἰς τὴν διδακτικὴν πρᾶξιν, βελτιωθὲν ὅμως ἐν τῷ μεταξὺ ἀρκετά].

Ὁ ***Diesterweg*** ἐσυνέχισε τὸ ἔργον τοῦ Harnisch. Μαζὶ μὲ τὸν *Heuser* ἐδημοσίευσε τὸ 1829 τὸ ἔργον «Methodisches Handbuch für den Gesammtunterricht im Rechnen», καθὼς καὶ μίαν συλλογὴν προβλημάτων εἰς τεύχη πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν. Ἐκτάκτως δὲ πολύτιμον εἶναι καὶ τὸ τμῆμα τῆς διδασκαλίας τῆς Ἀριθμητικῆς τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ κατὰ τὸ 1835 δημοσιευθὲν ἔργον του «Wegweiser für deutsche Lehrer». Αἱ ἰδέαι, τὰς ὁποίας ἀντιπροσωπεύει ὁ Diesterweg, δὲν εἶναι κυρίως πρωτότυπαι· εἶναι ἰδέαι τοῦ Πεσταλότση, τὰς ὁποίας ὅμως ἐπεξεργάζεται μὲ περίσκεψιν καὶ πρακτικότητα. Ἐπακολούθημα τῆς δράσεως καὶ τοῦ Harnisch καὶ τοῦ Diesterweg ἦτο νὰ ἀναγνωρισθῇ γενικὰ ὁ διπλὸς σκοπὸς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, ὁ εἰδολογικὸς καὶ ὁ ὑλικός.

Αἱ ἀξιολογώτεραι ἀπὸ τὰς ἀρχὰς τοῦ Diesterweg εἶναι αἱ ἑξῆς :

α) [Σκοποὶ τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας εἶναι ἡ ἀνάπτυξις τοῦ πνεύματος καὶ ἡ μόρφωσις διὰ τὸν πρακτικὸν βίον. Ἐν τούτοις ὁ σπουδαιότερος ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς σκοποὺς εἶναι ὁ πρῶτος καὶ ἡ πλήρωσίς του εἶναι ἀπολύτως ἀναγκαία, διότι ἡ ἀριθμητικὴ δεξιότης ἠμπορεῖ νὰ ἀποκτηθῇ καὶ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, ἐνῷ ἡ ἅπαξ παραμεληθεῖσα κατανόησις πολὺ δύσκολα ἠμπορεῖ νὰ ἐπιτευχθῇ εἰς αὐτόν.

β) Ἐπειδὴ ἡ ἀρίθμησις εἶναι νοητικὴ ἐργασία, ἤτοι ὁ σχηματισμὸς νέων ἀριθμητικῶν παραστάσεων ἀπὸ δοθείσας], ἕνα μόνον εἶδος ἀριθμήσεως ὑπάρχει, ἡ διὰ τοῦ νοῦ, ἡ ἔλλογη ἀρίθμησις, καὶ ὄχι δύο (π.χ. ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις). Τόσον ἡ ἀπὸ μνήμης, ὅσον καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις πρέπει νὰ εἶναι ἀρίθμησις διὰ τοῦ νοῦ.

γ) Ὅπως ὑπάρχει μία μόνον ἀρίθμησις, ἔτσι ὑπάρχει καὶ μία μόνον ἀριθμητικὴ μέθοδος, ἤτοι ἐκείνη, ἡ ὁποία προσαρμόζεται εἰς τὴν φύσιν τοῦ πνεύματος [καὶ εἰς τὸ ποιὸν τῆς διδασκομένης ὕλης].

δ) Ὄχι μόνον ὁ σχηματισμὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἀλλὰ καὶ ἡ γνῶσις κάθε ἀριθμητικῆς πράξεως πρέπει νὰ στηρίζεται ἐπάνω εἰς ἀσφαλῆ ἐποπτείαν.

ε) Πρέπει νὰ ἀναπτύσσεται ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον ἡ αὐτενέργεια τῶν μαθητῶν. Ὁδηγούμενοι κατάλληλα ἀπὸ τὸν διδάσκαλον πρέπει νὰ ἀνευρίσκουν μόνοι των τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοῦ κάθε προβλήματος.

ϛ) Μὲ τὴν κατανόησιν πρέπει νὰ συνδέεται πάντοτε ἡ ἄσκησις.

ζ) Εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἄσκησιν πρέπει νὰ ἐπακολουθῇ πάντοτε ἡ γραπτή, διότι καὶ αἱ δύο χωροῦν πρὸς τὰ ἐμπρὸς ἀρρήκτως ἑνωμέναι.

Ἐξ ἴσου σπουδαία μὲ τὴν ἐπίδρασιν, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν ὁ Diesterweg ὡς πρὸς τὴν διαρρύθμισιν τῆς Μεθοδικῆς τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας, πρέπει νὰ θεωρηθῇ ἡ ἐπίδρασις τοῦ *Hentschel*, διδασκάλου τοῦ Διδασκαλείου τῆς Weissenfels. Ὁ Η. κατὰ μὲν τὸ 1837 ἐδημοσίευσε τὸ πόνημα «Hundert Rechenaufgaben, elementarisch gelöst», κατὰ δὲ τὸ 1842 τὸ ἔργον «Lehrbuch des Rechenunterrichts für Volksschulen mit gleichmässiger Berücksichtigung des Kopf-und Zifferrechnens» εἰς 2 μέρη, (τὸ ὁποῖον ἐπεξεργάσθηκε ἀργότερα ὁ *Költzsch)*, προσέτι δὲ τὸ ἔργον «Aufgaben zum Kopfrechnen für die Hand des Lehrers», καθὼς καὶ συλλογὴν προβλημάτων εἰς τεύχη πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν. Ὁ Diesterweg, ὁ Dittes, ὁ Kehr, ὁ Unger, ὁ Grube κ. ἄ. ἐπαινοῦν τὸν Hentschel καὶ συνιστοῦν τὰ ἔργα του. Ὅ,τι κυρίως διακρίνει τὸν Hentschel καὶ ἔκαμε δι' αὐτὸ τόσον σημαντικὴν τὴν ἐπίδρασίν του, εἶναι, ὅτι ἐκατόρθωσε νὰ συνενώσῃ εἰς ἕνα ἑνιαῖον σύνολον ὅλας τὰς ἀπὸ τοῦ Πεσταλότση προόδους τῆς Μεθοδικῆς τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ νὰ στηρίξῃ αὐτὰς ἐπάνω εἰς τὴν πρᾶξιν, εἰς τὴν ὁποίαν εἶχε ἐξαιρετικὴν ἐμπειρίαν. Μερικοὶ ἀπὸ τοὺς θαυμαστάς του ἀπὸ ὑπερβολικὸν βέβαια θαυμασμὸν τὸν θεωροῦν αὐτόχρημα καὶ τὸν ὀνομάζουν «πατέρα τῆς Μεθοδικῆς τῆς Ἀριθμητικῆς τοῦ νεωτέρου δημοτικοῦ σχολείου». Ἰδίως ἀξιοσημείωτη εἶναι ἡ πολεμική του ἐναντίον τῆς μέχρι τῶν χρόνων του ἐπικρατούσης γνώμης, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἔπρεπε νὰ λύωνται εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον ἐγγράφως μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἀναλογίας. Ἀντὶ τῆς λύσεως αὐτῆς εἰσάγει ὁ Η τὴν πολὺ ἁπλούστερην λύσιν μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα καὶ τὴν κλασματικὴν διάταξιν τῶν σχετικῶν πράξεων.

Ὑπὸ τὸ ἴδιον πνεῦμα μὲ τοὺς Harnisch, Diesterweg καὶ Hentschel ἔδρασαν ἐκτὸς ἄλλων καὶ οἱ Kranke (ἐπιθεωρητὴς δημ. σχ. εἰς τὸ Ἁννόβερον), Denzel, Unger (καθηγητὴς εἰς τὴν Ἐρφούρτην) καὶ Stubba (διδάσκαλος τοῦ Διδασκαλείου τῆς

Bunzlau. Ὁ *Denzel* ἐχρησιμοποιοῦσε τὴν Πραγματογνωσίαν ὡς βάσιν καὶ τῆς διδασκαλίας τῆς πρώτης ἀριθμήσεως. Ὡς μέσον δὲ ἐποπτείας ἐμεταχειρίζετο τὴν ἔκτοτε γνωστὴν γενομένην «κλίμακά» του, ἤτοι μίαν μεγάλην πινακίδα, εἰς τὴν ὁποίαν εἶχε σχεδιάσει μίαν κλίμακα, ἔχουσαν ὕψος 1 μέτρου καὶ 10 βαθμίδας, αἱ ὁποῖαι ἀπεῖχαν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην 10 ἑκατ. τ. μ. Ὁ *Unger* ἔγινε ὁ εἰσηγητὴς τῆς διδασκαλίας τῶν ἀλγεβρικῶν προβλημάτων καὶ εἰς τὸ δημοτικὸν σχολεῖον, ἐτόνιζε δέ, ὅτι, διὰ νὰ ἐξοικειωθοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν ἀρίθμησιν τοῦ πρακτικοῦ βίου, πρέπει νὰ περιορισθῇ ἡ διδασκαλία εἰς τοὺς μικρότερους καὶ εὐκολώτερους ἀριθμούς. Τὴν εἰσαγωγὴν τῶν ἀλγεβρικῶν προβλημάτων εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον ὑποστηρίζει καὶ ὁ *Stubba*, διὰ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἔκαμνε καὶ συστηματικὴν προπαρασκευὴν τῆς διδασκαλίας κάθε νέας ὕλης, εἰς τὴν ὁποίαν ἐπροκαλοῦσε τοὺς μαθητὰς νὰ ἀναπλάσσουν ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ παλαιοῦ καὶ γνωστοῦ, ἐπάνω εἰς τὰ ὁποῖα θὰ ἠμποροῦσε νὰ στηριχθῇ ἡ κατανόησις τοῦ νέου.

[Διὰ τοῦ *Herbart* τάσσεται πλέον ὁριστικὰ καὶ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τοῦ τελικοῦ σκοποῦ τῆς ὅλης παιδαγωγούσης διδασκαλίας καὶ ἀγωγῆς. Ἐπειδὴ δὲ ὁ σκοπὸς αὐτὸς συνίσταται κατὰ τὸν Herbart εἰς τὴν μόρφωσιν ἠθικοῦ χαρακτῆρος, ἐννοεῖται, ὅτι] καὶ ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς, ὅπως καὶ ἡ διδασκαλία κάθε ἄλλου μαθήματος, πρέπει εἰς τὸ τέλος νὰ ἀποβλέπῃ εἰς τὴν ἠθικὴν μόρφωσιν τῶν παίδων. Ὁ εἰδολογικὸς καὶ ὁ ὑλικὸς σκοπὸς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας δὲν αἴρονται μὲ αὐτό, ἀλλὰ συνενώνονται κάτω ἀπὸ ἕνα ἀνώτερον σκοπόν. Ἠμπορεῖ δὲ κατὰ τὸν Herbart ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία νὰ συντελέσῃ εἰς τὴν ἠθικὴν μόρφωσιν τῶν παίδων, καθόσον χάρις εἰς αὐτὴν γνωρίζονται ἀκριβέστατα τὰ πράγματα, ἤτοι τὰ μέσα τῆς πραγματώσεως τῶν ἠθικῶν σκοπῶν, ἑπομένως ἐνισχύεται ἡ ἠθικὴ γνῶσις. Ἐν τούτοις πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ὁ Herbart δὲν ἔχει ἀσχοληθῇ καὶ μὲ τὴν περαιτέρω ἐφαρμογὴν τῆς ἰδέας του αὐτῆς εἰς τὰ καθέκαστα τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας.

Ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦ Herbart ἐσυνέχισε τὸ ἔργον του ὁ *August Wilhelm Grube*, διδάσκαλος τοῦ ἀστικοῦ σχολείου τῆς

Merseburg. Κατὰ τὸ 1842 ἐδημοσίευσε τὸ ἔργον «Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule, nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode. Ein pädagogischer Versuch zur Lösung der Frage: Wie wirkt der Unterricht sittliche Bildung?». Εἰς τὸν πρόλογον τοῦ ἔργου αὐτοῦ λέγει, ὅτι μόνον ἡ ἀρχὴ τῆς ἠθικῆς μορφώσεως πρέπει νὰ ῥυθμίζῃ τόσον τὴν ὅλην ἀγωγήν, ὅσον καὶ τὸ οὐσιωδέστατον μέσον της, τὴν διδασκαλίαν. «Ὅπου ἡ μάθησις δὲν εἶναι προϊὸν **τῆς ἐφέσεως πρὸς τὸ μανθάνειν,** ἐκεῖ δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ λόγος περὶ πραγματικῆς ἐργασίας· διότι ἡ πραγματικὴ ἐργασία εἶναι νοητὴ μόνον ὡς ἀποτέλεσμα κάποιας βουλητικῆς ἐνεργείας. Δι᾽ αὐτὸ καὶ ἡ ἀληθινὴ στοιχειώδης διδασκαλία δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ μία καθοδήγησις τῶν παίδων εἰς **τὸ νὰ θέλουν νὰ ἐποπτεύουν·** μόνον μὲ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θελήσεως αὐτῆς τὸ ἐποπτεῦον πνεῦμα εἶναι ἐλεύθερον καὶ καθορίζει μόνον του τὸν ἑαυτόν του, μόνον ἔτσι εἶναι ἐνεργὸς κατὰ τὴν ἐποπτείαν ὁ ὅλος ἄνθρωπος, ἤτοι ὁ ἠθικὸς ἄνθρωπος».

Ἐν τούτοις τὸ ὄνομα τοῦ Grube ἔγινε κυρίως γνωστὸν ἀπὸ μίαν ἄλλην ἀρχήν του, τὴν ἀρχὴν **τῆς μονογραφικῆς ἐπεξεργασίας τῶν ἀριθμῶν,** σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν κάθε ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἐξετάζεται μόνος του καὶ ἀπὸ κάθε ἔποψιν. Ὁ Grube θεωρεῖ, ὅπως καὶ ὁ Πεσταλότσης, τὴν ἐποπτείαν ὡς τὴν βάσιν ὅλης τῆς διδασκαλίας, ἄρα καὶ τῆς διδασκαλίας τῆς ἀριθμήσεως. Ἀλλ᾽ ἀντικείμενον τῆς ἐποπτείας εἰς τὴν ἀρίθμησιν πρέπει νὰ εἶναι ὁ κάθε ἀριθμός. Δι᾽ αὐτὸ κάθε ἀριθμὸς τῆς θεμελιώδους σειρᾶς 1—100 πρέπει νὰ ἐποπτευθῇ καὶ νὰ ἐξετασθῇ μόνος του, χωριστά, ὡς ἄτομον. Ἡ διδασκαλία δὲν πρέπει νὰ προχωρῇ ἀπὸ τὴν μίαν πρᾶξιν εἰς τὴν ἄλλην, ἀλλὰ ἀπὸ τὸν ἕνα ἀριθμὸν εἰς τὸν ἄλλον. «Διασπῶντες», λέγει ὁ Grube, «τὸ ὑλικὸν τῆς πρώτης ἀριθμήσεως κατὰ τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις κάμνομεν τὸ ἴδιον σφάλμα, τὸ ὁποῖον θὰ ἐκάμναμεν, ἂν εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς Πραγματογνωσίας ἐπαρουσιάζαμεν εἰς τὸν παῖδα τὰ ἀντικείμενα κατὰ τὰς ἰδιότητας τοῦ μεγέθους, τῆς μορφῆς, τοῦ χρώματος κ.τ.λ. ἢ ἂν ἀρχίζαμεν τὴν διδασκαλίαν τῆς Βοτανικῆς μὲ τὸ σύστημα τοῦ Λινναίου. Ἀλλ᾽ ὅπως ὁ παῖς δὲν ἠμπορεῖ νὰ γνωρίσῃ ἕνα ἀντικείμενον, ἐὰν παρατηρῇ ἕνα μόνον γνώρισμα αὐτοῦ καὶ διαφόρων ἄλλων μαζὶ ἀντικειμένων, τὸ γνωρίζει δὲ μόνον, ἐὰν τὸ ἐξετάσῃ χωριστὰ καὶ παρατηρήσῃ ὅλα τὰ γνωρίσματά του, καὶ ὅπως δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ παρουσιάζωμεν εἰς τὸν κατὰ πρῶτον μανθάνοντα τὴν Βοτανικὴν ἔτσι τὰ φυτά, ὥστε κατ' ἀρχὰς μὲν νὰ παρατηρῇ μόνον τὴν ῥίζαν, ἔπειτα δὲ μόνον τὸν βλαστὸν κ. οὕτ. κ., ἐνῷ αὐτὸς βλέπει καὶ ὀφείλει νὰ βλέπῃ κάθε φυτὸν ὁλόκληρον, ἔτσι καὶ ὁ μαθητὴς δὲν ἠμπορεῖ νὰ μάθῃ κατὰ βάθος ἕνα ἀριθμόν, π. χ. τὸν 4, ἐὰν σήμερα μὲν μάθῃ, ὅτι $2+2=4$, κατόπιν δὲ ἀπὸ μερικὰς ἑβδομάδας, ὅταν θὰ ἔλθῃ ἡ σειρὰ τῆς ἀφαιρέσεως, μάθῃ, ὅτι $4-2=2$ κ.τ.λ. Ἄλλωστε, ὅταν γνωρίσῃ, ὅτι $2+2=4$, ἔχει συγχρόνως μὲ τὴν γνῶσιν αὐτὴν καὶ τὰς ἐποπτείας $2\times2=4$, $4-2=2$ καὶ $4:2=2$, ἡ δὲ Μεθοδικὴ σφάλλεται διασπῶσα τὴν ἀντικειμενικὴν αὐτὴν συνοχὴν διὰ τῆς διαδοχικῆς διδασκαλίας τῶν 4 πράξεων τῆς ἀριθμήσεως». [Μὲ τὴν μονογραφικὴν τώρα ἐξέτασιν τοῦ κάθε ἀριθμοῦ ἐξυπηρετεῖται καλύτερα καὶ ὁ τελικὸς σκοπὸς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, ἤτοι ἡ μόρφωσις τῆς ἠθικῆς βουλήσεως. Θέλει κανείς, ὅ,τι ἀγαπᾷ, ἀγαπᾷ δὲ τὸ διδασκόμενον μόνον, ἂν τὸ ἐποπτεύῃ καὶ ἐμβαθύνῃ εἰς αὐτὸ ἀπὸ κάθε ἄποψιν. Συνίσταται δὲ ἀκριβέστερον ἡ κατὰ τὸν G. μονογραφικὴ ἐξέτασις τῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ ὅτι, ἀφοῦ σχηματισθῇ ὁ ἑκάστοτε διδασκόμενος νέος ἀριθμὸς ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐποπτείας, συγκρίνεται μὲ ὅλους τοὺς προηγουμένους του καὶ ἐρευνῶνται ὅλαι αἱ σχέσεις, εἰς τὰς ὁποίας εὑρίσκεται μὲ αὐτούς. Προϊὸν τῆς συγκριτικῆς αὐτῆς ἐρεύνης εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἐξαγωγὴ ὅλων τῶν γνωρισμάτων τοῦ ἐξεταζομένου ἀριθμοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ ἐκτέλεσις ὅλων τῶν πράξεων τῆς ἀνιούσης ἀριθμήσεως, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ἐξαγόμενον, καὶ ὅλων τῶν πράξεων τῆς κατιούσης, τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ἀφετηρία]. Εἶναι δὲ αἱ πράξεις αὐταὶ ἡ πρόσθεσις, ὁ πολλαπλασιασμός, ἡ ἀφαίρεσις, ἡ διαίρεσις καὶ ἡ κλασματικὴ ἀρίθμησις. Ὡς θεμελιώδη δὲ μέσα τῆς ἐποπτείας δέχεται ὁ Grube τὰ δάκτυλα καὶ τὰς γραμμάς.

Αἱ ἰδέαι τοῦ Grube αἱ σχετικαὶ μὲ τὴν μονογραφικὴν ἐξέτασιν τῶν ἀριθμῶν ἄρχισαν νὰ κινοῦν τὴν προσοχὴν τῶν Παιδαγωγικῶν, ἀφοῦ παρῆλθε δεκαετία ὁλόκληρη ἀπὸ τὴν ἐμφάνισιν τῆς πρώτης ἐκδόσεως τοῦ ἔργου του. Ἀπὸ τὸν χρόνον ὅμως

αὐτὸν ἔγιναν τὸ ἀντικείμενον ζωηροῦ ἀγῶνος μεταξύ των, ὁ ὁποῖος ἐκράτησε καθ' ὅλην τὴν ἕκτην δεκαετηρίδα τοῦ παρελθόντος αἰῶνος. Οἱ Παιδαγωγικοὶ ἐχωρίσθηκαν εἰς δύο στρατόπεδα, τὸ ἕνα μὲ τὸ μέρος τοῦ Grube καὶ τὸ ἄλλο ἐναντίον του.

Οἱ πρῶτοι ἐτόνιζαν ὡς οὐσιώδη πλεονεκτήματα τοῦ συστήματος τοῦ G. τὰ ἀκόλουθα :

α) ὅτι συντελεῖ εἰς τὴν κατὰ βάθος γνῶσιν τῶν ἀριθμῶν,

β) ὅτι ἀπασχολεῖ διαρκῶς τὸν νοῦν καὶ ἐκτοπίζει τὸν μηχανισμὸν καὶ τὸν ἄκριτον σχηματισμὸν σειρῶν καὶ

γ) ὅτι συντελεῖ εἰς τὴν ἄνευ χασμάτων πρόοδον τῆς διδασκαλίας.

Οἱ δεύτεροι, εἰς τοὺς ὁποίους ἀνῆκαν ἐξέχοντες Μεθοδικοί, ὅπως ὁ Heutschel, ὁ Stubba, ὁ Sobolewsky, ὁ Brenner, ὁ Scherer κ. ἄ., ἐπρόβαλαν ἐναντίον του τὰς ἑξῆς ἰδίως ἐνστάσεις :

α) Εἶναι δυσκολώτατον εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς κατωτάτης τάξεως νὰ ἐκτελοῦν εὐθὺς ἀπὸ τὴν ἀρχὴν πολλὰς μαζὶ πράξεις ἐπάνω εἰς ἕνα ἀριθμόν. Δι' αὐτὸ εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς διδασκαλίας, ἀντὶ νὰ συνδέωμεν τὰς πράξεις, ὀρθότερον εἶναι νὰ τὰς χωρίζωμεν τὴν μίαν ἀπὸ τὴν ἄλλην.

β) Διὰ νὰ γίνεται ἡ ἐπεξεργασία κάθε ἀριθμητικῆς πράξεως μὲ κάποιαν βαθύτητα, καλὸν εἶναι νὰ συνεχίζεται ἡ πρᾶξις αὐτὴ κάμποσον χρόνον.

γ) Ἡ πρόοδος ἀπὸ ἀριθμὸν εἰς ἀριθμὸν ἀπαμβλύνει ὀλίγον κατ' ὀλίγον τὸ διαφέρον καὶ προκαλεῖ τὴν κόπωσιν.

δ) Τὸ σύστημα τοῦ G. ἀπαιτεῖ ἐξαιρετικὰ δεξιὸν διδάσκαλον, θὰ τὸν ἀπασχολῇ δὲ ὑπερβολικὰ εἰς τὴν κατώτατην τάξιν.

ε) Ἡ κλασματικὴ ἀρίθμησις εἶναι παραπολὺ δύσκολη διὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διδασκαλίας.

[Ἀπὸ τοὺς νεωτέρους τώρα Μεθοδικοὺς μερικοὶ μὲν ἀκολουθοῦν χωρὶς καμίαν ἐπιφύλαξιν τὸ σύστημα τοῦ Grube, ἄλλοι δὲ τὸ ἀπορρίπτουν, ἄλλοι δὲ τέλος δέχονται ἐκεῖνα μόνον τὰ στοιχεῖά του, ὅσα κρίνουν ὀρθά.

Ποίαν γνώμην ἔχομεν διὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κατὰ G. μονογραφικῆς ἐξετάσεως τῶν ἀριθμῶν, θὰ εἴπωμεν ἰδίως εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς διατάξεως τῆς ὕλης τοῦ κάθε σχολικοῦ ἔτους, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀρχὴ αὐτὴ θὰ ἐξετασθῇ διὰ μακρῶν.

Ὅπως εἴπαμεν τώρα καὶ ἀνωτέρω, διὰ τοῦ ἔργου τῶν ἀπὸ τοῦ Harnisch καὶ ἐφεξῆς ἀνδρῶν ἐξωμαλύνθησαν μὲν αἱ κύριαι ἀντιθέσεις, αἱ χωρίζουσαι τοὺς παλαιοὺς Μεθοδικοὺς τῆς Ἀριθμητικῆς, ἔμειναν ὅμως ἐπίμαχα ἀρκετὰ ἀπὸ τὰ ἐπὶ μέρους ζητήματα, τὰ ἀπασχολήσαντα τοὺς Μεθοδικοὺς ἐκείνους, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἐξακολουθεῖ νὰ ἀπασχολῇ ἐξ ἴσου καὶ τοὺς σημερινοὺς Μεθοδικούς. Τέτοια εἶναι π. χ. τὰ ζητήματα περὶ τῶν καταλλήλων μέσων τῆς ἐποπτείας, περὶ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχουν εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν τὰ προβλήματα μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμούς, μὲ συγκεκριμένους καὶ τὰ ἐφηρμοσμένα, περὶ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἀλγεβρικῶν προβλημάτων εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον, περὶ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχουν ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ ἔγγραφος ἀρίθμησις εἰς τὴν ἀριθμητ. διδασκαλίαν, περὶ τοῦ καταλληλοτέρου τρόπου τῆς ἐγγράφου λύσεως τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν κ. τ. λ.].

Ἀλλὰ τοὺς νεωτέρους Μεθοδικοὺς ἀπασχολοῦν πλὴν τῶν παλαιῶν αὐτῶν ζητημάτων καὶ ἄλλα νεώτερα, ἀναφυέντα κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους. Ποῖα τώρα εἶναι τὰ ζητήματα αὐτὰ καὶ ποία εἶναι ἡ σημερινὴ ἐν γένει θέσις τῆς Μεθοδικῆς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, θὰ πραγματευθῶμεν εἰς τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον κεφάλαιον.

Ὡς πρὸς τὴν Ἱστορίαν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας ἴδ. καὶ τὰ ἀκόλουθα ἔργα: *Jänicke*, Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts εἰς τὸν 3ον τόμον τῆς Geschichte der Methodik τοῦ Kehr, Dresden, Thienemann, 2 μ., δεμ. 2,60 μ.— *Villicus*, Geschichte der Rechenkunst u. s. w., 3 ἔκδ., 1897, Wien, Gerold u. S., 2,80 μ., δεμ. 3,20 μ.—*Adam*, Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts, Gross—Lichterfelde, Vieweg, 2,40 μ.—*Hartmann*, Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule u. s. w., 4 ἔκδ., 1913, σελ. 24 116, Leipzig u. Frankfurt a. M., Kesselring, δεμ. 6,50 μ.—*Sterner*, Geschichte der Rechenkunst, München u. Leipzig, Oldenbourg, 1891, 1,50 μ.—*Stoy*, Zur Geschichte des Rechenunterrichts, πρῶτον μέρος, Jena, 1876.— *Walsemann*, J. H. Pestalozzis Rechenmethode, Historisch—Kritisch dargestellt und auf Grund experimenteller Nachprüfung für die Unterrichtspraxis erneuert, Hamburg, Lefèvre Nachf., 1901, 3 μ.

IV. Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑ ΤΟΥΣ ΝΕΩΤΕΡΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ.

[Κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους δὲν ἔπαυσαν φυσικά, ὅπως εἴπαμεν καὶ ἀμέσως ἀνωτέρω, νὰ ἀπασχολοῦν τοὺς Μεθοδικοὺς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας ὅλα τὰ ἐκ τῶν παρελθόντων χρόνων κληροδοτηθέντα ἐπίμαχα ζητήματά της. Ἐκτὸς ὅμως τῶν ζητημάτων αὐτῶν ἐκίνησαν τὴν προσοχὴν τῶν νεωτέρων Μεθοδικῶν καὶ ἄλλα].

Ἕνα ἀπὸ τὰ ζητήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχουν στραφῆ μὲ ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον οἱ Μεθοδικοὶ κατὰ τὰς τελευταίας δεκαετηρίδας, εἶναι τὸ ζήτημα ***τῆς φύσεως καὶ τῆς γενέσεως*** τοῦ ἀριθμοῦ. [Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ ζητήματος αὐτοῦ καὶ ἰδίως τοῦ ζητήματος τῆς γενέσεως τοῦ ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται καὶ ὁ κανονισμὸς τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον ἡ διδασκαλία ὀφείλει νὰ καθοδηγῇ τοὺς μαθητάς, ὅπως σχηματίζουν τὰς ἐννοίας τῶν πρώτων ἀριθμῶν, καὶ ἡ ἐκλογὴ τῶν καταλλήλων διὰ τὸν σχηματισμὸν αὐτὸν μέσων τῆς ἐποπτείας]. Μὲ τὸ ζήτημα αὐτὸ ἔχουν ἀσχοληθῆ ἐκτὸς ἄλλων ἰδίως οἱ *Tanck*, *Knilling*, *Räther*, *Hartmann*, *Beetz*, *Lay* καὶ *Schneider*. [Ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς αὐτοὺς οἱ μὲν δύο πρῶτοι εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀποκλειστικὸν δημιούργημα τῆς νοήσεως, σχηματιζόμενος διὰ τῆς νοητικῆς ἐργασίας τῆς ἀπαριθμήσεως, οἱ δὲ ἄλλοι ὑποστηρίζουν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι προϊὸν τῆς συνεργασίας τῆς ἐμπειρίας καὶ τῆς νοήσεως, σχηματιζόμενος ἀπὸ τὰς κατ' αἴσθησιν ἐποπτείας ὁμοίων ἀντικειμένων διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς σχέσεως τοῦ πλήθους, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ αὐτῶν. Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τοὺς τελευταίους αὐτοὺς Μεθοδικοὺς οἱ μὲν Räther καὶ Hartmann φρονοῦν, ὅτι ἡ ἐξακρίβωσις τῆς σχέσεως τοῦ πλήθους, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὰ ἐποπτευόμενα ὅμοια ἀντικείμενα, γίνεται διὰ τῆς νοητικῆς ἐργασίας τῆς ἀπαριθμήσεως, οἱ δὲ Beetz, Lay καὶ Schneider εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἡ ἐξακρίβωσις αὐτὴ γίνεται δι' ἀμέσου ἐποπτείας, ἐπαναφέροντες ἔτσι εἰς ἰσχὺν **τὴν ἀρχὴν τῆς ἐποπτείας**, τὴν ὁποίαν τόσον εἶχε τονίσει ὁ Πεσταλότσης καὶ μετ' αὐτὸν ὁ Grube]. Συνήγορος τῆς ἀριθμητικῆς μεθόδου τοῦ Πεσταλότση ἔχει παρουσιασθῆ ἐσχάτως καὶ ὁ *Walsemann*, διευθυντὴς τοῦ ἀνωτέρου Λυκείου τοῦ Schleswig, στηριζόμενος εἰς σχετικὰς ἱστορικὰς καὶ κριτικὰς ἐρεύνας καὶ εἰς τὴν **πειραματικὴν** ἐξέλεγξιν τῆς μεθόδου. Σημειωτέον δέ, ὅτι ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος ἐχρησιμοποίησε **τὸ πείραμα** διὰ ψυχολογικὰς καὶ μεθοδικὰς ἐρεύνας εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν, εἶναι ὁ *Lay*, ἀκριβῶς δὲ ἐπάνω εἰς τὰ πειράματά του στηρίζει καὶ τὴν ἀντίληψίν του, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι προϊὸν τῆς ἀμέσου ἐποπτείας. Κατόπιν ἀπὸ αὐτὸν ἔκαμαν τέτοια πειράματα ἰδίως ὁ καθηγητὴς *Meumann* καὶ ὁ διδάσκαλος τοῦ Reichenbach *Schneider*, ὁ ὁποῖος, καθὼς εἴδαμεν, εἶναι ἐπίσης ὀπαδὸς τῆς γνώμης, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι προϊὸν τῆς ἀμέσου ἐποπτείας.

Ἄλλο ζήτημα, τὸ ὁποῖον ἐπίσης ἔχει ἐξετασθῆ πολὺ κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους, εἶναι τὸ ζήτημα **τῶν αἰτίων, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία ἔχει πολὺ πενιχρὰ ἀποτελέσματα,** ὅπως δεικνύει ἡ γενικὴ ἐμπειρία, καθὼς καὶ τὸ συναφὲς ζήτημα τῆς ἄρσεως τῶν αἰτίων αὐτῶν, ἤτοι τὸ ζήτημα **τῆς ἁπλοποιήσεως τῆς διδασκαλίας τῆς Ἀριθμητικῆς**. Σχετικὰ μὲ τὸ τελευταῖον αὐτὸ ζήτημα ἄλλοι μὲν Μεθοδικοί, ὅπως π.χ. ὁ *Büttner* καὶ ὁ *Steuer*, ἐπιχειροῦν τὴν ἁπλοποίησιν τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας, [ἀπορρίπτοντες ἀπὸ τὸ πρόγραμμα τοῦ δημ. σχολείου κάθε ἀριθμητ. ὕλην, τὴν ὁποίαν θεωροῦν ἄχρηστην διὰ τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον], ἄλλοι δὲ πάλιν, ὅπως ὁ *Hartmann* καὶ ὁ *Beetz*, ἐπιδιώκουν τὴν ἁπλοποίησιν, [ἀπορρίπτοντες κάθε ὕλην, τὴν ὁποίαν θεωροῦν ὡς μὴ δυναμένην νὰ κινήσῃ τὸ διαφέρον τῶν παίδων πρὸς τὴν ἀρίθμησιν, ἄρα ὡς μὴ ἔχουσαν μορφωτικὴν ἀξίαν].

[Ἀλλὰ καὶ τὸ ζήτημα τῆς ἐφαρμογῆς **τῆς ἀρχῆς τῆς ἐργασίας** εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν ἀπασχολεῖ ἀρκετὰ κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους τοὺς Μεθοδικούς. Οἱ περισσότεροι ἀπὸ αὐτοὺς ἀποκλίνουν εἰς τὴν γνώμην, ὅτι μὲ τὴν πρέπουσαν ἐφαρμογὴν τῆς ἀρχῆς τῆς ἐργασίας εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν ὄχι μόνον ἐνισχύεται ἡ αὐτενέργεια τῶν μαθητῶν εἰς τὴν διδασκαλίαν αὐτήν, ἀλλὰ μαζὶ καὶ **ἁπλοποιεῖται** ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία καὶ γίνεται περισσότερον εὐχάριστη εἰς τοὺς μαθητάς].

Ἐξ ἄλλου ἡ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον ἐπίσημη εἰσαγωγὴ τῶν δεκαδικῶν νομισμάτων, μέτρων καὶ σταθμῶν δὲν ἦτο δυνατὸν παρὰ νὰ εὕρῃ ἀμέσως ἀπήχησιν καὶ εἰς τὴν σχολικὴν Ἀριθμητικήν, ἡ ὁποία φυσικὰ δὲν ἠμπορεῖ νὰ παραβλέπῃ τὰς ἀπαιτήσεις καὶ τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου. Μὲ τὴν εἰσαγωγὴν αὐτὴν ἐπῆλθε μεταβολὴ εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν κοινῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. Τὰ τελευταῖα ἀρχίζουν ἔκτοτε νὰ ἀποκτοῦν ἀσυγκρίτως μεγαλύτερην σημασίαν ἀπὸ πρίν. Ἔτσι ἀρχίζει νὰ μελετᾶται ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς τὸ ζήτημα **τῶν ὁρίων,** τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἔχουν εἰς τὸ ἑξῆς ἡ διδασκαλία τῶν δεκαδικῶν καὶ ἡ διδασκαλία τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον. Συναφῶς δὲ μὲ τὸ ζήτημα αὐτὸ μελετᾶται ἔκτοτε καὶ τὸ ζήτημα **τῆς σχέσεως τῶν δεκαδ. κλασμάτων πρὸς τὰ κοινά,** καθὼς καὶ τὸ συναφὲς μὲ αὐτὸ ζήτημα **τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ λάβουν εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ δημ. σχολείου.** Ὅσον ἀφορᾷ τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ ζητήματα αὐτά, ἄλλοι μὲν ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς θεωροῦν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ὡς ἕνα εἶδος τῶν κοινῶν, ἄλλοι δὲ πάλιν τὰ θεωροῦν ὡς συνεχίζοντα ὑπὸ τὴν μονάδα τὸ κρατοῦν δεκαδικὸν σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ὁμοφωνία εἰς τὸ προκείμενον ζήτημα δὲν ἔχει ἐπιτευχθῆ μέχρι τοῦδε.

Εἰς τὴν ἔρευναν ἀρκετῶν καὶ σπουδαίων ζητημάτων τῆς Μεθοδικῆς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας ἐσυντέλεσαν κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους ἀναντιρρήτως καὶ οἱ Παιδαγωγικοὶ **τῆς Ἑρβαρτιανῆς σχολῆς**.

Ἀπὸ τοὺς παλαιοτέρους Ἑρβαρτιανούς, τοὺς ἀσχοληθέντας καὶ μὲ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἄλλοι μὲν ἔχουν πλέον ἀποθάνει, ἄλλοι δὲ ἐπιζοῦν, οἱ περισσότερον ἄξιοι μνείας εἶναι οἱ *Ziller*, *Pickel* καὶ *Rein*, *Dörpfeld*, *Bräutigam* καὶ *Göpfert*. Ἀπὸ δὲ τοὺς νεωτέρους ὁ σπουδαιότερος ἀπὸ ὅλους εἶναι ὁ *Hartmaun*, ἐπιθεωρητὴς δημοτ. σχολείων εἰς Kamenz τῆς Σαξωνίας. Ἄξιοι μνείας ἐπίσης εἶναι οἱ *Teupser*, *Wilk*, *Muthesius*, *Heiland*, *Hiemesch*, *Haase* καὶ *Zeissig*. Οἱ μνημονευθέντες Παιδαγωγικοὶ δὲν ἔχουν ὅλοι τὰς ἴδιας ἀντι—

λήψεις. Οἱ Rein, Pickel, Teupser, Wilk, Hiemesch, Haase καὶ Zeissig εἶναι θιασῶται τοῦ Ziller. Ὁ Hartmann ἐξ ἄλλου καταλαμβάνει αὐτοτελῆ θέσιν. Ἐν μέρει δὲ ἀντίθετοι πρὸς τοὺς ὀπαδοὺς τοῦ Ziller εἶναι οἱ δύο θιασῶται τοῦ Stoy, ὁ Heiland καὶ ὁ Muthesius.

Ὅλους τοὺς ἀνωτέρω Μεθοδικοὺς χαρακτηρίζει ταυτότης ἀντιλήψεως ὡς πρὸς τὸ ζήτημα **τοῦ σκοποῦ,** τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐπιδιώκῃ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία. Ὅπως ὅλης τῆς διδασκαλίας, ἔτσι καὶ τῆς ἀριθμητικῆς ὕψιστος σκοπὸς πρέπει νὰ εἶναι κατ᾿ αὐτοὺς ἡ ἠθικὴ μόρφωσις. Πρέπει δὲ μάλιστα νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἀρκετοὶ ἀπὸ τοὺς Παιδαγωγικοὺς αὐτοὺς ὑπερτιμοῦν προφανῶς τὴν ἠθικὴν μορφωτικὴν ἀξίαν, τὴν ὁποίαν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ἐντελῶς ἰδιάζουσαν ἀντίληψιν ὡς πρὸς **τὴν θέσιν τῆς διδασκαλίας τῆς Ἀριθμητικῆς εἰς τὸ πρόγραμμα** ἔχουν ὁ Ziller καὶ οἱ ὀπαδοί του. Θεωροῦν τὴν Μαθηματικὴν ἐπιστήμην ὡς τὴν εἰδολογικὴν ὄψιν τῶν Φυσικῶν ἐπιστημῶν, ὡς τὴν «Γραμματικὴν τῆς φύσεως». Καὶ εἰς τὴν διδασκαλίαν ἑπομένως πρέπει κατ᾿ αὐτοὺς τὰ δύο μαθηματικὰ μαθήματα, ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ ἡ Γεωμετρία, νὰ προέρχωνται ἐκ τοῦ κύκλου τῶν φυσιογνωστικῶν μαθημάτων. Σύμφωνα δὲ μὲ τὴν ἄποψιν αὐτὴν πρέπει φυσικὰ νὰ καθορίζωνται καὶ αἱ ἀρχαί, αἱ ὁποῖαι θὰ διέπουν **τὴν συγκέντρωσιν** τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας.

Μὲ ἰδιαίτερην δὲ θέρμην ὑποστηρίζει ἡ Ἑρβαρτιανὴ σχολὴ τὴν ἀρχὴν **τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως**, ἤτοι **τῆς ἐξ ὡρισμένων πραγματικῶν κύκλων ἐκλογῆς τῆς ἑκάστοτε διδακτέας ἀριθμητικῆς ὕλης.** Κατὰ τοὺς ὀπαδούς της τὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα πρέπει νὰ διατάσσωνται κατὰ ὡρισμένους πραγματικοὺς κύκλους· δὲν πρέπει δὲ νὰ διδάσκωνται τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου προβλήματα διαφορετικοῦ, ποικίλου περιεχομένου. Κάθε μεθοδικὴ ἑνότης πρέπει νὰ ἀφορμᾶται ἀπὸ ἕνα τέτοιον κύκλον (π.χ. τὸν γεωργικὸν) καὶ νὰ κινῆται καθ᾿ ὅλην τὴν ἐπεξεργασίαν της ἐντὸς τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Οἱ πραγματικοὶ δὲ αὐτοὶ κύκλοι πρέπει νὰ λαμβάνωνται ἀφ᾿ ἑνὸς μὲν ἀπὸ τὰ ἄλλα μαθήματα, καὶ μάλιστα τὰ πραγματικὰ (π.χ. τὰ Φυσιογνωστικά, τὴν

Γεωγραφίαν, τὴν Ἱστορίαν κ.τ.λ.), ἀφ᾿ ἑτέρου δὲ ἀπὸ τὸν πρακτικὸν βίον.

Ἐπίσης οἱ ὀπαδοὶ τῆς Ἑρβαρτιανῆς σχολῆς ἐφήρμοσαν καὶ εἰς τὴν διδακτικὴν πορείαν τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας **τὰ εἰδολογικὰ στάδια.** Ὅπως εἰς ὅλα τὰ μαθήματα, εἰς ὅσα πρόκειται περὶ πνευματικῆς ἀφομοιώσεως τῆς ὕλης, ἔτσι καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν γίνεται ἡ ἐπεξεργασία τῆς ὕλης της ἀπὸ τοὺς Ἑρβαρτιανοὺς κατὰ τὰ εἰδολογικὰ στάδια.

Ὡσαύτως πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς Ἑρβαρτιανοὺς ὑποστηρίζουν τὴν γνώμην, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ δὲν σχηματίζονται διὰ τῆς ἀμέσου ἐποπτείας, ἀλλὰ διὰ **τῆς ἀπαριθμήσεως.** Προφανῶς ἡ γνώμη αὐτὴ δὲν σχετίζεται μὲ τὸν χαρακτῆρα τῆς Ἑρβαρτιανῆς Παιδαγωγικῆς. Ἐν τούτοις ὑποστηρίζεται θερμότατα ἀπὸ τοὺς ὀπαδούς της, ἰδίως δὲ ἀπὸ τὸν *Hartmann.*

Τὸ ἴδιον πρέπει νὰ λεχθῇ καὶ ὡς πρὸς **τὸ ἐποπτικὸν μέσον τῆς διδασκαλίας τῆς πρώτης ἀριθμήσεως**, τὸ ὁποῖον προκρίνουν γενικὰ οἱ Ἑρβαρτιανοί. Εἶναι δὲ αὐτὸ **τὸ ἀριθμ. κιβώτιον τοῦ *Tillich.*** Ὁ Tillich δὲν ἦτο, ὅπως εἴδαμεν, ὀπαδὸς τοῦ Ἑρβάρτου, ἀλλὰ τοῦ Πεσταλότση, μολονότι αἱ εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν ἀναφερόμεναι γνῶμαί του εἶναι ἀσυγκρίτως ὀρθότεραι ἀπὸ τὰς γνώμας τοῦ Πεσταλότση. Ἐν τούτοις τὸ κιβώτιόν του, τὸ ὁποῖον ἐν τῷ μεταξὺ εἶχε σχεδὸν ὅλως διόλου λησμονηθῇ, ἔγινε ἐκ νέου εὐρύτατα γνωστὸν ἀπὸ τοὺς ὀπαδοὺς τοῦ Stoy καὶ τοῦ Ziller, τοιουτοτρόπως δὲ ὀλίγον κατ᾿ ὀλίγον ἔχει ἀποβῆ εἰς τὴν Ἑρβαρτιανὴν σχολὴν τὸ περισσότερον ἀπὸ κάθε ἄλλο προτιμώμενον ἐποπτικὸν μέσον τῆς διδασκαλίας τῆς πρώτης ἀριθμήσεως.

Τὰ σπουδαιότατα ἀπὸ τὰ αὐτοτελῆ ἔργα τῆς Ἑρβαρτιανῆς σχολῆς, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὴν ἀριθμητ. διδασκαλίαν, εἶναι τὰ ἀκόλουθα: *B. Hartmann,* Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule vom Standpunkt des erziehenden Unterrichts, Leipzig - Frankfurt a. M., Kesselring, 4 ἔκδ., 1913.—*Rein, Pickel* u. *Scheller,* Theorie und Praxis des Volksschulunterrichts, 8 τόμοι, Leipzig, Bredt.—*Teupser,* Methodische Lehrgänge des elementaren Rechenunterrichts, 1 μέρ., Leipzig, Hahn, 1901.—*Teupser*, Wegweiser zur Bildung heimatlicher Rechenaufgaben, αὐτ., 3 ἔκδ., 1913.—*Muthesius*, Über die Stellung des Rechenunterrichts im Lehrplan der Volksschule, Leipzig, Siegismund u. Volkening.—*Bräutigam*, Der Rechenkasten von Tillich. Programm des Rechenunterrichts auf der Stufe des Kopfrechnens mit Hilfe von Tillichs Rechenkasten, Wien, Pichler, 2 ἔκδ., 1895.—*Göpfert*, Der Rechenunterricht in den drei ersten Schuljahren, Eisenach, Bacmeister, 1878.—*Hartmann* u. *Ruhsam*, Rechenbuch, Leipzig—Frankfurt a. M., Kesselring.—*Heiland* u. *Muthesius*, Rechenbuch, Weimar, Böhlau, 1892—1895. – *Hiemesch*, Präparationen für den Rechenunterricht in der Volksschule, Langensalza, Beyer u. S., 2 ἔκδ., 1914.—*Zeissig*, Algebraische Aufgaben für die Volksschule, Leipzig, Wunderlich, 2 ἔκδ., 1899.—*Haase*, Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts, Langensalza, Beyer u. S., 1906.—*Wilk*, Eine neue Methode des Rechenunterrichts, Dresden, Bleye u. Kaemmerer, 1911.

Ὅλα τώρα τὰ ἀνωτέρω μνημονευθέντα ζητήματα, τὰ ὁποῖα ἀπασχολοῦν τοὺς νεωτέρους Μεθοδικοὺς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, (ὅπως τὰ ζητήματα τῆς φύσεως καὶ τῆς γενέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τῶν αἰτίων τῶν πενιχρῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, τῆς ἁπλοποιήσεως τῆς διδασκαλίας τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐργασίας εἰς τὴν ἀριθμητ. διδασκαλίαν, τῆς σχέσεως τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων πρὸς τὰ κοινά, τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως κ. τ. λ.), καθὼς καὶ ἐκεῖνα τὰ ζητήματα, τῶν ὁποίων ἡ ἔρευνα ἔχει μὲν ἀρχίσει εἰς παλαιοτέρους χρόνους, δὲν ἠμπορεῖ ὅμως ἀκόμη νὰ θεωρηθῇ ὡς λήξασα καὶ τὰ ὁποῖα ἐμνημονεύσαμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου (σελ. 56), θὰ ἐξετάσωμεν ἀμέσως κατωτέρω εἰς χωριστὰ κεφάλαια καὶ μὲ τὴν πρέπουσαν τάξιν, πρὶν εἰσέλθωμεν εἰς τὴν ἔκθεσιν τῶν κυρίων κεφαλαίων τῆς Διδακτικῆς τῆς Ἀριθμητικῆς, τὰ ὁποῖα, ὡς γνωστόν, εἶναι πλὴν τοῦ κεφαλαίου περὶ τοῦ σκοποῦ τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας, τὸ ὁποῖον ἔχει προηγηθῆ, τὰ κεφάλαια περὶ τῆς ἐκλογῆς τῆς ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς διδακτέας ὕλης, περὶ τῆς διατάξεως τῆς ἐκλεγείσης ὕλης (ἤτοι τῆς κατανο-

μῆς της εἰς τὰ ἔτη τοῦ κατωτέρου σχολείου, τῆς ἐπαλληλίας τῆς ὕλης τοῦ κάθε σχολικοῦ ἔτους καὶ τῆς συγκεντρώσεώς της μὲ τὴν ὕλην τῶν ἄλλων μαθημάτων) καὶ περὶ τοῦ τρόπου τῆς διδακτικῆς ἐπεξεργασίας της. Πρέπει δὲ νὰ προηγηθῇ ἡ ἐξέτασις τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ζητημάτων, διότι ἀποτελοῦν στοιχεῖα τῶν κυρίων κεφαλαίων τῆς Διδακτικῆς τῆς Ἀριθμητικῆς, τὰ ὁποῖα δι' αὐτὸ δὲν ἠμποροῦμεν νὰ παρακολουθήσωμεν ἀπρόσκοπτα, ἂν δὲν ἔχωμεν προηγουμένως σχηματίσει ὡρισμένην καὶ σαφῆ γνώμην περὶ τῶν ζητημάτων ἐκείνων.

V. Η ΦΥΣΙΣ ΚΑΙ Η ΓΕΝΕΣΙΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.

1. Η ΦΥΣΙΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.

Ὁ κάθε διδάσκαλος τῆς Ἀριθμητικῆς ἀσχολεῖται τόσον πολὺ μὲ τοὺς ἀριθμούς, ὥστε θὰ ἠμποροῦσε κανεὶς νὰ νομίσῃ, ὅτι ἡ ἡ φύσις των τοῦ εἶναι γνωστοτάτη. Ἐν τούτοις δὲν συμβαίνει αὐτὸ πάντοτε. Καὶ εἶναι μὲν ἀληθές, ὅπως δεικνύει ἡ πεῖρα, ὅτι ἕνας διδάσκαλος ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ καλὰ ἀποτελέσματα εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, καὶ χωρὶς νὰ γνωρίζῃ τὴν φύσιν τοῦ ἀριθμοῦ, ἐν τούτοις εἶναι προφανέστατον, ὅτι θὰ ἠμπορῇ νὰ προχωρῇ μὲ περισσότερην ἐπίγνωσιν καὶ ἀσφάλειαν εἰς τὴν διδασκαλίαν τοῦ μαθήματος αὐτοῦ καὶ ἰδίως τῆς πρώτης ἀριθμήσεως, ἂν ἔχῃ μορφώσει ὡρισμένην γνώμην ὡς πρὸς τὸ ζήτημα αὐτό.

Μὲ τὴν ἔρευναν τώρα τοῦ προκειμένου ζητήματος ἔχουν ἀσχοληθῆ ἀπὸ τοὺς παλαιοτάτους χρόνους πλεῖστοι φιλόσοφοι καὶ μαθηματικοί, κατὰ δὲ τοὺς νεωτέρους χρόνους καὶ πολλοὶ Μεθοδικοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἐν τούτοις ἡ ἔρευνα αὐτὴ δὲν ἔχει καταλήξει ἕως τώρα εἰς πορίσματα τελείως ἀσφαλῆ.

Ἂς ἴδωμεν πρῶτα τὰς σχετικὰς ἀντιλήψεις μερικῶν ***φιλοσόφων***.

Ὁ ***Πυθαγόρας*** ἐθεωροῦσε τὸν ἀριθμὸν ὡς τὴν οὐσίαν καὶ τὴν ἀρχὴν τῶν ὄντων, ὡς κάτι αἰώνιον. Καὶ αὐτὸς καὶ οἱ ὀπαδοί του ἐπίστευαν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι κάτι, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει παρὰ τὰ ἀντικείμενα καὶ ὑπὲρ τὰ ἀντικείμενα.

Ὁ ***Ἀριστοτέλης*** ἐξ ἄλλου δὲν ἐθεωροῦσε τὸν ἀριθμόν, ὅπως ὁ Πυθαγόρας, ὡς κάτι αὐτοτελῶς ὑφιστάμενον, ἀλλὰ ὡς κατηγόρημα τῶν ἀντικειμένων, καθὼς εἶναι π. χ. ἡ μορφὴ καὶ τὸ χρῶμα. [Ὁ ἀριθμὸς κατὰ τὴν γνώμην του εἶναι «πλῆθος μεμετρημένον (διὰ τοῦ ἑνὸς ὡς μέτρου) καὶ πλῆθος μέτρων». Φρονεῖ δὲ ἐπίσης ἀδιστάκτως ὁ Ἀριστοτέλης, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ προϋπόθεσις τοῦ χρόνου, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ «ἀριθμὸς κινήσεως κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον», εἶναι «τὸ ἀριθμούμενον καὶ οὐχ ᾧ ἀριθμοῦμεν», δὲν ἠμπορεῖ δὲ νὰ ὑπάρχῃ «ψυχῆς μὴ οὔσης»· διότι τὸ ἀριθμεῖν ἠμπορεῖ νὰ γίνεται μόνον διὰ ψυχῆς ἀριθμούσης].

Κατὰ τὸν ***Κάντιον*** *πάλιν* ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἔννοια, ἡ ὁποία συμπεριλαμβάνει τὴν διαδοχικὴν πρόσθεσιν τῆς μονάδος εἰς ὁμοειδῆ μονάδα, ἤτοι ἡ ἔννοια τῆς ἑνότητος ὁμοειδῶν ἐποπτειῶν διαδοχικῶς ἐμφανιζομένων εἰς τὴν συνείδησιν. [Εἶναι δὲ ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ τὸν Κ. ἐντελῶς ὑποκειμενικὴ καὶ ὅλως διόλου ἄσχετη πρὸς τὰ πράγματα, ὅπως καθ' ἑαυτὰ ἔχουν. Οἱ λόγοι δὲ τῆς ὑποκειμενικότητός της εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ γεγονός, ὅτι ἡ εἰς ἑνότητα σύνδεσις τῶν ὁμοειδῶν ἐποπτειῶν ὀφείλεται εἰς ἰδιάζουσαν ἱκανότητα τῆς νοήσεώς μας, ἐνυπάρχουσαν εἰς αὐτὴν ἐκ τῶν προτέρων καὶ ἀσχέτως πρὸς ὁποιανδήποτε ἐμπειρίαν, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ γεγονός, ὅτι καὶ ἡ ἱκανότης αὐτὴ τῆς νοήσεώς μας δὲν θὰ ἠμποροῦσε νὰ πραγματωθῇ, ἂν αἱ ὁμοειδεῖς ἐποπτεῖαι δὲν ἐγίνοντο εἰς τὴν συνείδησίν μας ἀντιληπταὶ ὡς ἐμφανιζόμεναι διαδοχικά, ἤτοι ἐν χρόνῳ, πρᾶγμα πάλιν, τὸ ὁποῖον κατὰ τὸν Κ. ὀφείλεται εἰς τὴν ἐκ τῶν προτέρων καὶ ἀσχέτως πρὸς κάθε ἐμπειρίαν ἐνυπάρχουσαν εἰς τὴν ψυχήν μας ἱκανότητα νὰ ἀντιλαμβάνεται τὰ πράγματα ἐν χρόνῳ. Ἀσχέτως τώρα πρὸς τὸ ζήτημα τῆς ὑποκειμενικότητος τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ Κ. θεωρεῖ ὡς προϋπόθεσιν τοῦ σχηματισμοῦ της τὴν ἀντίληψιν τοῦ χρόνου]. Ἂν δὲν ἐπωπτεύαμεν τὰ πράγματα ἐν χρόνῳ, δὲν θὰ ἠμπορούσαμεν νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ. Ἔτσι ὁ Κάντιος ἀντιλαμβανόμενος τὸν χρόνον ὡς

προϋπόθεσιν τοῦ ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εἰς πλήρη ἀντίθεσιν μὲ τὸν Ἀριστοτέλη.

Προχωρῶν περισσότερον ἀπὸ τὸν Κάντιον ὁ Ἄγγλος φιλόσοφος ***Χάμιλτων*** [θεωρεῖ τὸν χρόνον ὄχι πλέον προϋπόθεσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλὰ οὐσιῶδες γνώρισμά της, δι' αὐτὸ δὲ καὶ] ὀνομάζει τὴν μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς ἀρίθμησιν «ἐπιστήμην τοῦ καθαροῦ χρόνου» (the science of pure time).

Ἀλλὰ καὶ ὁ *Shopenhauer* καλεῖ τὸν ἀριθμὸν «καθαρὰν ἐποπτείαν τοῦ χρόνου». Ὅπως δὲ ὁ Κάντιος καὶ κατόπιν ὁ Wundt, θεωρεῖ τὸν ἀριθμὸν ὄχι ὡς αὐτοτελὲς ὄν, καθὼς ἐδόξαζεν ὁ Πυθαγόρας, οὔτε ὡς κατηγόρημα τῶν ὄντων, ὅπως ἐφρόνει ὁ Ἀριστοτέλης, ἀλλ' ὡς μορφὴν τῆς ἀνθρωπίνης ἐποπτείας καὶ ἀντιλήψεως τῶν ἀντικειμένων, μὴ ὑφισταμένην εἰς τὸν ἐξωτερικὸν κόσμον.

Ὁ *Wundt* θεωρεῖ τὸν ἀριθμὸν ὡς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ὑπολείπεται εἰς τὴν ψυχήν μας ὡς σταθερὸν μετὰ τὸν ἀποχωρισμὸν κάθε ποιοτικοῦ στοιχείου, ἤτοι τὴν ἀσχέτως πρὸς κάθε περιεχόμενον γινομένην σύνδεσιν τῶν καθ' ἕκαστον ἐνεργειῶν τῆς νοήσεως.

Οἱ μέχρι τοῦδε μνημονευθέντες φιλόσοφοι συσχετίζουν σχεδὸν ὅλοι τὸν ἀριθμὸν μὲ ***τὸν χρόνον***. Ἀντίθετην μὲ αὐτοὺς γνώμην ἔχει ὁ *Herbart*, ὁ ὁποῖος παρατηρεῖ ἐν σχέσει μὲ τὸ προκείμενον ζήτημα τὰ ἀκόλουθα: «Μολονότι θὰ ἠμποροῦσε νὰ γίνῃ ἀποδεκτόν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ σχηματίζονται διὰ διαδοχικῆς προσθέσεως τῶν μονάδων, ἐν τούτοις μὲ κανένα τρόπον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐξαχθῇ ἀπὸ αὐτό, ὅτι εἰς τὰς παραστάσεις τῶν ἀριθμῶν περιλαμβάνεται ὁποιονδήποτε στοιχεῖον ὑπενθυμίζον καθορισμὸν τοῦ χρόνου ἢ διαδοχήν. Ἀπεναντίας ὁ ἀριθμὸς ἀπαιτεῖ τὸν τελειότατον συγχρονισμὸν καὶ ἐξαλείφει ὅλως διόλου τὴν διαδοχὴν τῆς ἀπαριθμήσεως, μὲ τὴν ὁποίαν ἴσως φθάνομεν εἰς αὐτόν. Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει μὲ τὸν χρόνον τίποτα περισσότερον τὸ κοινὸν ἀπὸ πλείστας ἄλλας παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι ἐπίσης ἠμποροῦν νὰ σχηματισθοῦν μόνον βαθμιαίως».—Ὡς ἐπιστημονικὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ θεωρεῖ ὁ Herbart τὴν ἔννοιαν τοῦ «περισσοτέρου ἢ ὀλιγωτέρου».

Ὁ ***Volkmann***, τοῦ ὁποίου ἡ Ψυχολογία στηρίζεται εἰς τὰς ἀρχὰς τοῦ Herbart, παρατηρεῖ τὰ ἀκόλουθα περὶ τῶν παραστάσεων τῶν ἀριθμῶν: «Ἡ παράστασις ἑνὸς ἀριθμοῦ προϋποθέτει πρῶτα τὴν ὕπαρξιν μιᾶς σειρᾶς, τῆς ὁποίας τὰ μέλη εἶναι κατὰ ποιὸν ὅμοια ἢ τοὐλάχιστον θεωροῦνται ὡς ὅμοια, δεύτερον τὴν ἀντίληψιν καὶ τὴν συγκράτησιν τῆς παραστάσεως ἑνὸς ἀπὸ τὰ μέλη αὐτά, τρίτον τὴν καταμέτρησιν τῆς σειρᾶς διὰ τοῦ συγκρατηθέντος αὐτοῦ μέλους καὶ τέλος τὴν συμπερίληψιν τῶν μετρήσεων εἰς ἕνα σύνολον». (Volkmann, Lehrbuch der Psychologie, τ. 2, σελ. 113).

Ὅπως ὁ Herbart, ἔτσι καὶ ὁ *Baumann* καὶ ὁ *Lange* ἀποκρούουν τὸν χρονικὸν χαρακτῆρα τοῦ ἀριθμοῦ. Καὶ οἱ δύο τονίζουν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς συνδέεται πολὺ περισσότερον μὲ τὴν παράστασιν τοῦ χώρου παρὰ μὲ τὴν παράστασιν τοῦ χρόνου.

Ἐν ἀντιθέσει μὲ τὰς ἀντιλήψεις τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους, τοῦ Καντίου καὶ τοῦ Schopenhauer ὁ *Dühring* ἔχει τὴν γνώμην, ὅτι ἀριθμὸς καὶ πράγματα εἶναι ταυτόσημα καὶ ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ πολλότης, ἡ πληθὺς τῶν πραγμάτων.

[Κρίνομεν περιττὸν νὰ παραθέσωμεν τὰς γνώμας καὶ ἄλλων φιλοσόφων, διότι μὲ τὴν παράθεσιν αὐτὴν θὰ αὐξήσωμεν μόνον τὴν ποικιλίαν τῶν σχετικῶν γνωμῶν, ἡ ὁποία μολοντοῦτο δὲν μᾶς διαφωτίζει πολὺ ὡς πρὸς τὸ ζήτημα τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁρισμοὶ τοῦ ἀριθμοῦ μεταφυσικῆς φύσεως, ὅπως εἶναι ὁ ὁρισμὸς τῶν Πυθαγορείων, μᾶς εἶναι ἐντελῶς ἄχρηστοι. Ἀλλ' ἐπίσης δὲν μᾶς διαφωτίζουν καὶ οἱ ὁρισμοὶ ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἐνδιατρίβουν εἰς τὰς προϋποθέσεις τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁποῖαι θεωροῦνται ἡ χρονικὴ διαδοχὴ ἢ ἡ τοπικὴ παραλληλία ἢ καὶ τὰ δύο, ἢ μάλιστα καὶ παρουσιάζουν τὰς προϋποθέσεις αὐτὰς ὡς στοιχεῖα τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ὁρισμὸς πάλιν τοῦ Ἀριστοτέλους, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον ὁ ἀριθμὸς εἶναι πλῆθος μεμετρημένον διὰ τοῦ ἑνὸς ὡς μέτρου καὶ πλῆθος μέτρων, ὁρισμός, ὁ ὁποῖος εἶναι πράγματι ὁ οὐσιαστικώτερος ἀπὸ ὅλους, ὅσους εἴδαμεν, ἔχε τὸ μειονέκτημα, ὅτι ὁρίζει διὰ τοῦ ὁριστέου, διότι τὸ πλῆθος, διὰ τοῦ ὁποίου ὁρίζεται ὁ ἀριθμός, εἶναι πάλιν ἀριθμὸς (ἀόριστος ἀριθμός).

Τὸ μειονέκτημα τοῦ Ἀριστοτελείου ὁρισμοῦ ἔχουν σχεδὸν καὶ ὅλοι οἱ ὁρισμοὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅσοι ἔχουν διατυπωθῆ ἀπὸ Μαθηματικοὺς καὶ ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἄλλωστε μερικοὶ εἶναι ἐπανάληψις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους]. Παραλαμβάνοντες ἀπὸ τὸν Hartmann (ὅπ. ἀν., σελ. 278) παραθέτομεν ἐδῶ τοὺς ὁρισμοὺς 10 Μαθηματικῶν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος:

1. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι διακεκριμένον (ἀσυνεχὲς) μέγεθος (Voigt, 1791).

2. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ σχέσις, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἕνα μέγεθος πρὸς ἕνα ἄλλο, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς (Euler, 1796).

3. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ παράστασις πλήθους ὁμοειδῶν πραγμάτων (Vieth, 1805).

4. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ τρόπος τῆς θέσεως ἑνὸς μεγέθους (τῆς μονάδος), διὰ τοῦ ὁποίου σχηματίζεται ἕνα ἄλλο μέγεθος (ἡ πληθὺς) (Thibaut, 1822).

5. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἔκφρασις ὡρισμένου βαθμοῦ τῆς ποικιλίας τῶν παραστάσεών μας ἢ ἡ παράστασις ὡρισμένου πλήθους (Kries, 1844).

6. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι τὸ καθορίζον τὸ πλῆθος ὁμοειδῶν πραγμάτων (Baltzer, 1860).

7. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἔννοια ἑνὸς πλήθους ὁμοειδῶν μεγεθῶν (Trappe, 1868).

8. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ παράστασις τῆς καθαρᾶς πληθύος, ὅπως σχηματίζεται ἀπὸ τὴν μονάδα, ἀπὸ τὸ ἕνα, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως (Kambly, 1872).

9. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὡρισμένη (διὰ τῆς μονάδος μετρηθεῖσα) πληθὺς (Schüller, 1891).

10. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι πληθύς, μετρηθεῖσα διὰ τῆς μονάδος (Brenner, 1892).

Ἐκτὸς τῶν φιλοσόφων καὶ τῶν μαθηματικῶν ἐπροσπάθησαν νὰ ἑρμηνεύσουν τὴν φύσιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους καὶ ἀρκετοὶ Μεθοδικοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς, λαβόντες εἰς αὐτὸ ἀφορμὴν κυρίως ἀπὸ τὴν ἔρευναν τοῦ ζητήματος τῆς γενέσεώς του. [Εἶναι δὲ ἄξιον σημειώσεως, ὅτι αἱ προσπάθειαι αὐταὶ τῶν Μεθοδικῶν ἔχουν συντελέσει ἀρκετὰ εἰς τὴν διασάφησιν τοῦ ζητήματος, τὸ ὁποῖον μᾶς ἀπασχολεῖ].

Ἀξιολογώταται εἶναι ἐν πρώτοις αἱ σχετικαὶ ἔρευναι τοῦ *Beetz*, τὰς ὁποίας ἔχει ἐκθέσει εἰς τὰ ἔργα του «Das Wesen der Zahl als Einheitsprincip im Rechenunterricht» (1897) καὶ «Das Typenrechnen auf psychophysischer Grundlage» (1899). [Ὁ Beetz ἔχων πρὸ ὀφθαλμῶν, ὅτι, ὅταν γίνεται λόγος περὶ ἐννοιῶν, λαμβάνονται συνήθως ὑπ᾽ ὄψει μόνον αἱ ἔννοιαι τῆς ποιότητος, τῶν ὁποίων περιεχόμενον εἶναι τὰ κοινὰ ποιοτικὰ γνωρίσματα τῶν καθ᾽ ἕκαστον πραγμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται, ἐφιστᾷ τὴν προσοχήν μας εἰς τὸ γεγονός, ὅτι ἐκτὸς τῶν ἐννοιῶν τῆς ποιότητος ὑπάρχουν καὶ ἔννοιαι τῆς σχέσεως ἢ ἀναφορᾶς, τῶν ὁποίων περιεχόμενον εἶναι μία ἢ περισσότεραι σχέσεις τῶν πραγμάτων αὐτῶν. Ἐξετάζων τώρα τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπὸ λογικῆς καὶ ἀπὸ ψυχολογικῆς ἀπόψεως εὑρίσκει, ὅτι ἀνήκει εἰς τὰς ἐννοίας τῆς σχέσεως ἢ ἀναφορᾶς. Εἶναι δὲ ἡ σχέσις, τὴν ὁποίαν παριστάνει, ἡ σχέσις τοῦ πλήθους, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται καθ᾽ ἕκαστον ὅμοια ἢ ὡς ὅμοια λαμβανόμενα πράγματα. Τοιαύτη οὖσα ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ δὲν εἶναι δημιούργημα ἰδιαιτέρου τινὸς τρόπου ἀντιλήψεως τῆς ψυχῆς, μὲ τὸν ὁποῖον εἶναι προικισμένη ἐκ τῶν προτέρων, ἀλλὰ εἶναι προϊὸν τῆς συνεργασίας τῆς ἐμπειρίας καὶ τῆς νοήσεως. Ἐξάγεται ἀπὸ τὰς ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐμπειρίας σχηματιζομένας ἐποπτείας καὶ παραστάσεις ὁμοίων πραγμάτων δι᾽ ἀφαιρέσεως τῆς σχέσεως τοῦ πλήθους, τῆς ὑπαρχούσης μεταξὺ αὐτῶν. Πρέπει νὰ ὑποπέσουν διαδοχικὰ εἰς τὴν κατ᾽ αἴσθησιν ἀντίληψιν διάφορα ὅμοια πράγματα εὑρισκόμενα εἰς τὴν αὐτὴν σχέσιν τοῦ πλήθους καὶ νὰ ἐξακριβωθῇ κάθε φορὰν ἐπάνω εἰς τὰ ἐποπτευόμενα πράγματα ἡ σχέσις αὐτή, διὰ νὰ ἠμπορέσῃ ὀλίγον κατ᾽ ὀλίγον ἡ νόησις νὰ τὴν ἀποχωρίσῃ ἀπὸ τὰ πράγματα καὶ τὰς ποιότητάς των, νὰ τὴν λάβῃ μόνην της ὑπ᾽ ὄψει καὶ ἔτσι νὰ σχηματίσῃ ἀπὸ αὐτὴν τὴν ἔννοιαν τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ]. Εἶναι δὲ ὁ Beetz τῆς γνώμης, ὅτι, ὅπως τὰ πράγματα τὰ συνδεόμενα διὰ τῆς σχέσεως τοῦ πλήθους, ἔτσι καὶ ἡ σχέσις αὐτὴ γίνεται ἀντιληπτὴ δι᾽ ἀμέσου ἐποπτείας. Προφανὲς δὲ εἶναι κατόπιν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω, ὅτι διὰ τὸν Beetz ἀριθμός, ἐποπτεία ἀριθμοῦ, παράστασις ἀριθμοῦ καὶ ἔννοια ἀριθμοῦ εἶναι ταυτόσημα.

Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸν Beetz ὁ *Tanck* (Das Zählen und erste Rechnen, 2 ἐντελῶς διασκευασμένη ἔκδοσις τοῦ ἔργου του τοῦ 1884 «Das Rechnen auf der Unterstufe», Kiel, 1906)

εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ δὲν εἶναι προϊὸν καὶ τῆς ἐμπειρίας, δὲν σχηματίζεται ἀπὸ τὰς κατ᾽ αἴσθησιν ἐποπτείας δι᾽ ἀφαιρέσεως, ἀλλ᾽ εἶναι ἀποκλειστικὸν δημιούργημα μιᾶς ἐφευρέσεως τῆς νοήσεως, τῆς ἐφευρέσεως τῆς ἀπαριθμήσεως. Δὲν ὑπάρχει τίποτε εἰς τὰ πράγματα τῆς ἐμπειρίας, τὸ ὁποῖον νὰ ἀνταποκρίνεται εἰς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως. «Αἱ ἔννοιαι τῶν ἀριθμῶν», λέγει ὁ Tanck, «δὲν προέρχονται, ὅπως αἱ ἔννοιαι τοῦ χρώματος, τῆς μορφῆς, τῆς κινήσεως, τοῦ ἤχου κ. τ. λ., ἐξ αἰσθητικῶν ἐντυπώσεων, δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ δὲν συγκρατοῦνται καὶ δὲν παριστάνονται, ὅπως αἱ ἔννοιαι ἐκεῖναι». [Ὁ ἀριθμὸς εἶναι κατὰ τὸν Tanck «ἡ διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως καθοριζομένη ἀπόκρισις εἰς τὸ ἐρώτημα «πόσα ;». Ἡ ἀπαρίθμησις εἶναι κατὰ τὴν ἀντίληψίν του τὸ σπέρμα καὶ ἡ βάσις ὅλης τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.«Με τὴν ἄμεσον ἐποπτείαν», παρατηρεῖ, «δὲν ἠμποροῦμεν νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ. Μὲ τὰς αἰσθήσεις δὲν θὰ ἔφθανε ὁ ἄνθρωπος κατὰ πᾶσαν πιθανότητα εἰς ἀνωτέρας ἀριθμητικὰς ἐννοίας ἀπὸ τὸ ζῷον. Ἀφότου ὅμως ἄρχισε νὰ ἀπαριθμῇ, ἐπάτησε εἰς μίαν κλίμακα, ἡ ὁποία ὁδηγεῖ κυριολεκτικῶς εἰς τὸ ἄπειρον». Δὲν πρέπει ἐπομένως νὰ γίνεται λόγος περὶ ἐποπτειῶν καὶ παραστάσεων, ἀλλὰ μόνον περὶ ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν. Ἀριθμὸς καὶ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Tanck ταυτόσημα.

Ὁμοίαν μὲ τὸν Tanck γνώμην περὶ τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ διατυπώνει καὶ ὁ *Knilling* εἰς τὸ ἔργόν του «Zur Reform des Rechenunterrichts in den Volksschulen» (2 μέρη, München, Ackermann, 1884—1886). Ὑποστηρίζει δηλαδὴ εἰς αὐτό, ὅτι αἱ ἔννοιαι τῶν ἀριθμῶν δὲν σχηματίζονται ἀπὸ τὰ πράγματα ἢ τὰ γνωρίσματά των δι᾽ ἀφαιρέσεως, δὲν προέρχονται ἐν γένει ἀπὸ τὰ ἐξωτερικὰ ἀντικείμενα, ἀλλὰ γεννῶνται διὰ μιᾶς δημιουργικῆς ἐνεργείας τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, τῆς ἀπαριθμήσεως. Δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ ἡ ἀπαρίθμησις γίνεται ὅλως διόλου μηχανικά. Ἐν τούτοις ὁ Knilling εἰς τὸ ἀργότερα ἐκδοθὲν ἔργον του «Die naturgemässe Methode des Rechenunterrichts» (1 μέρος, Αἱ ψυχολογικαὶ βάσεις, München, 1897), ἐπηρεασθεὶς προφανῶς ἀπὸ τὴν ἀντίληψιν τοῦ φιλοσόφου Dühring, τὴν ὁποίαν εἴδαμεν ἀνωτέρω καὶ σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν ἀριθμὸς καὶ πράγματα εἶναι ταυτόσημα, ὑποστηρίζει διαφορετικὴν γνώμην ἀπὸ τὴν προηγουμένην]. «Ὁ ἀριθμός», παρατηρεῖ εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ὁ Knilling, «φαίνεται κατ᾽ ἀρχὰς ὡς πλειονότης ἢ πολλότης πραγμάτων. Ἔτσι ὁ δύο μᾶς φαίνεται ὡς ἕνα πρᾶγμα καὶ ἀκόμη ἕνα, ὁ τρία ὡς ἕνα πρᾶγμα καὶ ἀκόμη ἕνα καὶ ἀκόμη ἄλλο ἕνα. Δι᾽ αὐτὸ βλέπομεν, ὅτι εἴμεθα ἀναγκασμένοι νὰ ταυτίσωμεν τὸν ἀριθμὸν μὲ τὰ πράγματα. Ἐξετάζοντες ὅμως ἀκριβέστερα τὸ πρᾶγμα ἐξακριβώνομεν, ὅτι τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ἀριθμόν, εὑρίσκονται καὶ εἰς μίαν πραγματικὴν ἢ τοὐλάχιστον νοητὴν σχέσιν, δηλαδὴ εἰς τὴν σχέσιν τῆς συνυπάρξεως, τοῦ συνδέσμου, τῆς ἑνώσεως. Δι᾽ αὐτὸ ἀναγκαζόμεθα νὰ παραδεχθῶμεν εἰς τὸ τέλος, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι καὶ πράγματα, ἀλλὰ καὶ ἕνα ἰδιάζον εἶδος σχέσεων, ὅτι δηλ. εἶναι καὶ ἔννοιαι ἀντικειμένων καὶ ἔννοιαι ἀναφορᾶς». Σύμφωνα μὲ τὴν ἀντίληψιν αὐτὴν ἀριθμός, παράστασις ἀριθμοῦ καὶ ἔννοια ἀριθμοῦ εἶναι κατὰ τὸν Knilling ταυτόσημα.

Μὲ τὸν Tanck ἐπίσης εἶναι σύμφωνοι ὁ *Knoche*, [ὁ *Sachse*, ὁ *Griese* καὶ ἀρκετοὶ ἄλλοι Μεθοδικοί. Ὁ τελευταῖος ἀπὸ αὐτούς, ὁ Griese (Zeit und Zahl, Weimar, 1907), ἐπικαλούμενος τὸν Κάντιον καὶ τὸν Shopenhauer καὶ φρονῶν, ὅτι ἡ μόνη κατάλληλη ἀριθμητικὴ συσκευὴ διὰ τοὺς παῖδας εἶναι ἡ νόησις καὶ μέσον της «ἡ ἐκ τῶν προτέρων δεδομένη εἰς τὴν ψυχὴν δεξιότης τῆς ἐποπτείας τοῦ χρόνου», ὑποστηρίζει, ὅτι ἡ ἀπαρίθμησις πρέπει νὰ διδάσκεται ὄχι ἐπάνω εἰς συγκεκριμένα ἀντικείμενα, ἀλλὰ διὰ τῆς προόδου ἀπὸ τοῦ ὀνόματος τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸ ὄνομα τοῦ ἑπομένου].

Ἀπεναντίας παραπλησίαν μὲ τὸν Beetz γνώμην περὶ τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ὁ *Räther* (ὅπ. ἀν., μέρ. 1), ὁ ὁποῖος, ὅπως καὶ ὁ Beetz, ἐξετάζει τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ λογικῆς καὶ ἀπὸ ψυχολογικῆς ἀπόψεως.

[Ἐξετάζων τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ **λογικῆς** ἀπόψεως ὁ Räther παρατηρεῖ πρῶτα, ὅτι ὁ ἀριθμὸς δὲν ὑπάρχει πουθενὰ εἰς τὸν ἐξωτερικὸν κόσμον ὡς συγκεκριμένον ἀντικείμενον, ὑποπῖπτον εἰς τὴν κατ᾽ αἴσθησιν ἀντίληψίν μας, ἀλλ᾽ ὑφίσταται μόνον εἰς τὴν νόησίν μας. Ὅ,τι ἔχομεν ἑπομένως εἰς τὴν ψυχήν μας περὶ τοῦ ἀριθμοῦ, δὲν εἶναι παράστασις εἰς τὴν στενωτέραν τῆς λέξεως

σημασίαν, ἤτοι πνευματικὴ εἰκὼν ἀντιπροσωπεύουσα ἐκλιποῦσαν αἰσθητικὴν ἐποπτείαν, ἀλλὰ **ἔννοια,** ἤτοι παράστασις εἰς τὴν εὐρυτέραν σημασίαν τῆς λέξεως. Ἡ ὕπαρξις τώρα ἀριθμητικῶν ὡρισμένων (δύο, τρία, τέσσερα κ.λ.π.), καὶ ἀορίστων (πολλά, ὀλίγα, κάμποσα, μερικὰ κ.τ.λ.), εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν ὡρισμένοι καὶ ἀόριστοι ἀριθμοί, καθιστοῦν φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ διακρίνωμεν **ἔννοιαν ὡρισμένου καὶ ἔννοιαν ἀορίστου** ἀριθμοῦ, αἱ ὁποῖαι συνενώνονται εἰς τὴν ἀνωτέραν ἔννοιαν **τοῦ ἀριθμοῦ ἐν γένει.** Ἐρχόμενος μετὰ τοῦτο ὁ Räther εἰς τὴν **λογικὴν ἀνάλυσιν** τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν ἐρευνᾷ τὸ βάθος, ἤτοι τὰ οὐσιώδη γνωρίσματα τῆς καθεμιᾶς καὶ πρῶτα τῆς ἐννοίας τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ. Ὅ,τι ἀμέσως παρατηροῦμεν, ὅταν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν, π. χ. τὸν 3, εἶναι, ὅτι δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τὸν νοήσωμεν ὡς κάτι ὑπάρχον καθ᾽ ἑαυτό, ἀλλὰ πάντοτε ἐν συνδυασμῷ μὲ κάποια **πράγματα,** π. χ. μὲ 3 στιγμάς, 3 γραμμάς, 3 σταυροὺς κ.τ.λ. Ἀλλ᾽ ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα ἔχομεν εἰς τὸν νοῦν μας, ὅταν νοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 3, εἶναι **ὅμοια**, δηλαδὴ ἢ μόνον 3 στιγμαὶ ἢ μόνον 3 γραμμαὶ ἢ μόνον 3 σταυροὶ κ.τ.λ. Ἐν τούτοις ἐξετάζοντες τὸ πρᾶγμα προσεκτικώτερα βλέπομεν, ὅτι μὲ τὸν ἀριθμὸν 3 ἠμποροῦμεν νὰ παραστήσωμεν καὶ 3 ἀνόμοια πράγματα (π. χ. μίαν στιγμήν, μίαν γραμμὴν καὶ ἕνα σταυρόν), ἀρκεῖ μόνον νὰ τὰ ὑπαγάγωμεν ὑπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καὶ ἔτσι νὰ τὰ θεωρήσωμεν ὡς ὅμοια (π. χ. νὰ θεωρήσωμεν τὴν στιγμήν, τὴν γραμμὴν καὶ τὸν σταυρὸν ὡς σημεῖα). Εἰς τὸ τέλος ἠμποροῦμεν μὲ τὸν ὡρισμένον ἀριθμὸν νὰ νοοῦμεν καὶ τὰ διαφορώτατα καὶ τὰ μᾶλλον ἀσύγκριτα πράγματα, ἀρκεῖ νὰ τὰ ὑπαγάγωμεν εἰς τὴν ἔννοιαν **«τί»** ἢ **«ὄν»**, εἰς τὴν ὁποίαν ἕνεκα τῆς γενικότητός της ἠμποροῦν νὰ ὑπαχθοῦν ὅλα τὰ πράγματα. Μὲ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν ἀρκεῖται ἡ ἔννοια τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ. Κάμνει ἀφαίρεσιν ὅλων τῶν ποιοτήτων τῶν πραγμάτων, καθὼς τῆς μορφῆς, τοῦ χρώματος, τοῦ μεγέθους, τῆς ὕλης κ.τ.λ., δὲν ἠμπορεῖ ὅμως νὰ ἀποχωρισθῇ καὶ ἀπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ὄντος. Σημειωτέον ὅμως, ὅτι αἱ ἀφαιρούμεναι ποιότητες πρέπει νὰ ὑπάρχουν, διότι χωρὶς αὐτὰς δὲν ἠμπορεῖ νὰ νοηθῇ κανὲν πρᾶγμα καὶ χωρὶς πράγματα κανεὶς ἀριθμός. Ἡ ἔννοια λοιπὸν «τινὰ» ἢ «ὄντα» εἶναι ἕνα γνώρισμα τῆς ἐννοίας τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ. Ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς εἶναι «ὄντα». Δεύτερον γνώρισμά του εἶναι, ὅτι τὰ ὄντα του συμπεριλαμβάνονται ἀσύγχυτα εἰς ἕνα σύνολον, δυνάμενον νὰ διακριθῇ καθαρὰ ἀπὸ κάθε ἄλλο. Ἕνα ὂν καὶ ἕνα ὂν καὶ ἕνα ὂν εἶναι **τρία ὄντα**. Ἡ συμπερίληψις δεικνύεται μὲ τὴν ἐμφάνισιν τοῦ ἀριθμοῦ «τρία» καὶ μὲ μίαν γλωσσικὴν συντόμευσιν, καθόσον τὸ ὄνομα «ὂν» παρουσιάζεται μίαν μόνον φοράν, ἐνῷ πρῶτα παρουσιάζετο 3 φοράς. Χωρὶς τὸν ἀριθμὸν «τρία» ἡ συμπερίληψις ἠμπορεῖ μόνον νὰ ὑποσημανθῇ, γίνεται δὲ ἡ ὑποσήμανσις μὲ τὸν σύνδεσμον «καί». Εἶναι δὲ ἡ προκειμένη συμπερίληψις τέτοια, ὥστε τὰ καθ' ἕκαστον πράγματα δὲν συνέρχονται εἰς ἕνα γενικώτερον πρᾶγμα, δὲν ἀποτελοῦν κατιτὶ συνεχές, (ὅπως π. χ. συμβαίνει, ὅταν συμπεριλαμβάνωμεν τὸ μῆλον, τὸ σῦκον, τὸ ἀπίδιον κ.τ.λ. εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ καρποῦ), ἀλλά, μολονότι ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον, ἐξακολουθοῦν νὰ νοοῦνται ἀσύγχυτα, δηλ. καὶ ὡς καθ' ἑαυτὰ ὑπάρχοντα. Ἄλλο τώρα γνώρισμα ἐκτὸς ἀπὸ τὰ 2 μνημονευθέντα δὲν ἔχει ἡ ἔννοια τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ, μὲ αὐτὰ δὲ πρέπει νὰ ἀντιλαμβάνεται καὶ ἡ διδασκαλία τὴν φύσιν του. Φυσικὰ δὲ ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ γνωρίσματα τὸ οὐσιωδέστερον εἶναι τὸ δεύτερον, καθόσον συμπεριλαμβάνει καὶ τὸ πρῶτον. — Ποῖον εἶναι τώρα τὸ βάθος τῆς ἐννοίας τοῦ ἀορίστου ἀριθμοῦ; Ἕνα γνώρισμα καὶ τῆς ἐννοίας αὐτῆς εἶναι τὸ γνώρισμα «ὄντα». Ὅπως οἱ ὡρισμένοι, ἔτσι καὶ οἱ ἀόριστοι ἀριθμοὶ ἠμποροῦν νὰ νοηθοῦν μόνον ἐν συνδυασμῷ μὲ πράγματα. Ὑπάρχουν ἑπομένως μόνον συγκεκριμένοι ἀριθμοί. Ὅ,τι καλοῦμεν ἀφῃρημένους ἀριθμούς, δὲν εἶναι παρὰ ἀριθμοί, ἐπὶ τῶν ὁποίων δὲν ὀνομάζονται οἱ ἀντιπρόσωποί των. Ὡς δεύτερον τώρα γνώρισμα ἔχει ἡ ἔννοια τοῦ ἀορίστου ἀριθμοῦ, ὅτι, ὅπως τὰ ὄντα τοῦ ὡρισμένου, ἔτσι καὶ τὰ ἰδικά της συμπεριλαμβάνονται ἀσύγχυτα εἰς ἕνα σύνολον, μὲ τὴν διαφορὰν ὅμως, ὅτι ἡ συμπερίληψις δὲν γίνεται ἔτσι, ὥστε τὸ ἐξ αὐτῆς προερχόμενον σύνολον νὰ διακρίνεται καθαρὰ ἀπὸ κάθε ἄλλο. Ὁ ἀόριστος π. χ. ἀριθμὸς «πολλὰ» εἶναι «ἕνα ὂν καὶ ἕνα ὂν καὶ ἕνα ὂν κ.τ.λ.». Αὐτὸ τὸ **κ.τ.λ.** εἶναι τὸ οὐσιῶδες εἰς τὸν ἀόριστον ἀριθμ ν. Μὲ αὐτὸ δηλώνεται, ὅτι δὲν ἐπιχειρεῖται ἀκριβὴς διάκρισις τοῦ προκειμένου συνόλου. — Τὸ βάθος τώρα τῆς γενικῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται προφα-

νῶς ἀπὸ τὰ γνωρίσματα τῶν ὄντων καὶ τῆς ἀσυγχύτου συμπεριλήψεώς των εἰς ἕνα σύνολον. Ἀριθμὸς ἐν γένει εἶναι ὄντα συμπεριλαμβανόμενα ἀσύγχυτα εἰς ἕνα σύνολον ἢ ἡ ἀσύγχυτη συμπερίληψις ὄντων εἰς ἕνα σύνολον. Ἔννοια ἔχουσι τόσον στενὸν βάθος θὰ ἔχῃ εὐρύτατον πλάτος. Τὸ πλάτος της εἶναι ἀπείρως μεγάλον. Περιλαμβάνει ὅλα τὰ πράγματα, καὶ τὰ πραγματικὰ καὶ τὰ δυνατὰ καὶ τὰ νοητὰ καὶ τὰ βουλητὰ κ.τ.λ.

Ἐρχόμενος κατόπιν ὁ Räther εἰς τὴν ἐξέτασιν τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ **ψυχολογικῆς** ἀπόψεως, ἡ ὁποία ἀφορᾷ κυρίως τὸ ζήτημα τῆς γενέσεως, τοῦ τρόπου τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, παρατηρεῖ, ὅτι τὸ οὐσιωδέστερον γνώρισμα τοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι τὸ γνώρισμα τῆς ἀσυγχύτου συμπεριλήψεως τῶν ὄντων του εἰς ἕνα σύνολον, δὲν σημαίνει τίποτε ἄλλο παρὰ ἁπλούστατα, ὅτι τὰ ὄντα αὐτὰ εὑρίσκονται εἰς μίαν **σχέσιν**, ἡ ὁποία καὶ τὰ συνδέει εἰς ἕνα σύνολον. Εἶναι δὲ ἡ σχέσις αὐτὴ ἡ σχέσις τῆς ποσότητος ἢ τοῦ πλήθους. Ὁ ἀριθμὸς συμπεριλαμβάνων τὰ ὅμοια πράγματα εἰς ἕνα σύνολον δίδει ἀπόκρισιν εἰς τὸ ἐρώτημα «πόσα εἶναι;». Καὶ ὁ μὲν ὡρισμένος ἀριθμὸς δίδει τὴν ἀπόκρισιν «εἶναι τόσα», ὁ δὲ ἀόριστος δὲν καθορίζει ἀκριβῶς τὸ σύνολον. Ὅπως λοιπὸν ὁ Beetz, ἔτσι καὶ ὁ Räther εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἔννοια σχέσεως ἢ ἀναφορᾶς καὶ ὅτι ἡ σχέσις, τὴν ὁποίαν παριστάνει, εἶναι ἡ σχέσις τοῦ πλήθους, ἡ ὑπάρχουσα μεταξὺ ὁμοίων πραγμάτων καὶ συνδέουσα αὐτὰ εἰς ἕνα σύνολον. Εἶναι τώρα προφανὲς κατὰ τὸν Räther, ὅτι διὰ νὰ ἐξακριβώσωμεν τὴν σχέσιν τοῦ πλήθους, τὴν συνδέουσαν ὅμοια πράγματα εἰς ἕνα σύνολον, πρέπει νὰ ἀντιληφθῶμεν μὲ τὰς αἰσθήσεις μας τὰ ὅμοια αὐτὰ πράγματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει ἡ σχέσις ἐκείνη. Ἂν ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ παριστάνουσα τὴν σχέσιν τοῦ πλήθους, δὲν ἀνταποκρίνεται πρὸς κανὲν συγκεκριμένον ἀντικείμενον ὑποπῖπτον εἰς τὴν ἀντίληψίν μας, ἡ σχέσις ὅμως τοῦ πλήθους, τὴν ὁποίαν παριστάνει, ἠμπορεῖ νὰ ἐξακριβωθῇ μόνον ἐπάνω εἰς τέτοια ἀντικείμενα. Ἐπομένως ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ τόσον τοῦ ὡρισμένου, ὅσον καὶ τοῦ ἀορίστου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀποκλειστικὸν δημιούργημα τῆς νοήσεως, ἀλλ' εἶναι προϊὸν τῆς συνεργασίας της μὲ τὴν ἐμπειρίαν. Σχηματίζεται ἀπὸ τὴν κατ' αἴσθησιν ἐποπτείαν ὁμοίων πραγμάτων διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς σχέσεως τοῦ πλήθους, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ αὐτῶν καὶ τὰ συνδέει εἰς ἕνα σύνολον. Κάθε τέτοια σχέσις πλήθους πρέπει νὰ ἐξακριβωθῇ ἐπανειλημμένως καὶ εἰς διάφορα ὅμοια πράγματα ὑποπίπτοντα εἰς τὴν κατ' αἴσθησιν ἀντίληψιν, διὰ νὰ ἠμπορέσῃ νὰ θεωρηθῇ ἀπὸ τὴν νόησιν ὡς κάτι μόνιμον, νὰ ἀποχωρισθῇ ἀπὸ τὰ πράγματα καὶ τὰς ποιότητάς των, νὰ ἀφαιρεθῇ καὶ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ. «Εἰς τὸν σχηματισμὸν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ», λέγει ὁ Räther συνοψίζων τὰ πορίσματα τῆς ὅλης ἐρεύνης του, «μετέχει ἡ ἐμπειρία. Ὁ ἀριθμὸς σχηματίζεται ἐπὶ τῇ βάσει ἐποπτειῶν κατ' αἴσθησιν, προκύπτει ἑπομένως ἐκ τῆς συνεργασίας τοῦ πνεύματος καὶ τῶν πραγμάτων τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου. Μολονότι ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι συγκεκριμένον ἀντικείμενον ὑποπῖπτον εἰς τὴν κατ' αἴσθησιν ἀντίληψίν μας, ἐν τούτοις γίνεται ἀντιληπτὸς εἰς τὰ πράγματα καὶ μὲ τὰ πράγματα ὡς σχέσις ὑφισταμένη μεταξὺ αὐτῶν, ὡς ἡ σχέσις τοῦ πλήθους. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἔννοια σχέσεως, σχηματιζομένη δι' ἀφαιρέσεως». Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν σχηματίζονται τόσον ἀπὸ τοὺς ἀνθρώπους ἐν γένει, ὅσον καὶ ἀπὸ τὸ ἄτομον ἰδιαιτέρως πρῶτα οἱ ἀόριστοι ἀριθμοὶ καὶ ἔπειτα ὀλίγον κατ' ὀλίγον οἱ ὡρισμένοι. Καὶ εἰς τὸ σημεῖον λοιπὸν τῶν παραγόντων τοῦ σχηματισμοῦ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ καταλήγει ὁ Räther εἰς τὰ ἴδια μὲ τὸν Beetz πορίσματα. Διαφέρει ὅμως οὐσιωδῶς ἀπὸ αὐτὸν εἰς τὸ ἀκόλουθον σπουδαιότατον σημεῖον. Ἐνῷ δηλ. ὁ Beetz εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἡ ἐξακρίβωσις τῆς σχέσεως τοῦ πλήθους τῆς ὑπαρχούσης μεταξὺ τῶν ἐποπτευομένων ὁμοίων πραγμάτων γίνεται διὰ τῆς ἀμέσου ἐποπτείας, ὁ Räther ἀντιθέτως φρονεῖ, ὅτι ἡ ἐξακρίβωσις αὐτὴ γίνεται διὰ νοητικῆς κυρίως ἐργασίας, ἡ ὁποία κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν δὲν εἶναι *ἄλλη* ἀπὸ τὴν ***ἀπαρίθμησιν***.

Μὲ τὸ ζήτημα τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ ἀσχολεῖται διεξοδικὰ καὶ ὁ *B. Hartmann* (ὅπ. ἀν., § 19), ἐξετάζων καὶ αὐτὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπὸ λογικῆς καὶ ἀπὸ ψυχολογικῆς ἀπόψεως. Θεωροῦμεν περιττὸν νὰ παραθέσωμεν ἐδῶ ἔστω καὶ περίληψιν τῆς ἐρεύνης του, διότι συμπίπτει εἰς ὅλα τὰ κύρια σημεῖα μὲ τὴν ἔρευναν τοῦ Räther καὶ καταλήγει εἰς τὰ ἴδια μὲ αὐτὸν πορίσματα ὡς πρὸς τὸ ζήτημα, τὸ ὁποῖον μᾶς ἀπασχολεῖ.

Τὰ πορίσματα τῆς ἐρεύνης τοῦ Räther καὶ τοῦ Hartmann ἀποδεχόμεθα καὶ ἐμεῖς, διότι τὰ θεωροῦμεν ὡς τὰ σχετικῶς θετικώτερα καὶ ἀσφαλέστερα, καθόσον στηρίζονται εἰς βαθεῖαν καὶ προσεκτικὴν ἐξέτασιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπὸ λογικῆς καὶ ἀπὸ ψυχολογικῆς ἀπόψεως].

2. Η ΓΕΝΕΣΙΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΙ ΙΔΙΩΣ ΤΟΥ ΩΡΙΣΜΕΝΟΥ.

[Ἡ ἔρευνα τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔγινε εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, κατ' ἀνάγκην ἔθιξε καὶ τὸ ζήτημα τῆς γενέσεως, ἤτοι τοῦ τρόπου τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. Εἴδαμεν δέ, ὅτι, ὅπως εἰς τὸ πρόβλημα τῆς φύσεως, ἔτσι καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τῆς γενέσεως τοῦ ἀριθμοῦ κρατοῦν διαφωνίαι μεταξὺ τῶν Μεθοδικῶν, ὅσοι ἐπελήφθησαν τῆς ἐρεύνης του. Μία τέτοια διαφωνία ὑπάρχει ὡς πρὸς τὸ ζήτημα τῶν παραγόντων τῆς γενέσεως τοῦ ἀριθμοῦ. Ἄλλοι μὲν φρονοῦν, ὅτι ἀποκλειστικὸς παράγων τῆς γενέσεώς του εἶναι ἡ νόησις, ἄλλοι δέ, ὅτι εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ συνεργάζονται ἐμπειρία καὶ νόησις. Εἰς τὸ ζήτημα αὐτὸ δὲν θὰ ἐπανέλθωμεν πάλιν, διότι ὡς σχετιζόμενον ἀμεσώτερα μὲ τὸ ζήτημα τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἐξετασθῆ ἀρκετὰ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ἡ δὲ γενομένη ἐξέτασις κατέδειξε, ὅτι ὀρθότερη εἶναι ἡ δεύτερη ἀπὸ τὰς δύο ἀνωτέρω γνώμας. Ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν Μεθοδικῶν, οἱ ὁποῖοι ὑποστηρίζουν τὴν δεύτερην αὐτὴν γνώμην, κρατεῖ, καθὼς εἴδαμεν, διαφωνία ὡς πρὸς τὸ ζήτημα, πῶς ἐξακριβώνεται ἡ σχέσις τοῦ πλήθους ἡ ὑπάρχουσα μεταξὺ τῶν ὁμοίων πραγμάτων, τὰ ὁποῖα παρουσιάζει ἑκάστοτε εἰς τὴν κατ' αἴσθησιν ἀντίληψιν ἡ ἐμπειρία. Καὶ εἴδαμεν μὲν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ποῖαι ἀντίθεται γνῶμαι ὑποστηρίζονται ὡς πρὸς τὸ ζήτημα αὐτό, δὲν ἦτο ὅμως δυνατὸν νὰ ἀναπτυχθοῦν ἐκεῖ αἱ γνῶμαι αὐταὶ καὶ νὰ ἐξαχθοῦν ἀσφαλῆ πορίσματα ὡς πρὸς τὸ ἐπίμοχον ζήτημα, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κατ' ἐξοχὴν ζήτημα τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν καὶ ἰδίως τῶν ὡρισμένων, ἐνέχει δὲ μεγάλην σπουδαιότητα καὶ δι' ὅλην τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν καὶ ἰδίως διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν πρώτων ἀριθμῶν]. Δύο, ὅπως εἴδαμεν, ἀντίθεται γνῶμαι ὑπάρχουν ὡς πρὸς τὸ ζήτημα αὐτό. Κατὰ τὴν μίαν ἀπὸ αὐτὰς ἡ ἐξακρίβωσις τῆς σχέσεως τοῦ πλήθους γίνεται διὰ νοητικῆς κυρίως ἐργασίας, ἡ ὁποία προκειμένου περὶ τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν εἶναι ἡ ἀπαρίθμησις, κατὰ τὴν ἄλλην ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἀμέσου ἐποπτείας. Ἂς ἴδωμεν λεπτομερέστερα τὴν καθεμίαν ἀπὸ τὰς γνώμας αὐτὰς ὡς πρὸς τοὺς ὡρισμένους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἐνδιαφέρουν τὸ σχολεῖον, διὰ νὰ κρίνωμεν, ποία εἶναι ἡ ὀρθότερη.

Α. Ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς εἶναι προϊὸν τῆς ἀπαριθμήσεως.

Τὴν γνώμην αὐτὴν ἀσπάζονται ἐκτὸς τοῦ Räther καὶ τοῦ Hartmann καὶ παλαιότεροι Μεθοδικοί, ὅπως οἱ Stubba, Hentschel, Kaselitz, Böhme κ. ἄλλ., καὶ οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς νεωτέρους, καθὼς οἱ Kehr, Klauke καὶ Klein, Lüdemann, Fack, Haase, Seyfert, Grass, Ritthaler, Fährmann, Lindner κ. ἄλλ. Ἐπίσης καὶ οἱ ἀσχοληθέντες μὲ τὴν Ψυχολογίαν τοῦ παιδός, ὅπως π.χ. ὁ Sully (Untersuchungen über die Kindheit, μετάφρ. εἰς τὸ Γερμαν. ἀπὸ τὸν Stimpfl, Leipzig, 1897 καὶ Handbuch der Psychologie für Lehrer, Leipzig, 1898), ὁ Preyer (Die Seele des Kindes, 3 ἐκδ., Leipzig 1890), ὁ Stern (Psychologie der frühen Kindheit bis zum 6 Lebensjahre, Leipzig, 1904) καὶ ἄλλοι ἐπιμαρτυροῦν, ὅτι αἱ ἔννοιαι τῶν πρώτων ὡρισμένων ἀριθμῶν σχηματίζονται ἀπὸ τοὺς μικροὺς παῖδας διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως.

[Διατί ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς εἶναι προϊὸν τῆς ἀπαριθμήσεως. Οἱ ὀπαδοὶ τῆς προκειμένης γνώμης, ὁρμώμενοι ἀπὸ τὴν ἀντίληψιν, ὅτι ὁ ἀριθμός, τόσον ὁ ἀόριστος, ὅσον καὶ ὁ ὡρισμένος, παριστάνει ἐν γένει ἕνα σύνολον ὁμοίων ὄντων, τὰ ὁποῖα ὅμως νοοῦνται καὶ ὡς ὑπάρχοντα καθ' ἑαυτά, εὑρίσκουν, ὅτι εἰς τὸν ἀριθμὸν δὲν ἠμποροῦμεν κατ' ἀνάγκην νὰ φθάσωμεν μὲ ἄλλον τρόπον παρὰ ***καθόσον καθορίζομεν τὸ σύνολον τῶν ὄντων του διὰ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ αὐτά.*** Ἡ ἐργασία τώρα αὐτὴ

τοῦ καθορισμοῦ ἑνὸς συνόλου ὄντων διὰ τοῦ ἑνός των ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους· ἢ δηλ. περιορίζεται εἰς τὸ νὰ διαπιστώσῃ μόνον ἁδρομερῶς, ὅτι τὸ σύνολον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἕνα αὐτὸ ὂν καὶ ἄλλα ὅμοια μὲ αὐτὸ ὄντα, ἢ ἐπιλαμβάνεται νὰ εὕρῃ, πόσαι θέσεις ἀντικειμένων ὡσὰν τὸ ἕνα γίνονται, διὰ νὰ συναποτελεσθῇ τὸ σύνολον, ἤτοι ἁπλούστερα, πόσα ἀκριβῶς εἶναι τὸ ἕνα καὶ τὰ ἄλλα ὅμοια μὲ αὐτὸ ὄντα, τὰ συναποτελοῦντα τὸ σύνολον. Μὲ τὸν πρῶτον τρόπον φθάνομεν εἰς τὸν ἀόριστον ἀριθμόν, μὲ τὸν δεύτερον εἰς τὸν ὡρισμένον. Ὁ δεύτερος ὅμως τρόπος εἶναι, ὅ,τι ὀνομάζομεν ***ἀπαρίθμησιν*** (ἢ ἀρίθμησιν εἰς τὴν στενωτέραν σημασίαν τῆς λέξεως, κοινῶς μέτρημα). Βάσις λοιπὸν τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ εἶναι ἡ ἀπαρίθμησις, ἡ ὁποία, καθὼς εἴδαμεν, εἶναι ὁ καθορισμὸς ἑνὸς συνόλου ὁμοίων ὄντων διὰ τοῦ ἑνός των, ὁ γινόμενος ἔτσι, ὥστε νὰ εὑρίσκεται, πόσα ἀκριβῶς εἶναι τὰ ὅμοια ὄντα, τὰ συμπεριλαμβανόμενα εἰς τὸ σύνολον].

Ποῖα εἶναι τὰ καθ' ἕκαστον συμβαίνοντα κατὰ τὴν ἀπαρίθμησιν. Ὅταν ἀπαριθμοῦμεν ὅμοια ἀντικείμενα, διὰ νὰ καθορίσωμεν τὸν ἀριθμόν των, κάμνομεν τὰς ἑξῆς ἐπὶ μέρους ἐνεργείας (ἴδ. καὶ Bartholomäi, Zehn Vorlesungen, σ. 60):

1. ***Ἀντιλαμβανόμεθα*** τὸ ἕνα ἀντικείμενον κατόπιν τοῦ ἄλλου ***καθ' ἑαυτό,*** διότι ***ὅλα*** πρέπει νὰ γίνουν ἀντιληπτά.

2. ***Ἐνθυμούμεθα*** κάθε ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον ἔχομεν μέχρι τοῦδε ἀντιληφθῆ, διότι ἀλλέως δὲν θὰ ἠμπορούσαμεν νὰ κατορθώσωμεν ***τὴν συμπερίληψιν ὅλων εἰς ἕνα σύνολον.***

3. ***Συνδέομεν*** τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ὅμοια ἀντικείμενα, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἀντιληφθῆ κατ' ἀρχὰς καὶ τὸ ὁποῖον, ὅπως εἴπαμεν, συγκρατοῦμεν εἰς τὴν μνήμην μας, μὲ τὸ ἀμέσως κατόπιν γινόμενον ἀντιληπτὸν ***εἰς ἕνα σύνολον,*** τὸ σύνολον δὲ πάλιν αὐτό, τὸ ὁποῖον ἐπίσης συγκρατοῦμεν εἰς τὴν μνήμην μας, τὸ συνδέομεν μὲ τὸ ἀμέσως κατόπιν γινόμενον ἀντιληπτὸν ἀντικείμενον εἰ ***ἕνα νέον σύνολον*** κ. οὕτω καθεξῆς, διὰ νὰ διευκολυνθῇ ἔτσι ἡ συμπερίληψις ὅλων εἰς ἕνα σύνολον. Ἡ συμπερίληψις δὲ αὐτὴ γίνεται, καθόσον συνδέομεν καὶ τὸ τελευταῖον ἀντικείμενον μὲ τὸ σύνολον τῶν προηγηθέντων εἰς ἕνα τελικὸν σύνολον, τὸ ὁποῖον καὶ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπαριθμηθέντων ἀντικειμένων.

Μὲ τὰς ἐνεργείας αὐτὰς ἡ ἀπαρίθμησις παρουσιάζεται, κα-
θῶς παρατηρεῖ ὁ Hartmann (ὅπ. ἀν., σ. 289), «ὡς προοδευτικὴ
θέσις ὁμοίων ὄντων καὶ συμπερίληψις τοῦ ἑκάστοτε θετομένου
μὲ τὰ ἤδη τεθέντα καὶ συμπεριληφθέντα, προχωροῦσα ἕως ἕνα
ὡρισμένον ὄν». Ἔτσι δὲ ἐνεργοῦσα ἡ ἀπαρίθμησις θέτει τὰς
βάσεις τοῦ σχηματισμοῦ τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων ἀρι-
θμῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ καθένας γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν
διὰ τῆς προσθέσεως τῆς μονάδος. Ἡ ἀπαρίθμησις ἑπομένως
ἠμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς **πρόσθεσις τῆς μονάδος** καὶ ἀκρι-
βέστερα ὡς **συντομευμένη πρόσθεσις τῆς μονάδος.**

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω τρεῖς ἐνεργείας, αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὴν
ἀπαρίθμησιν, αἱ δύο πρῶται βασίζονται εἰς τὴν ἐμπειρίαν, ἡ
τρίτη ὅμως, ἤτοι ἡ σύνδεσις τοῦ κάθε ἑπομένου ἀντικειμένου μὲ
τὸ σύνολον τῶν προηγουμένων, (φυσικὰ δὲ καὶ ἡ συγκράτησις
τῶν καθ' ἕκαστον πορισμάτων τῆς συνδέσεως), ἡ ὁποία εἶναι καὶ
ἡ κυριωτέρα, διότι ἀποτελεῖ τὴν οὐσίαν τῆς ἀπαριθμήσεως, εἶναι,
ὡς γνωστόν, **καθαρὰ νοητικὴ ἐργασία.** [1]

Ἡ ἀπαρίθμησις καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ἐποπτεία. Διὰ νὰ συν-
τελεσθῇ ἡ ἀπαρίθμησις, πρέπει, καθὼς εἴπαμεν, ὅλα τὰ ἀπα-
ριθμητέα ἀντικείμενα νὰ γίνουν καθ' ἑαυτὰ ἀντιληπτὰ εἰς τὸν ἀ-
παριθμοῦντα. Ἡ ἐξωτερικὴ λοιπὸν ἐποπτεία εἶναι ἀπαραίτητη
εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν. Θὰ ἠμποροῦσαν βέβαια νὰ ἀπαριθμηθοῦν
καὶ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα δὲν ὑποπίπτουν μὲν κατὰ τὴν ἀπα-
ρίθμησιν εἰς τὴν κατ' αἴσθησιν ἀντίληψιν, ὑπέπεσαν ὅμως ἄλ-
λοτε εἰς αὐτὴν καὶ τώρα παριστάνονται μόνον ψιλῶς. Εἶναι ὅ-
μως προφανές, ὅτι ἡ ἀπαρίθμησις γίνεται πολὺ εὐκολώτερα,
ἐὰν τὰ ἀπαριθμούμενα ὑποπίπτουν εἰς τὴν ἄμεσον ἀντίληψιν
παρὰ ἐὰν παριστάνωνται μόνον. Διότι ἐνῷ εἰς τὴν τελευταίαν
περίπτωσιν ἡ ἀνάμνησις καὶ ἡ συγκράτησις τῶν παραστάσεων

---

[1] Ὅταν καθορίζωμεν ὅμοια ἀντικείμενα διὰ τοῦ ἑνός των ἔτσι, ὥστε
νὰ φθάνωμεν εἰς ἕνα **ἀόριστον** ἀριθμόν, κάμνομεν τὰς ἑξῆς ἐπὶ μέρους
ἐργασίας : 1. Σχηματίζομεν μίαν καθολικὴν ἐποπτείαν τῶν ἀντικειμένων
αὐτῶν. 2. Διακρίνομεν, ὅτι κοντὰ εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ ὑπάρ-
χουν καὶ ἄλλα ὅμοια. 3. Συνδέομεν ὅλα τὰ ὅμοια αὐτὰ ἀντικείμενα
εἰς ἕνα σύνολον γενικῆς μορφῆς. Ἀπὸ τὰς ἐργασίας πάλιν αὐτὰς μόνον ἡ
πρώτη βασίζεται εἰς τὴν ἐμπειρίαν, αἱ δὲ δύο ἄλλαι εἶναι νοητικαί.

τῶν ἀντικειμένων γίνεται μὲ πολλὴν δυσκολίαν, δι' αὐτὸ δὲ δυσ-
χεραίνεται καὶ ἡ καθ' ἑαυτὸ ἐργασία τῆς ἀπαριθμήσεως, ἤτοι ἡ
ἐργασία τῆς συνδέσεως καὶ τῆς συγκρατήσεως τῶν πορισμάτων
της, εἰς τὴν πρώτην τὰ ἐρεθίζοντα τὰς αἰσθήσεις ἀντικείμενα
συγκρατοῦν ἀκοπώτατα τὰς παραστάσεις των εἰς τὴν συνείδησιν,
ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ ἀσχοληθῇ ἀνενόχλητα μὲ τὴν κυρίαν ἐργα-
σίαν τῆς ἀπαριθμήσεως. Εἶναι δὲ βέβαιον, ὅτι ἀκριβῶς διὰ τὸν
λόγον αὐτὸν οἱ ἄνθρωποι ἔφθασαν εἰς τοὺς ὡρισμένους ἀριθμοὺς
διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως συγκεκριμένων ὁμοίων ἀντικειμένων ὑπο-
πιπτόντων εἰς τὰς αἰσθήσεις των. Προφανῶς δὲ ἀπὸ τὰ ἀντι-
κείμενα αὐτὰ καταλληλότερα ἦσαν, ὅσα ἠμποροῦσαν νὰ ἐρεθί-
σουν περισσοτέρας ἀπὸ μίαν αἰσθήσεις, νὰ ἐξεγείρουν ἑπομένως
ὄχι μόνον ὀπτικά, ἀλλὰ καὶ ἁπτικὰ καὶ κινητικὰ αἰσθήματα (ἤτοι
τὰ στερεὰ καὶ κινητὰ ἀντικείμενα), ἀπὸ αὐτὰ δὲ πάλιν, ὅσα ἕ-
νεκα τῆς συχνῆς ἀντιλήψεώς των δὲν εἶχαν πλέον δι' αὐτοὺς ἀ-
γνώστους ποιότητας, δυναμένας νὰ ἐφελκύσουν τὴν προσοχήν
των, καὶ δι' αὐτὸ ἠμποροῦσαν νὰ τοὺς προκαλέσουν εἰς τὴν ἀπα-
ρίθμησιν. Τέτοια δὲ ἀντικείμενα ἦσαν γνωστὰ πρόσωπα καὶ
ζῷα, σκεύη τῆς συνήθους χρήσεως καὶ μέλη τοῦ σώματος, ἰδίως
δὲ τὰ δάκτυλα τῶν χειρῶν (καὶ τῶν ποδῶν). Ἀλλὰ καὶ ἡ Ψυ-
χολογία τοῦ παιδὸς καὶ ἡ παρατήρησις κάθε γονέως μαρτυρεῖ,
ὅτι καὶ οἱ μικροὶ παῖδες, πρὶν φοιτήσουν εἰς τὸ σχολεῖον, μὲ τὴν
ἀπαρίθμησιν τέτοιων ἀντικειμένων φθάνουν εἰς τοὺς πρώτους
ὡρισμένους ἀριθμούς. Ἐπίσης δὲ εἶναι βέβαιον, ὅτι ὅπως οἱ μι-
κροὶ παῖδες, ἔτσι καὶ οἱ ἄνθρωποι οἱ μὴ ἔχοντες σχηματίσει
ἀκόμη σαφεῖς τὰς ἐννοίας τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν, ὁσάκις ἐπρό-
κειτο νὰ ἀπαριθμήσουν συγκεκριμένα ἀντικείμενα, μὴ ὑποπίπτοντα
κατὰ τὴν ἀπαρίθμησιν εἰς τὴν ἀντίληψίν των, ἐχρησιμοποιοῦσαν
πρὸς διευκόλυνσίν της ὡς μέσα ἐποπτείας τὰ πρόχειρα αἰσθητὰ
ἀντικείμενα (δάκτυλα κ.τ.λ.), τὰ ὁποῖα, καθὼς εἴδαμεν, τοὺς
ἐπροκαλοῦσαν συνήθως εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν καὶ τὰ ὁποῖα τώρα
ἀντιπροσώπευαν τὰ ἀπαριθμητέα, ἀλλὰ μὴ ὑποπίπτοντα εἰς τὴν
ἀντίληψιν ἀντικείμενα. Εἶναι λοιπὸν ἐκτὸς ἀμφισβητήσεως,
ὅτι ἡ ἀπαρίθμησις στηρίζεται ἀρχικὰ εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐπο-
πτείαν, ἡ ὁποία συντελεῖ εἰς τὴν σαφῆ ἀντίληψιν καὶ τὴν ἀσφαλῆ
συγκράτησιν τῶν ἀπαριθμητέων ἀντικειμένων. Ὅτι τώρα τὸ

Μὲ τὰς ἐνεργείας αὐτὰς ἡ ἀπαρίθμησις παρουσιάζεται, καθὼς παρατηρεῖ ὁ Hartmann (ὄπ. ἀν., σ. 289), «ὡς προοδευτικὴ θέσις ὁμοίων ὄντων καὶ συμπερίληψις τοῦ ἑκάστοτε θετομένου μὲ τὰ ἤδη τεθέντα καὶ συμπεριληφθέντα, προχωροῦσα ἕως ἕνα ὡρισμένον ὄν». Ἔτσι δὲ ἐνεργοῦσα ἡ ἀπαρίθμησις θέτει τὰς βάσεις τοῦ σχηματισμοῦ τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ καθένας γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν διὰ τῆς προσθέσεως τῆς μονάδος. Ἡ ἀπαρίθμησις ἐπομένως ἠμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ***πρόσθεσις τῆς μονάδος*** καὶ ἀκριβέστερα ὡς ***συντομευμένη πρόσθεσις τῆς μονάδος.***

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω τρεῖς ἐνεργείας, αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν, αἱ δύο πρῶται βασίζονται εἰς τὴν ἐμπειρίαν, ἡ τρίτη ὅμως, ἤτοι ἡ σύνδεσις τοῦ κάθε ἑπομένου ἀντικειμένου μὲ τὸ σύνολον τῶν προηγουμένων, (φυσικὰ δὲ καὶ ἡ συγκράτησις τῶν καθ᾽ ἕκαστον πορισμάτων τῆς συνδέσεως), ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ κυριωτέρα, διότι ἀποτελεῖ τὴν οὐσίαν τῆς ἀπαριθμήσεως, εἶναι, ὡς γνωστόν, ***καθαρὰ νοητικὴ ἐργασία.*** [1]

Ἡ ἀπαρίθμησις καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ἐποπτεία. Διὰ νὰ συντελεσθῇ ἡ ἀπαρίθμησις, πρέπει, καθὼς εἴπαμεν, ὅλα τὰ ἀπαριθμητέα ἀντικείμενα νὰ γίνουν καθ᾽ ἑαυτὰ ἀντιληπτὰ εἰς τὸν ἀπαριθμοῦντα. Ἡ ἐξωτερικὴ λοιπὸν ἐποπτεία εἶναι ἀπαραίτητη εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν. Θὰ ἠμποροῦσαν βέβαια νὰ ἀπαριθμηθοῦν καὶ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα δὲν ὑποπίπτουν μὲν κατὰ τὴν ἀπαρίθμησιν εἰς τὴν κατ᾽ αἴσθησιν ἀντίληψιν, ὑπέπεσαν ὅμως ἄλλοτε εἰς αὐτὴν καὶ τώρα παριστάνονται μόνον ψιλῶς. Εἶναι ὅμως προφανές, ὅτι ἡ ἀπαρίθμησις γίνεται πολὺ εὐκολώτερα, ἐὰν τὰ ἀπαριθμούμενα ὑποπίπτουν εἰς τὴν ἄμεσον ἀντίληψιν παρὰ ἐὰν παριστάνωνται μόνον. Διότι ἐνῷ εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἡ ἀνάμνησις καὶ ἡ συγκράτησις τῶν παραστάσεων

[1] Ὅταν καθορίζωμεν ὅμοια ἀντικείμενα διὰ τοῦ ἑνός των ἔτσι, ὥστε νὰ φθάνωμεν εἰς ἕνα ***ἀόριστον*** ἀριθμόν, κάμνομεν τὰς ἑξῆς ἐπὶ μέρους ἐργασίας : 1. Σχηματίζομεν μίαν καθολικὴν ἐποπτείαν τῶν ἀντικειμένων αὐτῶν. 2. Διακρίνομεν, ὅτι κοντὰ εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ ὑπάρχουν καὶ ἄλλα ὅμοια. 3. Συνδέομεν ὅλα τὰ ὅμοια αὐτὰ ἀντικείμενα εἰς ἕνα σύνολον γενικῆς μορφῆς. Ἀπὸ τὰς ἐργασίας πάλιν αὐτὰς μόνον ἡ πρώτη βασίζεται εἰς τὴν ἐμπειρίαν, αἱ δὲ δύο ἄλλαι εἶναι νοητικαί.

τῶν ἀντικειμένων γίνεται μὲ πολλὴν δυσκολίαν, δι᾽ αὐτὸ δὲ δυσχεραίνεται καὶ ἡ καθ᾽ ἑαυτὸ ἐργασία τῆς ἀπαριθμήσεως, ἤτοι ἡ ἐργασία τῆς συνδέσεως καὶ τῆς συγκρατήσεως τῶν πορισμάτων της, εἰς τὴν πρώτην τὰ ἐρεθίζοντα τὰς αἰσθήσεις ἀντικείμενα συγκρατοῦν ἀκοπώτατα τὰς παραστάσεις των εἰς τὴν συνείδησιν, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ ἀσχοληθῇ ἀνενόχλητα μὲ τὴν κυρίαν ἐργασίαν τῆς ἀπαριθμήσεως. Εἶναι δὲ βέβαιον, ὅτι ἀκριβῶς διὰ τὸν λόγον αὐτὸν οἱ ἄνθρωποι ἔφθασαν εἰς τοὺς ὡρισμένους ἀριθμοὺς διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως συγκεκριμένων ὁμοίων ἀντικειμένων ὑποπιπτόντων εἰς τὰς αἰσθήσεις των. Προφανῶς δὲ ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ καταλληλότερα ἦσαν, ὅσα ἠμποροῦσαν νὰ ἐρεθίσουν περισσοτέρας ἀπὸ μίαν αἰσθήσεις, νὰ ἐξεγείρουν ἑπομένως ὄχι μόνον ὀπτικά, ἀλλὰ καὶ ἁπτικὰ καὶ κινητικὰ αἰσθήματα (ἤτοι τὰ στερεὰ καὶ κινητὰ ἀντικείμενα), ἀπὸ αὐτὰ δὲ πάλιν, ὅσα ἕνεκα τῆς συχνῆς ἀντιλήψεώς των δὲν εἶχαν πλέον δι᾽ αὐτοὺς ἀγνώστους ποιότητας, δυναμένας νὰ ἐφελκύσουν τὴν προσοχήν των, καὶ δι᾽ αὐτὸ ἠμποροῦσαν νὰ τοὺς προκαλέσουν εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν. Τέτοια δὲ ἀντικείμενα ἦσαν γνωστὰ πρόσωπα καὶ ζῷα, σκεύη τῆς συνήθους χρήσεως καὶ μέλη τοῦ σώματος, ἰδίως δὲ τὰ δάκτυλα τῶν χειρῶν (καὶ τῶν ποδῶν). Ἀλλὰ καὶ ἡ Ψυχολογία τοῦ παιδὸς καὶ ἡ παρατήρησις κάθε γονέως μαρτυρεῖ, ὅτι καὶ οἱ μικροὶ παῖδες, πρὶν φοιτήσουν εἰς τὸ σχολεῖον, μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν τέτοιων ἀντικειμένων φθάνουν εἰς τοὺς πρώτους ὡρισμένους ἀριθμούς. Ἐπίσης δὲ εἶναι βέβαιον, ὅτι ὅπως οἱ μικροὶ παῖδες, ἔτσι καὶ οἱ ἄνθρωποι οἱ μὴ ἔχοντες σχηματίσει ἀκόμη σαφεῖς τὰς ἐννοίας τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν, ὁσάκις ἐπρόκειτο νὰ ἀπαριθμήσουν συγκεκριμένα ἀντικείμενα, μὴ ὑποπίπτοντα κατὰ τὴν ἀπαρίθμησιν εἰς τὴν ἀντίληψίν των, ἐχρησιμοποιοῦσαν πρὸς διευκόλυνσίν της ὡς μέσα ἐποπτείας τὰ πρόχειρα αἰσθητὰ ἀντικείμενα (δάκτυλα κ.τ.λ.), τὰ ὁποῖα, καθὼς εἴδαμεν, τοὺς ἐπροκαλοῦσαν συνήθως εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν καὶ τὰ ὁποῖα τώρα ἀντιπροσώπευαν τὰ ἀπαριθμητέα, ἀλλὰ μὴ ὑποπίπτοντα εἰς τὴν ἀντίληψιν ἀντικείμενα. Εἶναι λοιπὸν ἐκτὸς ἀμφισβητήσεως, ὅτι ἡ ἀπαρίθμησις στηρίζεται ἀρχικὰ εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐποπτείαν, ἡ ὁποία συντελεῖ εἰς τὴν σαφῆ ἀντίληψιν καὶ τὴν ἀσφαλῆ συγκράτησιν τῶν ἀπαριθμητέων ἀντικειμένων. Ὅτι τώρα τὸ πρᾶγμα αὐτὸ πρέπει νὰ λαμβάνῃ ὑπὸ σοβαρωτάτην ἔποψιν καὶ ἡ διδασκαλία τῆς πρώτης ἀριθμήσεως, εἶναι αὐτονόητον. Ἄλλην ὅμως ὑπηρεσίαν ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω δὲν προσφέρει κατὰ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς προκειμένης ἀντιλήψεως ἡ ἐξωτερικὴ ἐποπτεία εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν. Ἡ οὐσιωδεστέρα ἐργασία τῆς ἀπαριθμήσεως, ἤτοι ἡ σύνδεσις κάθε ἑπομένου ἀντικειμένου μὲ τὸ σύνολον τῶν προηγουμένων καὶ ἡ συγκράτησις τοῦ πορίσματος τῆς συνδέσεως αὐτῆς, εἶναι καθαρὰ νοητικὴ ἐργασία, μὴ ἀνταποκρινομένη πρὸς τίποτε αἰσθητὸν καὶ δι᾽ αὐτὸ μὴ δυναμένη νὰ αἰσθητοποιηθῇ. Δι᾽ αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ γίνεται λόγος περὶ ἐποπτειῶν τῶν ἀριθμῶν, ὅπως γίνεται λόγος περὶ ἐποπτειῶν τῶν συγκεκριμένων ἀντικειμένων, οὔτε ἔχει κανὲν νόημα νὰ καταβάλλωνται προσπάθειαι, ὅπως αἰσθητοποιηθῇ ἡ προκειμένη ἐργασία τῆς ἀπαριθμήσεως ἢ μάλιστα ὅπως ἐξακριβωθῇ· δι᾽ ἀμέσου ἐποπτείας ἡ σχέσις τοῦ πλήθους, ἡ ὁποία πρέπει ἀκριβῶς νὰ εὑρεθῇ πρῶτα διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως.

Ἡ ἀπαρίθμησις καὶ ἡ ἀφαίρεσις. Σημειωτέον τώρα, ὅτι ὁ διὰ τῆς ἐφάπαξ γενομένης ἀπαριθμήσεως ὁμοίων ἀντικειμένων σχηματισμὸς ἑνὸς ὡρισμένου ἀριθμοῦ δὲν ἀρκεῖ οὔτε εἰς τὸν ἄνθρωπον ἐν γένει οὔτε εἰς τὸν μικρὸν παῖδα ἰδιαιτέρως διὰ νὰ ὑψωθοῦν καὶ εἰς ***τὴν ἔννοιαν*** τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ. Ἐὰν εἰς ἕνα μικρὸν παῖδα, ὁ ὁποῖος ἐσχημάτισε διὰ πρώτην φορὰν μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν ὁμοίων ἀντικειμένων τὴν σύνθεσιν «δύο καὶ ἕνα», δηλ. τὸν ἀριθμὸν 3, καὶ ἔμαθε καὶ τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, ἐπαναληφθῇ μετά τινα χρόνον τὸ ὄνομα αὐτό, εἶναι βέβαιον, ὅτι ἡ παράστασις τοῦ ὀνόματος δὲν θὰ ἀνακαλέσῃ εἰς τὴν συνείδησίν του τὴν σύνθεσιν «δύο καὶ ἕνα», ἡ ὁποία εἶχε συνδεθῇ ἄλλοτε μὲ τὸ ὄνομα αὐτό. Διὰ νὰ γίνῃ τὸ τελευταῖον αὐτό, ἤτοι διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ὁ παῖς τὴν ἔννοιαν τοῦ ὡρισμένου αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἀπαραίτητον εἶναι ἡ ἀπαρίθμησις νὰ ἐπαναληφθῇ πολλὰς φορὰς καὶ εἰς διάφορα ἀντικείμενα, εἰς τρόπον ὥστε ἡ εἰς ὅλας τὰς ἀπαριθμήσεις αὐτὰς σχηματιζομένη σύνθεσις νὰ θεωρηθῇ ὡς κάτι μόνιμον καὶ παντοτινόν, νὰ ἀποχωρισθῇ, νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὰ διάφορα ἀντικείμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφανίζεται, καὶ νὰ ληφθῇ μόνη της ὑπ᾽ ὄψει, νὰ παρασταθῇ ὡς ὑφισταμένη καθ᾽ ἑαυτήν. Μόνον ἔτσι, μόνον δηλ. διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς

στηριζομένης εἰς ἐπανειλημμένην ἀπαρίθμησιν ἠμπορεῖ νὰ σχηματισθῇ εἰς τὸ τέλος ἡ ἔννοια τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ].

Εἶναι τώρα προφανές, ὅτι τόσον ὁ σχηματισμός, ὅσον καὶ ἡ συγκράτησις τῶν ἐννοιῶν τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν διευκολύνονται πολύ, ἂν μὲ τὴν ἔννοιαν τοῦ κάθε ὡρισμένου ἀριθμοῦ συνδέεται καὶ ἕνα ἰδιαίτερον ὄνομα. Ἐν τούτοις αὐτὸ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ γίνῃ ἐξ ἀρχῆς. Ἐπὶ μακρὸν οἱ ἄνθρωποι παρίσταναν τὰς ἐννοίας τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν, τὰς ὁποίας εἶχαν σχηματίσει, διὰ τῆς ἐπιδείξεως τῶν αἰσθητῶν ἀντικειμένων, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων εἶχαν ὑψωθῇ εἰς αὐτάς, ἰδίως δὲ μὲ τὴν ἐπίδειξιν τῶν δακτύλων. Ἐχρειάσθηκε νὰ παρέλθῃ πολὺς χρόνος, ὅπως παρατηρεῖ ὁ Tanck, ἕως ὅτου κατανοήσουν, ὅτι διὰ τὸν ἴδιον σκοπὸν ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἰδιαίτερα ὀνόματα. Ἐννοεῖται δὲ πάλιν, ὅτι τὰ πρῶτα ὀνόματα τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν θὰ ἦσαν μακρὰ καὶ δύσχρηστα, αὐτόχρημα περιγραφαὶ τῶν παρατηρουμένων καὶ ὅτι θὰ ἐχρειάσθηκαν πολλαὶ μεταβολαὶ καὶ πολλαὶ παραλείψεις, ἕως ὅτου φθάσουν οἱ ἄνθρωποι εἰς τὰ γνωστά μας συντομώτατα ἀριθμητικὰ ὀνόματα.

[***Ἡ ἐξωτερικὴ ἐποπτεία καὶ ἡ στερέωσις τῶν σχηματισμένων πλέον ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν.*** Εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ποία εἶναι κατὰ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς προκειμένης γνώμης ἡ συμβολὴ τῆς ἐξωτερικῆς ἐποπτείας εἰς τὸν διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως σχηματισμὸν τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν. Ὅτι ἔχομεν ἐδῶ νὰ σημειώσωμεν ἀκόμη, εἶναι, ὅτι σύμφωνα μὲ τὴν γνώμην τῶν ἰδίων Μεθοδικῶν ἡ ἐξωτερικὴ ἐποπτεία προσφέρει κάποιαν συμβολὴν καὶ εἰς τὴν στερέωσιν τῶν σχηματισθεισῶν πλέον διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως ἐννοιῶν τῶν πρώτων ὡρισμένων ἀριθμῶν.

Γνωρίζομεν, ὅτι οἱ μικροὶ παῖδες, ἀφοῦ σχηματίσουν διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως τὰς ἐννοίας τῶν πρώτων ὡρισμένων ἀριθμῶν, ἠμποροῦν συνήθως νὰ ἀντιλαμβάνωνται τὸν ἀριθμὸν δύο, τριῶν καὶ τεσσάρων ἀντικειμένων διαμιᾶς, καὶ χωρὶς δηλαδὴ νὰ ἀπαριθμοῦν τὰ ἀντικείμενα αὐτά. Πῶς συμβαίνει αὐτό ; Οἱ μικροὶ παῖδες, ὅταν θέλουν νὰ ἀπαριθμήσουν, παρατάσσουν συνηθέστατα, καθὼς εἶναι γνωστόν, τὰ ἀπαριθμητέα ἀντικείμενα εἰς μίαν προϊοῦσαν σειράν. Προτιμοῦν τὴν διάταξιν αὐτήν, διότι εὑρίσκουν, ὅτι μὲ αὐτὴν ἠμποροῦν νὰ ἀντιλαμβάνωνται εὐκολώ-

τερα τὰ ἀπαριθμητέα ἀντικείμενα τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου καὶ
νὰ συνδέουν τὸ κάθε ἑπόμενον μὲ τὰ προηγούμενα. Ἄλλωστε
ἔτσι βλέπουν διαταγμένα ἀρκετὰ ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα
συνήθως τοὺς προκαλοῦν εἰς ἀπαρίθμησιν, ἰδίως δὲ τὰ δά-
κτυλα. Ἂς ὑποτεθῇ τώρα, ὅτι ἕνας μικρὸς παῖς, ὁ ὁποῖος ἔχει
σχηματίσει πλέον διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως τὰς ἐννοίας τῶν πρώ-
των ἀριθμῶν, θέλει νὰ ἀπαριθμήσῃ δύο ὁμοειδῆ ἀντικείμενα.
Τὰ διατάσσει εἰς μίαν σειράν, τὰ ἀπαριθμεῖ καὶ εὑρίσκει, ὅτι
εἶναι δύο. Ἡ μορφὴ τώρα τῆς διατάξεως τῶν ἀντικειμένων αὐ-
τῶν (. .) εἶναι τέτοια, ὥστε νὰ ἠμπορῇ ὁ παῖς νὰ τὴν ἐντυ-
πώσῃ εὔκολα εἰς τὴν μνήμην του. Δι᾽ αὐτὸ ὅμως ἀκριβῶς καὶ
μὲ τὴν μορφὴν αὐτὴν ἠμπορεῖ νὰ συνδεθῇ εἰς τὴν συνείδησίν
του ἐπίσης εὔκολα ἡ παράστασις τοῦ ἀριθμοῦ δύο. Ἡ σύνδεσις
τώρα αὐτὴ τῆς μορφῆς τῆς διατάξεως καὶ τῆς παραστάσεως τοῦ
ἀριθμοῦ, γινομένη κατόπιν καὶ εἰς ἄλλας ὁμοίας ἀπαριθμήσεις,
ἰσχυροποιεῖται τόσον, ὥστε εἰς τὸ τέλος ἡ ἀντίληψις τῆς μορφῆς
τῆς διατάξεως νὰ ἀνακαλῇ ἀμέσως εἰς τὴν συνείδησίν του τὴν
παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ δύο, χωρὶς νὰ ὑπάρχῃ ἀνάγκη ἀπαρι-
θμήσεως. Τὸ ἴδιον πρᾶγμα συμβαίνει καὶ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 3
καὶ 4. Ἡ μορφὴ τῆς διατάξεως τῶν μονάδων τοῦ καθενὸς ἀπὸ
τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς (τοῦ 3 . . . καὶ τοῦ 4 . . . .), ἐπειδὴ
ἐντυπώνεται χωρὶς δυσκολίαν εἰς τὴν μνήμην τῶν παίδων, συν-
δέεται εἰς τὴν συνείδησίν των μὲ τὴν παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ,
ἔτσι δὲ εἰς τὸ ἑξῆς ἠμποροῦν οἱ παῖδες νὰ ἀντιλαμβάνωνται δια-
μιᾶς τὸν ἀριθμὸν τριῶν καὶ τεσσάρων ἀντικειμένων, τοποθετη-
μένων μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, καὶ χωρὶς νὰ ἀπαριθμοῦν τὰς μο-
νάδας των. Εἶναι τώρα ἀληθές, ὅτι τὰ δύο ἢ τρία ἢ τέσσαρα ἀν-
τικείμενα, τῶν ὁποίων τὸν ἀριθμὸν πρόκειται ἑκάστοτε νὰ καθο-
ρίσῃ ὁ μικρὸς παῖς, δὲν ὑποπίπτουν εἰς τὴν ἀντίληψίν του πάν-
τοτε τοποθετημένα εἰς μίαν σειράν, ἀλλὰ καὶ κατ᾽ ἄλλον τρόπον.
Ἔτσι τὰ δύο ἀντικείμενα ἠμποροῦν νὰ παρουσιασθοῦν καὶ μὲ
τὴν διάταξιν :, τὰ τρία καὶ μὲ τὴν διάταξιν ⁝ ἢ ∴ καὶ τὰ
τέσσερα μὲ τὴν διάταξιν : : ἢ καὶ ἄλλας. Ἀλλὰ καὶ ὅλαι αὖ-
ταὶ αἱ μορφαὶ τῆς διατάξεως, αἱ ὁποῖαι ἄλλωστε εἶναι πολὺ ὀλί-

γαι, εἶναι τέτοιαι, ὥστε νὰ ἠμποροῦν οἱ παῖδες νὰ τὰς ἐντυπώ-
νουν χωρὶς δυσκολίαν εἰς τὴν μνήμην των. Δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ αὗται
ἠμποροῦν εὔκολα νὰ συνδεθοῦν μὲ τὰς παραστάσεις τῶν σχετι-
κῶν ἀριθμῶν, εἰς τρόπον ὥστε ὁ παῖς νὰ ἠμπορῇ νὰ καθορίζῃ
διαμιᾶς καὶ χωρὶς ἀπαρίθμησιν τὸν ἀριθμὸν δύο, τριῶν καὶ τεσ-
σάρων ἀντικειμένων, ὁποιανδήποτε μορφὴν διατάξεως καὶ ἂν ἔ-
χουν. Ὅ,τι τώρα συνάγεται ἀπὸ ὅλα τὰ ἀνωτέρω, εἶναι, ὅτι ἡ
ἐξωτερικὴ ἐποπτεία ἠμπορεῖ νὰ πλουτίσῃ τὰς σχηματισμένας
πλέον ἐννοίας τῶν πρώτων ἀριθμῶν μὲ ἕνα νέον γνώρισμα, μὲ
τὸ γνώρισμα τῆς μορφῆς τῆς διατάξεως τῶν μονάδων των. Ὁ
μικρὸς παῖς μανθάνει ἔτσι, ὅτι δύο δὲν εἶναι μόνον «ἕνα πρᾶ-
γμα καὶ ἕνα πρᾶγμα», ἀλλὰ καὶ «ἕνα πρᾶγμα καὶ ἕνα πρᾶγμα,
ποὺ ἔχουν τὴν μορφὴν . . ἢ : », τρία εἶναι «δύο πράγματα
καὶ ἕνα πρᾶγμα, ποὺ ἔχουν τὴν μορφὴν . . . ἢ ∴ » κ. τ. λ.
Ὅτι τώρα στερεώνονται περισσότερον αἱ ἔννοιαι τῶν πρώτων ἀ-
ριθμῶν μὲ τὸ νέον αὐτὸ γνώρισμα, μολονότι εἶναι ὅλως διόλου
ἐξωτερικῆς φύσεως καὶ προϋποθέτει πάντοτε τὴν ἀπαρίθμησιν,
μὲ τὴν ὁποίαν καὶ μόνον ἐξάγονται τὰ οὐσιώδη γνωρίσματα τῶν
ὡρισμένων ἀριθμῶν, εἶναι εὐνόητον. Ἀκριβῶς τῆς στερεώσεως
αὐτῆς ἀποτέλεσμα εἶναι, ὅπως εἴδαμεν, τὸ ὅτι οἱ παῖδες ἠμπο-
ροῦν νὰ καθορίζουν τὸν ἀριθμὸν δύο, τριῶν καὶ τεσσάρων ἀντι-
κειμένων διαμιᾶς, χωρὶς νὰ τὰ ἀπαριθμοῦν. Διὰ τὸν λόγον δὲ
αὐτὸν ὀφείλει καὶ ἡ διδασκαλία, ἐφόσον οἱ παῖδες δὲν προσέ-
χουν μόνοι των εἰς τὴν μορφὴν τῆς διατάξεως τῶν ἀπαριθμου-
μένων ἀντικειμένων, νὰ τοὺς κάμῃ αὐτὴ νὰ προσέχουν εἰς αὐτήν,
κυρίως δὲ εἰς τὴν μορφὴν τῆς εἰς μίαν σειρὰν διατάξεως, διότι
εἰς μίαν σειράν, ὅπως εἴπαμεν, διατάσσουν καὶ οἱ παῖδες τὰ
διάφορα ἀντικείμενα, ὅταν θέλουν νὰ τὰ ἀπαριθμήσουν.

Πρέπει ἐν τούτοις νὰ ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψει, ὅτι ἡ συμβολὴ αὐτὴ
τῆς ἐξωτερικῆς ἐποπτείας εἰς τὴν στερέωσιν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀρι-
θμῶν ἐξαντλεῖται σχεδὸν μὲ τοὺς τέσσαρας πρώτους ἀριθμούς.
Ἂν οἱ μικροὶ παῖδες ἠμποροῦν νὰ καθορίσουν διαμιᾶς καὶ χωρὶς
ἀπαρίθμησιν τὸν ἀριθμὸν δύο, τριῶν καὶ τεσσάρων πραγμάτων,
δὲν ἠμποροῦν νὰ κάμουν τὸ ἴδιον, ὅταν τὰ πράγματα αὐτὰ εἶναι
πέντε, ἕξι καὶ περισσότερα. Ὁ δὲ λόγος τοῦ πράγματος εἶναι, ὅτι,
ὅσον περισσότερα ἀπὸ τέσσερα εἶναι τὰ παρατηρούμενα πρά-

παρὰ νὰ ἐκκινήσῃ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς σειρᾶς καὶ νὰ ἀνέλθῃ διὰ
τῆς ἀπαριθμήσεως ἕως τὴν ὡρισμένην του αὐτὴν θέσιν.

Εἶναι τώρα ἀληθές, ὅτι ὁ παῖς, καὶ μάλιστα εἰς τὰς ἀρχάς, ὅ-
ταν παριστάνῃ ἕνα ἀριθμόν, δὲν περιορίζεται μόνον εἰς τὸ νὰ ἀ-
νέλθῃ εἰς τὴν σειρὰν ἕως τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, ἀλλὰ
προσπαθεῖ καὶ νὰ ἐποπτεύσῃ μὲ τὸ ἐσωτερικόν του ὄμμα ὅλην τὴν
σειράν, ἡ ὁποία διήκει ἕως τὸν ἀριθμόν, προσπαθεῖ δηλ. νὰ ἀντι-
ληφθῇ μὲ αὐτὸ καὶ ὅλας τὰς καθ᾽ ἕκαστον μονάδας, ἀπὸ τὰς ὁποίας
ἀποτελεῖται ἡ σειρὰ αὐτή, ἤτοι ὁ ἀριθμός. Αἱ προσπάθειαί του
δὲ αὐταὶ φυσικὰ ἐπιτυγχάνουν, ἐφόσον πρόκειται διὰ τοὺς μέχρι
τοῦ 4 ἀριθμούς. Ἡ ἐπιτυχία δὲ αὐτὴ ὀφείλεται εἰς τὸ γνωστόν
μας γεγονός, ὅτι αἱ μορφαὶ τῆς διατάξεως τῶν δύο, τῶν τριῶν
καὶ τῶν τεσσάρων ἀντικειμένων, ἐπειδὴ ἐντυπώνονται εὔκολα εἰς
τὴν μνήμην, ἔχουν συνδεθῇ στενὰ μὲ τὰς παραστάσεις τῶν ἀρι-
θμῶν 2, 3 καὶ 4. Ὅπως δὲ ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίληψις μιᾶς τέτοιας
μορφῆς ἀνακαλεῖ εἰς τὴν συνείδησιν τὴν παράστασιν τοῦ σχετικοῦ
ἀριθμοῦ, ἔτσι καὶ ἡ παράστασις τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ κάμνει δυ-
νατὴν τὴν ἐσωτερικὴν ἐποπτείαν τῆς σχετικῆς μορφῆς. Δι᾽ αὐτὸ
ἀκριβῶς καὶ ὁ παῖς παριστάνων τοὺς ἀριθμοὺς 2 ἢ 3 ἢ 4 ἠμπο-
ρεῖ ὄχι μόνον νὰ φθάνῃ εἰς τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν ἔχουν οἱ
ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἰς τὴν ὅλην σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ καὶ νὰ
συμπαριστάνῃ καὶ τὰς μορφάς των . . ἢ . . . ἢ . . . . , ἔτσι
δὲ νὰ ἐποπτεύῃ διαμιᾶς καὶ τὴν ὅλην σειράν, ἡ ὁποία διήκει
ἕως τὸν κάθε ἀριθμόν, καὶ νὰ παριστάνῃ διαμιᾶς ὅλας τὰς καθ᾽
ἕκαστον μονάδας, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀποτελεῖται. Ἐπειδὴ τώρα αἱ
παραστάσεις τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4 ἔχουν συνδεθῇ, καθὼς γνω-
ρίζομεν, καὶ μὲ ἄλλας μορφὰς διατάξεως, π.χ. ἡ παράστασις τοῦ
2 καὶ μὲ τὴν μορφὴν : , ἡ παράστασις τοῦ 3 καὶ μὲ τὴν μορ-
φὴν ⁝ ἢ τὴν μορφὴν .˙. κ.τ.λ., ἠμπορεῖ βέβαια ὁ παῖς νὰ πα-
ριστάνῃ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καὶ μὲ τὰς ἄλλας αὐτὰς μορφάς.
Προτιμᾷ ἐν τούτοις νὰ τοὺς παριστάνῃ μὲ τὰς μορφάς τῆς εἰς μίαν
σειρὰν διατάξεως, διότι ἔτσι συμπαριστάνει μαζὶ καὶ τὴν θέσιν,
τὴν ὁποίαν ἔχουν εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, ἐνῷ μὲ τὰς ἄλλας
μορφὰς εἶναι ἀναγκασμένος νὰ χάσῃ ἀπὸ τὴν ἀντίληψίν του τὴν
θέσιν αὐτήν. Διὰ τοὺς ἀνωτέρους τώρα ἀπὸ τὸν 4 ἀριθμοὺς αἱ

σχετικαὶ προσπάθειαι τοῦ παιδὸς ἀποτυγχάνουν διὰ τὸν ἴδιον
ἀκριβῶς λόγον, διὰ τὸν ὁποῖον δὲν ἠμπορεῖ νὰ καθορίσῃ καὶ διὰ
τῆς ἐξωτερικῆς ἐποπτείας τὸν ἀριθμὸν περισσοτέρων ἀπὸ 4 ἀν-
τικειμένων διαμιᾶς, ἤτοι χωρὶς νὰ τὰ ἀπαριθμήσῃ. Φυσικά, ἂν
ἡ διδασκαλία παρουσιάζῃ εἰς αὐτὸν μορφὰς διατάξεως πέντε,
ἓξ καὶ περισσοτέρων ἀντικειμένων, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ ἐν-
τυπωθοῦν μὲ ἀρκετὴν εὐκολίαν εἰς τὴν μνήμην, τὰς χρησιμο-
ποιεῖ καὶ αὐτὰς καὶ κατὰ τὴν ἐσωτερικὴν ἐποπτείαν, προτιμῶν
πάντοτε ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι δὲν τὸν ἀπομακρύνουν πολὺ ἀπὸ τὴν
εἰς μίαν σειρὰν διάταξιν.

Ἀλλ᾽ αἱ προσπάθειαι αὐταὶ τῶν παίδων, ὅπως κατὰ τὴν ἐσω-
τερικὴν ἐποπτείαν τῶν ἀριθμῶν συμπαριστάνουν καὶ τὰς καθ᾽
ἕκαστον μονάδας των, δὲν διαρκοῦν πολύ. Ἕνας βέβαια λόγος
τοῦ πράγματος εἶναι, ὅτι ἐνωρὶς ἀντιλαμβάνονται, ὅτι δὲν ἠμπο-
ροῦν νὰ τὸ κατορθώσουν αὐτὸ παρὰ εἰς ἐλαχίστους ἀριθμούς.
Ἄλλος λόγος εἶναι, ὅτι καὶ διὰ τοὺς ὀλίγους αὐτοὺς ἀριθμοὺς
ἀναγκάζονται νὰ συγκρατοῦν εἰς τὴν μνήμην των περισσοτέρας
τῆς μιᾶς μορφὰς διατάξεως. Ὁ κυριώτερος ὅμως λόγος εἶναι ὁ
ἀκόλουθος. Ὅσον οἰκειότεροι γίνονται μὲ τὰς ἐννοίας τῶν ἀρι-
θμῶν, τόσον εὐκολώτερα ἐννοοῦν, ὅτι ἀρκεῖ καὶ ὑπεραρκεῖ νὰ
γνωρίζουν τὴν ὡρισμένην θέσιν τοῦ κάθε ἀριθμοῦ εἰς τὴν προϊ
οῦσαν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, νὰ γνωρίζουν δηλ. τὸν ἀριθμὸν τῶν
μονάδων του, δὲν εἶναι δὲ ἀπολύτως ἐπάναγκες καὶ νὰ ἐποπτεύουν
μὲ τὸ ἐσωτερικόν των ὄμμα διαμιᾶς ὅλας τὰς μονάδας του αὐτάς.
Καὶ ἂν δὲν ἠμποροῦν π.χ. νὰ ἐποπτεύσουν ἐσωτερικῶς διαμιᾶς
ὅλας τὰς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 7, ἠξεύρουν ὅμως πολὺ καλά, ὅτι
εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀναλύσουν εἰς κάθε στιγμὴν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν
εἰς τὰς μονάδας του. Ἀντιλαμβάνονται ἄλλωστε ἐπίσης οἱ παῖδες,
ὅτι καὶ ἡ ἐν παραστάσει, ἤτοι ἡ ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμη-
τικῶν πράξεων γίνεται ἀσυγκρίτως καλύτερα, ἂν παριστάνωνται
οἱ ἀριθμοὶ κατὰ μίαν προϊοῦσαν σειρὰν παρὰ ἂν παριστάνωνται
αἱ μορφαὶ τῆς διατάξεως τῶν μονάδων των. Εἰς τὴν πρώτην
περίπτωσιν ἡ ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων
θὰ συνίσταται εἰς ἁπλῆν ἄνοδον ἢ κάθοδον εἰς τὴν σειρὰν τῶν
ἀριθμῶν. Εἰς τὴν δεύτερην θὰ συνίσταται εἰς τὸ πολύπλοκον ἔρ-
γον τῆς ἑνώσεως ἢ τοῦ χωρισμοῦ μορφῶν. Δι᾽ αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς

καὶ οἱ παῖδες, ὅταν πρόκειται νὰ ἐκτελέσουν μίαν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν, π.χ. τὴν πρόσθεσιν 6+4, δὲν παριστάνουν τὰς μορφὰς τῆς διατάξεως τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν, ἤτοι τὰς μορφὰς : : : καὶ : :, διὰ νὰ τὰς ἑνώσουν εἰς τὴν μορφὴν : : : : :, ἀλλὰ θεωροῦντες τὴν σειρὰν 1—6 ὡς τελείως γνωστὴν προχωροῦν πρὸς τὰ ἐμπρὸς εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 4 βαθμίδας. Καὶ διὰ τὸν λόγον λοιπὸν αὐτὸν οἱ παῖδες προτιμοῦν νὰ ἐποπτεύουν κατὰ κανόνα μὲ τὸ ἐσωτερικόν των ὄμμα τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἀποτελοῦντας μίαν προϊοῦσαν σειράν. Τὸ γεγονὸς δὲ αὐτὸ πρέπει νὰ τὸ λάβῃ ὑπὸ σοβαρωτάτην ἔποψιν ἡ διδασκαλία. Ὀφείλει νὰ παρουσιάζῃ κατὰ κανόνα εἰς τοὺς μαθητὰς τὰ ἀπαριθμητέα ἀντικείμενα εἰς τὴν κατὰ μίαν προϊοῦσαν σειρὰν διάταξιν, μὲ τὴν ὁποίαν κατόπιν οἱ παῖδες ἀντιλαμβάνονται μὲ τὸ ἐσωτερικόν των ὄμμα τοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελοῦν ἀπὸ μνήμης τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις. Θὰ ἠμπορῇ βέβαια, καθὼς εἴπαμεν εἰς τὴν προηγούμενην παράγραφον, καὶ μάλιστα εἰς τὰς ἀρχάς, νὰ καθιστᾷ τοὺς μαθητὰς προσεκτικοὺς καὶ εἰς τὰς μορφὰς ἐκείνας τῆς διατάξεως, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ ἐντυπώνωνται εὔκολα εἰς τὴν μνήμην, διότι μὲ τὰς μορφὰς αὐτὰς στερεώνονται αἱ ἔννοιαι τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἠμπορῇ νὰ καθορίζεται ὁ ἀριθμὸς ὀλίγων ἀντικειμένων καὶ χωρὶς ἀπαρίθμησιν. Ἀλλ᾽ αὐτὸ θὰ ἀποτελῇ τὴν ἐξαίρεσιν καὶ ὄχι τὸν κανόνα. Ἄλλωστε διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 4 ὑπάρχουν τέτοιαι μορφαὶ διατάξεως καὶ εἰς τὴν μίαν προϊοῦσαν σειράν, καὶ μάλιστα αἱ ἁπλούστεραι, ἤτοι αἱ μορφαὶ . . , . . . καὶ . . . .—Παρέκκλισις ἀπὸ τὴν μίαν σειρὰν θὰ γίνεται κατ᾽ ἀνάγκην μόνον προκειμένου περὶ τῶν ἀριθμῶν 5—8 ἢ 5 – 10. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν σκόπιμον εἶναι νὰ ἐκλέγωνται μορφαὶ διατάξεως μὴ ἀπομακρυνόμεναι πολὺ ἀπὸ τὴν μίαν σειράν, ὁποῖαι εἶναι αἱ μορφαὶ τῶν 2 σειρῶν. Εἶναι δὲ τέτοιον τὸ καθῆκον αὐτὸ τῆς διδασκαλίας, ὥστε θὰ ἔπρεπε νὰ τὸ ἐκτελέσῃ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ἀκόμη, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ παῖδες θὰ ἐπώπτευαν με τὸ ἐσωτερικόν των ὄμμα τοὺς ἀριθμοὺς ὄχι κατὰ μίαν σειράν, ἀλλὰ κατ᾽ ἄλλον τρόπον. Διότι εἶναι προφανές, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των δὲν ἠμποροῦν νὰ νοηθοῦν καλύτερα παρὰ ὡς ἀποτελοῦντες μίαν ἀτέρμονα προϊοῦσαν σειράν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ κάθε ἑπόμενος γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν

του μὲ τὴν προσθήκην τῆς μονάδος καὶ ὅτι τόσον ἡ ἀπαρίθμησις, ὅσον καὶ αἱ ἄλλαι ἀριθμητικαὶ πράξεις δὲν ἠμποροῦν νὰ γίνουν κατὰ νοῦν καλύτερα παρὰ μὲ τὴν ἄνοδον καὶ κάθοδον εἰς τὴν σειρὰν αὐτήν.

Μὲ τὸν ἀνωτέρω τώρα τρόπον τῆς ἐσωτερικῆς ἐποπτείας τῶν σχηματισμένων πλέον ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν συνδέεται, ὅπως πολὺ ὀρθὰ παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀν., μέρ. 1, σελ. 40) καὶ ***μία ἄλλη ἀντίληψις τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ***, τὴν ὁποίαν δὲν ἐμνημονεύσαμεν ἀκόμη. Κάθε ὡρισμένος ἀριθμὸς εἶναι, ὅπως ἠξεύρομεν, ἔννοια συνολική, ἔννοια δηλ. ἑνὸς συνόλου μονάδων. Ἐδῶ ὅμως εἰς τὴν προϊοῦσαν σειράν, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν οἱ ὡρισμένοι ἀριθμοὶ εἰς τὴν συνείδησιν, τὸ πνεῦμα τοὺς ἀντιλαμβάνεται ὀλίγον κατ᾽ ὀλίγον ὄχι ὡς σύνολα καθ᾽ ἕκαστον ὄντων, ἀλλ᾽ ὡς καθ᾽ ἕκαστον ὄντα, ὡς ἰδιαίτερα ἀντικείμενα, ὡς ἄτομα. Ἔτσι οἱ ἀριθμοὶ ἀτομικοποιοῦνται, ὑποστασιοποιοῦνται, προσωποποιοῦνται. Ἐφόσον δὲ τὸ πνεῦμα τοὺς θεωρεῖ ὡς καθέκαστα μέλη τῆς σειρᾶς, δὲν ἀποδίδει σημασίαν εἰς τὸ γεγονός, ὅτι ἀρχικὰ εἶναι ἔννοιαι συνόλων ὡρισμένων ἀτόμων. Ἔτσι ἡ συγκεκριμένη συνοχὴ μὲ ***τὰ πράγματα***, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀρχικὰ εἶναι ἀχώριστοι, γίνεται χαλαρώτερη, δὲν λαμβάνεται ἰδιαιτέρως ὑπ᾽ ὄψει. Ἀλλὰ καὶ ἔτσι ἡ νόησις ἠμπορεῖ νὰ ἐργάζεται ἀνετώτερα, εὐκολώτερα, πρακτικώτερα. Ὁ πρακτικὸς τώρα αὐτὸς μετασχηματισμὸς τῶν ἐννοιῶν τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν εἰς τὴν συνείδησιν εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Räther ἔκαμε πολλοὺς νὰ ὑποστηρίζουν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν ἀπολύτως τίποτε τὸ συγκεκριμένον καὶ δι᾽ αὐτὸ δὲν ἔχουν ἀπολύτως καμίαν σχέσιν μὲ τὴν ἐμπειρίαν. Οἱ ὑποστηρίζοντες τὴν γνώμην αὐτὴν δὲν κάμνουν κατὰ τὸν Räther διάκρισιν μεταξὺ τῆς ἀρχικῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῆς ὑποστασιοποιήσεώς της. Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀρχικὰ ἀχώριστοι ἀπὸ τὰ πράγματα καὶ συγκεκριμένοι, μόνον δὲ ἡ ἀνάγκη τῆς ταχυτέρας καὶ εὐκολωτέρας κινήσεως τῆς νοήσεως προκαλεῖ τὸ πνεῦμα νὰ τοὺς ἀντιλαμβάνεται ὡς ἀφῃρημένους[1].

Ἡ μέθοδος τῆς ρυθμικῆς ἀπαριθμήσεως. Ὁ διδάσκαλος τῆς Plauen *Fährmann* φρονεῖ μέν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ σχηματίζονται διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως, ἀλλὰ νομίζει, ὅτι ὁ σχηματισμὸς αὐτὸς κατορθώνεται εὐκολώτατα, ἐὰν ἡ ἀπαρίθμησις γίνεται ῥυθμικά. Δι᾽ αὐτὸ ἐφαρμόζει μίαν ἰδιάζουσαν μέθοδον ἀπαριθμήσεως, ***τὴν μέθοδον τῆς ῥυθμικῆς ἀπαριθμήσεως***. Ἔχει δὲ ἐκθέσει τὸ σύστημά του αὐτὸ εἰς τὰς δύο του ἐργασίας «Das rhythmische Zählen, Der Konzentrationspunkt des elementaren Rechnens» (Plauen, Kell, 1896, 1,60 μ.) καὶ «Die Veranschaulichung im Rechnen nach der rhythmischen Zählmethode» (Plauen, Kell, 1902, 90 λ.). Ὁ Fährmann ἀποκρούει τὴν χρῆσιν κάθε τεχνητοῦ μέσου ἐποπτείας, ὡς ἐποπτικὰ δὲ μέσα μεταχειρίζεται στοιχεῖα τοῦ ὅλου κύκλου τῆς ἐμπειρίας τῶν μαθητῶν, καθὼς παιδία, ἀναγνωσματάρια, κυτία κονδυλίων, μικρὰ νομίσματα, μέλη τοῦ σώματος (π. χ. τὰς χεῖρας, τοὺς ὀφθαλμούς, τὰ ὦτα, τοὺς πόδας), τὰ ὑποδήματα, τὰ περιπόδια κ.τ.λ. Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ προκαλοῦνται οἱ παῖδες νὰ τὰ ἀπαριθμοῦν ῥυθμικά. Ὁ ῥυθμὸς σχηματίζεται διὰ τῆς χρήσεως μὴ τονιζομένων καὶ τονιζομένων ἀριθμητικῶν, ἀποτελεῖται δὲ [ἀπὸ ἰάμβους (2=ενα δυὸ), ἀναπαίστους (3=ενα δυο τρία) καὶ ἀμφιμάκρους (— υ —) καὶ τὴν σύνδεσιν αὐτῶν, διακοπτομένην διὰ μιᾶς μικρᾶς παύσεως (4 = ενα δυὸ (παῦσις) τρια τέσσερα. 5 = ἕνα δυο τρία (παῦσις) τεσσερα πέντε)]. Ὁ Fährmann συνοδεύει τὴν ῥυθμικὴν ἀπαγγελίαν μὲ ῥυθμικὰς ἐνεργείας (π. χ. μὲ ῥυθμικὴν κροῦσιν τῶν χειρῶν). Ἔτσι ὁ F. ἐκτὸς τῶν ὀπτικῶν αἰσθημάτων προκαλεῖ εἰς τοὺς μαθητὰς καὶ ἀκουστικά, μὲ τὰ ὁποῖα μάλιστα συνδέει καὶ ἁπτικὰ καὶ κινητικά. Τὰ ἀκουστικὰ αἰσθήματα εἶναι κατὰ τὴν γνώμην του τὰ ἁπλούστατα καὶ ἐπιβλητικώτατα μέσα τῆς ἐποπτείας. Δι᾽ αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς πρέπει καὶ ὁ ῥυθμὸς νὰ ἀποβῇ ὁ φορεὺς τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ. Μολονότι ἡ μέθοδος τῆς ῥυθμικῆς ἀπαριθμήσεως μᾶς φαίνεται κάπως ἐπιτηδευμένη, ἐν τούτοις φρονοῦμεν, ὅτι καὶ μὲ αὐτὴν ἠμπορεῖ νὰ ἐκπληρωθῇ ὁ ἐπιδιωκόμενος σκοπός, ἐφόσον γίνεται χρῆσίς της ἀπὸ διδάσκαλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐνθουσιασμὸν δι᾽ αὐτήν, καὶ εἰς μαθητάς, οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν ἐμφανῶς εἰς τὸν ἀκουστικὸν τύπον.

Β΄. Ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς εἶναι προϊὸν τῆς ἀμέσου ἐποπτείας.

Τὴν γνώμην αὐτήν, τῆς ὁποίας εἰσηγηταὶ πρέπει νὰ θεωρηθοῦν ὁ Πεσταλότσης καὶ ὁ Grube, ἀσπάζονται ἀπὸ τοὺς νεωτέρους Μεθοδικοὺς ὁ Beetz, ὁ Lay, ὁ Göbelbecker, ὁ Schneider, ὁ Walsemann, ὁ Dienstbach καὶ ἄλλοι.

Ὁ *Beetz* καταπολεμεῖ ἐντονώτατα τὴν γνώμην, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ σχηματίζονται διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως. Φρονεῖ, ὅτι ἡ ἀπαρίθμησις εἶναι ἡ μεγαλύτερη λοξοδρομία, τὴν ὁποίαν ἠμπορεῖ νὰ κάμῃ κανεὶς πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, καὶ ὅτι εἶναι σπατάλη χρόνου καὶ δυνάμεως, διότι δὲν συνεπάγεται ἀσφαλῆ ἀποτελέσματα· εἶναι κατὰ τὴν γνώμην του μία μηχανικὴ ἐργασία, διότι κατ᾽ αὐτὴν ὁ παῖς δὲν παριστάνει τίποτε, τὸ ὁποῖον νὰ ἀντιστοιχῇ ἀπὸ πραγματικῆς ἀπόψεως πρὸς τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν. Αἱ ἔννοιαι τῶν ἀριθμῶν σχηματίζονται κατὰ τὸν Beetz δι᾽ ἀμέσου ἐποπτείας καὶ δι᾽ ἐπακολουθούσης ἀφαιρέσεως. Ἡ σχέσις τοῦ πλήθους, τὴν ὁποίαν παριστάνει ὁ κάθε ἀριθμός, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν καθ᾽ ἕκαστον ὄντων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται, γίνεται ἀπ᾽ εὐθείας ἀντιληπτὸν δι᾽ ἀμέσου ἐποπτείας, ἀποχωριζόμενον δὲ ὅλως διόλου ἀπὸ τὰ ἄλλα γνωρίσματα τῶν ὄντων καὶ λαμβανόμενον μόνον του ὑπ᾽ ὄψει, ἀφαιρούμενον, ἀποτελεῖ τὸ σταθερὸν περιεχόμενον τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ. Ὑπὸ τὴν ἄμεσον τώρα ἐποπτείαν δὲν ἐννοεῖ ὁ Beetz «τὴν ἀκατέργαστον πρόσληψιν ὡρισμένων αἰσθητικῶν ἐντυπώσεων»· ἀπεναντίας ἡ ἄμεσος ἐποπτεία συντελεῖται «διὰ δημιουργικῆς ἐνεργείας τοῦ πνεύματος, διὰ τῆς καλουμένης συνθέσεως. Τὰ διὰ τῶν ἐξωτερικῶν αἰσθήσεων σχηματιζόμενα ἀκατέργαστα αἰσθήματα καὶ ἡ διὰ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ πρωταρχικῆς δυνάμεως τοῦ πνεύματος συντελουμένη σύνθεσίς των ἀποτελοῦν τὰ δύο στοιχεῖα τῆς ἀντιλήψεως ἢ ἀμέσου ἐποπτείας, τῆς βάσεως αὐτῆς κάθε παραστάσεως».

Ὁ Beetz ὑποστηρίζει, ὅτι οἱ μικρότεροι ἀριθμοὶ γίνονται ἀντιληπτοὶ διὰ **στιγμιαίας** ἀντιλήψεως, δι᾽ ἑνὸς μόνον βλέμματος, ὅτι δὲ μὲ μεθοδικὴν ἄσκησιν ἠμπορεῖ νὰ κατορθωθῇ στιγμιαία ἀντίληψις καὶ μεγαλυτέρων ἀριθμῶν. Προτείνει δὲ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν τὴν χρησιμοποίησιν ὄχι σειρῶν, ἀλλὰ ὁμάδων, εἰκόνων ἀπὸ στιγμάς, τὰς ὁποίας ὀνομάζει «τύπους τῆς ἀριθμήσεως», διότι ἐπάνω εἰς αὐτὰς πρέπει νὰ παριστάνωνται καὶ νὰ ἐκτελοῦνται καὶ αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις. (Ἴδε καὶ τὸ ἔργον του «Das Typenrechnen auf psychophysischer Grundlage», Halle, Schroedel, 1899). Εἰς τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον κεφάλαιον «περὶ τῶν μέσων τῆς ἐποπτείας κ.τ.λ.» παραθέτομεν τὰς γνωστοτέρας «εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν», μεταξὺ δὲ αὐτῶν καὶ τοὺς τύπους τῆς ἀριθμήσεως τοῦ Beetz. Τὸ θεμελιῶδες σχῆμα τῶν τύπων αὐτῶν εἶναι τὸ τετράγωνον. Ὁ ἑκάστοτε προηγούμενος τύπος περιλαμβάνεται ἀμετάβλητος εἰς τὸν ἀκόλουθον. Ὁ Beetz κατεσκεύασε κατ᾿ ἀρχὰς ἕνα πίνακα τῶν τύπων, ὁ ὁποῖος καὶ περιγράφεται λεπτομερέστερα εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν ἔργον του (σελ. 135 κ. ἀκ.) καὶ περὶ τοῦ ὁποίου θὰ γίνῃ λόγος καὶ κατωτέρω εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ τῶν μέσων τῆς ἐποπτείας. Ἀργότερα ὁ Beetz μὴ θεωρῶν ἐπαρκεῖς τοὺς ἀκινήτους τύπους ἐφεῦρε τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα, ἀποτελουμένην ἀπὸ 10 βαθμίδας. Καὶ ἡ μὲν μικρὰ ἀριθμητικὴ κλῖμάξ του χρησιμεύει μόνον πρὸς παράστασιν τῶν 10 πρώτων ἀριθμῶν· οἱ τύποι ἔχουν σχεδιασθῆ ἐπάνω εἰς κύβους, οἱ ὁποῖοι τοποθετοῦνται εἰς τὰς βαθμίδας τῆς κλίμακος. Ἡ δὲ μεγάλη ἀριθμητικὴ κλῖμάξ του αἰσθητοποιεῖ τὸν τρόπον τοῦ σχηματισμοῦ τῶν μνημονευθέντων ἀριθμῶν καὶ τὰς ἐπ᾿ αὐτῶν ἐκτελουμένας πράξεις. Εἰς τὰς βαθμίδας τῆς κλίμακος τοποθετοῦνται στῆλαι (αἱ στῆλαι τοῦ Tillich, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ ἀκόλουθον κεφάλαιον), ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας ἔχουν σχεδιασθῆ αἱ στιγμαί. Καὶ τὰς δύο αὐτὰς κλίμακας ἠμπορεῖ νὰ προμηθευθῇ ὁ βουλόμενος ἀπὸ τὸν C. Christ (Neustadt a. Rennsteig), καθὼς καὶ ἀπὸ τὸν A. Zickfeldt (Osterwieck), τὴν μὲν πρώτην ἀντὶ 6 μ., τὴν δὲ μεγαλύτερην ἀντὶ 12 μ.

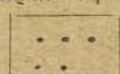
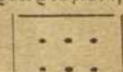
Ὁ *Lay* ἔκαμε ψυχολογικὰ πειράματα πρὸς ἔρευναν τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον σχηματίζεται ὁ ἀριθμός, τὰ δὲ σχετικὰ πορίσματα ἐδημοσίευσε εἰς τὸ κατὰ τὸ 1897 ἐκδοθὲν ἔργον του «Führer durch den ersten Rechenunterricht» (3 διασκ. ἐκδ., 1914, Leipzig, Quelle u. Meyer). Εἶναι δὲ ἀξιοσημείωτον, ὅτι τὰ πειράματα αὐτὰ τοῦ Lay δὲν ἔγιναν γνωστὰ εἰς εὐρυτέρους

κύκλους, ὅπως ἔγιναν τὰ πειράματά του τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὴν ὀρθογραφικὴν διδασκαλίαν, διὰ τῶν ὁποίων ἐκαθόρισε τὴν ἀξίαν τῶν ἀντιγραφικῶν ἀσκήσεων διὰ τὴν Ὀρθογραφίαν καὶ περὶ τῶν ὁποίων θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὴν Διδακτικὴν τῶν γλωσσικῶν μαθημάτων.

Ὁ Lay ἔκαμε κατ᾿ ἀρχὰς σύγκρισιν τῶν εἰκόνων τῆς μιᾶς σειρᾶς (π. χ. τοῦ Ῥωσσικοῦ ἀριθμητηρίου) μὲ τὰς εἰκόνας τῶν ὁμάδων τοῦ Born (ἴδ. τὸ κεφάλ. περὶ τῶν μέσων τῆς ἐποπτείας κ. τ. λ.) καὶ ἔφθασε εἰς τὸ πόρισμα, ὅτι αἱ τελευταῖαι ὑπερέχουν ἀπὸ τὰς πρώτας. Εὗρε δὲ ἐπίσης ὁ Lay, ὅτι αἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν τοῦ Born εἶναι ἀνώτεραι ἀπὸ τὰς ὁμοίας εἰκόνας τοῦ Böhme, τοῦ Hentschel, τοῦ Sobolewsky, τοῦ Kaselitz (ἴδ. αὐτ.) καὶ τοῦ Beetz. Ἐν τούτοις φρονεῖ, ὅτι καὶ εἰς τὰς εἰκόνας τοῦ Born ἡ ἀντίληψις τῶν ἀριθμῶν 7, 8, 9 καὶ 10 προσκρούει εἰς ἀρκετὰς δυσκολίας καὶ ὅτι αἱ δυσκολίαι αὐταὶ αὐξάνουν σημαντικὰ διὰ τοὺς ἀνωτέρους ἀπὸ τὸν 10 ἀριθμούς. Πολὺ δὲ ὑπέρτεραι ἀπὸ τὰς εἰκόνας τοῦ Born καὶ τοῦ Beetz καὶ ὡς πρὸς τὴν εὐκολίαν τῆς ἀντιλήψεως καὶ ὡς πρὸς τὴν ἀπομνημόνευσιν καὶ τὴν ἔγγραφον παράστασιν εἶναι κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Lay αἱ ὑπὸ τοῦ Grass καὶ τοῦ Unterlauf χρησιμοποιούμεναι, ὑπ᾿ αὐτοῦ δὲ ὀνομασθεῖσαι «τετραγωνικαὶ εἰκόνες», αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ζεύγη ὑπαλλήλων στιγμῶν, τὰ ὁποῖα ἀνὰ δύο συνενώνονται εἰς χωριστὰ τετράγωνα (ἴδ. τὸ κεφάλ. περὶ τῶν μέσων τῆς ἐποπτείας κ. τ. λ.). Ἐπίσης δὲ ἡ διὰ τῶν τετραγωνικῶν εἰκόνων αἰσθητοποίησις ὑπερέχει ἀπὸ τὴν αἰσθητοποίησιν μὲ σειρὰς ἀπὸ γραμμὰς ἢ μὲ τὰ δάκτυλα. Ἔχων δὲ ὁ Lay ὑπ᾿ ὄψει, ὅτι μερικοὶ Μεθοδικοὶ εἰς τὰς εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν ἢ εἰς τὰ ἄλλα ἐποπτικὰ μέσα διατάσσουν τὰς μονάδας καθέτως τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, (ὅπως γίνεται π. χ. εἰς τὸ ἀριθμητικὸν κιβώτιον τοῦ Tillich καὶ εἰς τὰ κάθετα Ῥωσσικὰ ἀριθμητήρια), ἐξηκρίβωσε διὰ πειραμάτων, ὅτι ἡ ὁριζοντία διάταξις τῶν μονάδων (ὅπως π. χ. γίνεται εἰς τὸ ὁριζόντιον Ῥωσσ. ἀριθμητήριον καὶ εἰς τὰς τετραγωνικὰς εἰκόνας τοῦ Lay) εἶναι προτιμότερη ἀπὸ τὴν κάθετον. Ἐπίσης δὲ ὁ Lay διεπίστωσε, ὅτι ὁ μεθοδικὸς σχηματισμὸς τῶν παραστάσεων τῶν ἀριθμῶν πρέπει νὰ λαμβάνῃ ὑπ᾿ ὄψει καὶ τὴν ἁφὴν καὶ ὅτι δι᾿ αὐτὸ τὰ στερεὰ μέσα

Ἐκ τυπογραφικῆς ἀβλεψίας αἱ σελίδες 94 καὶ 95 ἐτέθησαν κατ' ἀντίθετον διαδοχήν.

τὴν σχέσιν τοῦ πλήθους, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πραγμάτων. Ἠμπορεῖ δὲ ὁ ἀριθμὸς νὰ ἐμφανίζεται ἢ ὡς ἄθροισμα μονάδων (ἀθροιστικὸς ἀριθμὸς) ἢ ὡς ἄθροισμα ἴσων πληθῶν (ἀριθμὸς πληθῶν, πολλαπλασιαστὴς ἢ καὶ ἀφῃρημένος ἀριθμός). Ὁ Schneider εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ὁ ἀριθμὸς δὲν σχηματίζεται δι' ἀπαριθμήσεως. Ἡ ἀπαρίθμησις εἶναι κατὰ τὴν γνώμην του ἁπλούστατα ἐπακολούθημα τῆς συγκρίσεως τοῦ περιεχομένου τῶν ἀριθμῶν, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ ἑκάστοτε ἑπόμενος εἶναι μεγαλύτερος κατὰ μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν προηγούμενον. Ἡ ἀπαρίθμησις ἔχει πρὸς τὸν ἀριθμόν, ὅπως τὸ ἀποτέλεσμα πρὸς τὴν αἰτίαν, ὄχι δὲ ἀντιστρόφως. Καὶ ἡ ἀπαρίθμησις εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρᾶξις, δι' αὐτὸ δὲ ἔχει ἀνάγκην τῆς ἐποπτείας ὡς βάσεως. Ἐν τούτοις ἡ ἀπαρίθμησις δὲν πρέπει νὰ ἐκβληθῇ ὅλως διόλου ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῆς πρώτης ἀριθμήσεως, διότι ἐξαναγκάζει τοὺς μαθητὰς νὰ παρατηροῦν μὲ ἀκρίβειαν, νὰ προσηλώνουν εἰς κάθε μονάδα «τὴν κιτρίνην κηλῖδα» τοῦ ἀμφιβληστροειδοῦς καὶ ἔτσι νὰ τὴν προσαρτοῦν καθ' ἑαυτὴν εἰς τὴν παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ. Ἀλλὰ κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν πρώτων ἀριθμῶν δὲν πρέπει νὰ γίνεται χρῆσις τῆς ἀπαριθμήσεως, διότι ἀποβαίνει μόνον ἐμπόδιον εἰς αὐτόν, καθόσον προκαλεῖ εἰς τοὺς παῖδας σύγχυσιν μεταξὺ τῶν ἀπολύτων καὶ τῶν τακτικῶν ἀριθμητικῶν.

Εἰς τὰ πειράματά του ὁ Schneider ἐχρησιμοποίησε κυρίως τὸ ἀριθμητικὸν κιβώτιον τοῦ Tillich, τὸ ὁποῖον δὲν ἔλαβε ὑπ' ὄψει ὁ Lay εἰς τὰ ἰδικά του, προσέτι δὲ στιγμὰς καὶ γραμμάς, τὸ Ῥωσσικὸν ἀριθμητήριον, τὴν εἰς τὴν ἰδικήν του ἀριθμητικὴν συσκευὴν ἐφαρμοσθεῖσαν διάταξιν, κατὰ τὴν ὁποίαν κάθε ἀριθμὸς παριστάνεται μὲ διπλῆν σειρὰν σφαιρῶν περιωρισμένην ἐντὸς ἑνὸς τετραγώνου (π. χ. 5 = , 6 =  κ.τ.λ.), καθὼς καὶ τὰς τετραγωνικὰς εἰκόνας τῶν Grass, Unterlauf καὶ Lay. Ὁ Schneider καταλήγει εἰς τὰ ἀκόλουθα πορίσματα: «Τὰ χειρότερα ἀποτελέσματα εἶχαν αἱ (χωρὶς χωριστικὰς γραμμὰς) στῆλαι τοῦ Tillich. Ὁ χωρισμὸς τῶν μονάδων των μὲ γραμμὰς ἐβοηθοῦσε κάπως τὴν ἀντίληψιν. Ὅσον δὲ λεπτότεραι ἦσαν αἱ γραμμαί, τόσον περισσότερα σφάλματα ἐγίνοντο. Τὰ ὀλιγώτερα σφάλματα ἐγίνοντο, ἂν μετὰ τὴν πέμπτην

τῆς ἐποπτείας εἶναι προτιμότερα τῶν γραφικῶν. Τὸ καταλληλότερον δὲ σχῆμα διὰ τὰ στερεὰ μέσα τῆς ἐποπτείας εἶναι κατὰ τὴν γνώμην του τὸ σφαιρικόν. Τὰ τελικὰ τώρα πορίσματα, εἰς τὰ ὁποῖα καταλήγουν τὰ πειράματα, τὰ ὁποῖα ἔκαμε εἰς παῖδας μὴ φοιτήσαντας ἀκόμη εἰς τὸ σχολεῖον, εἶναι, ὅτι μὲ τὰς τετραγωνικὰς εἰκόνας ἠμποροῦν εὔκολα οἱ ἀριθμοὶ νὰ γίνωνται ἀντιληπτοί, νὰ ἐντυπώνωνται, νὰ παριστάνωνται καὶ νὰ ἰχνογραφοῦνται, ὅτι μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἠμποροῦν νὰ σχηματισθοῦν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης δεκάδος, ἂν μὴ καὶ περισσότεροι, καὶ ὅτι ἑπομένως εὐκρινεῖς καὶ ζωνταναὶ παραστάσεις τῶν ἀριθμῶν ἠμποροῦν νὰ σχηματίζωνται ἄνευ ἀπαριθμήσεως καὶ ἄνευ ἀριθμητικῶν ὀνομάτων. Δι' αὐτὸ ὁ Lay ἀποκρούει τὴν θεωρίαν, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν ὁ ἀριθμὸς σχηματίζεται **μόνον** διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως. Κάμνει δὲ ὁ Lay αὐστηρὰν διάκρισιν μεταξὺ τοῦ σχηματισμοῦ τῆς παραστάσεως τοῦ ἀριθμοῦ, (κατὰ τὸν ὁποῖον παίζει σπουδαιότατον μέρος ἡ τοπικὴ διάταξις τῶν πραγμάτων) καὶ τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν παρατηρεῖ, ὅτι προφανῶς «εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν διάταξιν τῶν πραγμάτων εἰς τὸν χῶρον καὶ τὸν χρόνον». Εἰς τὰ ἀνωτέρω πορίσματα τῶν ψυχολογικῶν του πειραμάτων στηριζόμενος ὁ Lay ἔχει κατασκευάσει ἰδικά του μέσα ἐποπτείας, πρὸς χρῆσιν μὲν τοῦ διδασκάλου διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς τάξεως ἕνα ἀριθμητήριον μὲ σφαίρας σχηματιζούσας τετραγωνικὰς εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν (περιγραφόμενον λεπτομερῶς εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν ἔργον του, σελ. 207 κ. ἀκ.), πρὸς χρῆσιν δὲ τῶν μαθητῶν ἕνα ἀριθμητικὸν κιβώτιον (περιγραφόμενον εἰς τὸ ἴδιον ἔργον, σελ. 209 κ. ἀκ.).

Ἐκτὸς τοῦ Lay ἀριθμητικὰ πειράματα ἔκαμε καὶ ὁ *Schneider* (ἴδ. τὸ ἔργον του «Die Zahl im grundlegenden Rechenunterricht, Entstehung, Entwicklung und Veranschaulichung derselben unter Bezugnahme auf die physiologische Psychologie», τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ 7 τεῦχ. τοῦ 3 τόμου τῆς «Sammlung von Abhandlungen an dem Gebiete der pädagogischen Psychologie und Physiologie» τῶν Schiller καὶ Ziehen, 1900, Berlin, Reuther und Reichard). Ἡ φύσις τοῦ ἀριθμοῦ ἔγκειται κατὰ τὸν Schneider εἰς τοῦτο, ὅτι παριστάνει μονάδα ὑπῆρχε μία παχεῖα γραμμή. Ἡ στιγμή, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἡμισφαίριον εἶναι σχεδὸν δύο φορὰς ἀνώτερα ἀπὸ τὴν γραμμήν». Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἀπορρίπτει ὁ Schneider τὰ μέσα ἐκεῖνα τῆς ἐποπτείας, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς μονάδας μὲ γραμμάς, ξυλάρια ἢ βαθμίδας. Ἡ ὁριζοντία διάταξις προκαλεῖ καὶ κατ' αὐτὸν ὀλιγώτερα σφάλματα ἀπὸ τὴν κάθετον. Ἡ διὰ τετραγώνων περιωρισμένη διπλῆ σειρὰ τοῦ ἰδίου τοῦ Schneider εἶναι κατὰ τὴν γνώμην του ὀκτὼ φορὰς περίπου ἀνώτερη ἀπὸ τὰς στήλας τοῦ Tillich ὡς πρὸς τὴν ἀντίληψιν τῶν ἀριθμῶν. Ἐξ ἄλλου ἡ διπλῆ σειρὰ εἶναι ἑπτὰ φορὰς ἀνώτερη ἀπὸ τὴν εἰς μίαν σειρὰν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν, παρουσιάζει δὲ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων περισσότερα πλεονεκτήματα καὶ ἀπὸ τὰς τετραγωνικὰς εἰκόνας τοῦ Lay, Grass κ.τ.λ.

Ὅπως ὁ Lay, ἔτσι καὶ ὁ Schneider ἔχει κατασκευάσει μίαν μεγάλην συσκευὴν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν καὶ ἕνα μικρὸν καὶ διὰ τοὺς μαθητὰς προοριζόμενον ἀριθμητικὸν κιβώτιον. Ὅπως δὲ τὰ πειράματα τοῦ Lay ἔτσι καὶ τὰ πειράματα τοῦ Schneider καταλήγουν εἰς τὸ πόρισμα, ὅτι αἱ ἰδικαί του εἰκόνες εἶναι αἱ καλύτεραι ἀπὸ ὅλας.

[Ὁ δὲ Μεθοδικὸς Büttner εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι μόνον ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν 1—4 εἶναι δυνατὸς δι' ἀμέσου ἐποπτείας, ἐπιδιώκει δὲ τὸν σχηματισμὸν αὐτὸν κατὰ πρῶτον μὲν λόγον διὰ τῆς ἐπιδείξεως τῶν δακτύλων, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῆς ἰχνογραφήσεως γραμμῶν, εἰκόνων ἀπὸ στιγμάς, σταυρῶν κ.τ.λ.

Ἀντίπαλοι φυσικὰ τοῦ διὰ τῆς ἀμέσου ἐποπτείας σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν εἶναι ὅλοι, ὅσοι φρονοῦν, ὅτι οἱ ὡρισμένοι ἀριθμοὶ εἶναι προϊὸν τῆς ἀπαριθμήσεως. Ἡ εἰς τὴν προηγούμενην παράγραφον γενομένη διεξοδικὴ ἀνάπτυξις τῆς γνώμης των κάμνει βέβαια περιττὴν τὴν παράθεσιν τῶν ἐπιχειρημάτων, τὰ ὁποῖα φέρουν ἐναντίον τοῦ δυνατοῦ τοῦ δι' ἀμέσου ἀντιλήψεως σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν. Δι' αὐτὸ ἀρκούμεθα μόνον νὰ ἀναφέρωμεν σύντομα, ὅσα σχετικὰ παρατηρεῖ ὁ Hartmann, ἕνας ἀπὸ τοὺς σπουδαιοτέρους ἀντιπάλους τῆς προκειμένης γνώμης.]. Ὁ Hartmann τονίζει, ὅτι ἡ στιγμιαία, ἡ δι' ἑνὸς βλέμματος ἀντίληψις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅπως παραδέχεται αὐτὴν ὁ Beetz διὰ τοὺς ἀριθμητικούς του τύπους δὲν εἶναι δυνατή, ἐφόσον πρόκειται περὶ ἀρχικῆς ἢ πρώτης ἀντιλήψεως. Εἶναι δὲ τῆς γνώμης, ὅτι ἀρχικὰ δὲν ἠμποροῦν νὰ γίνουν δι' ἑνὸς βλέμματος ἀντιληπταὶ οὔτε ***δύο στιγμαί***, ἤτοι ὅτι ἡ θεωρία τοῦ Beetz δὲν ἰσχύει οὔτε διὰ τὴν ἁπλουστάτην ἀπὸ τὰς περιπτώσεις. «Ἡ ἀπόφανσις: «αὐταὶ εἶναι δύο στιγμαί», καθὼς παρατηρεῖ ὁ Hartmann, «προϋποθέτει ἀρχικὰ τὴν ἀντίληψιν τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς δύο στιγμὰς ὡς πράγματος ὑπάρχοντος καθ' ἑαυτό, τὴν ἀνάμνησιν τῆς πρώτης στιγμῆς μετὰ τὴν μετάβασιν εἰς τὴν δευτέρην καὶ τὴν σύλληψιν καὶ τῶν δύο στιγμῶν εἰς ἕνα σύνολον, προϋποθέτει μὲ ἄλλους λόγους ***τὴν ἀπαρίθμησιν***. Βέβαια μὲ τὴν συχνὴν ἐπανάληψιν, δηλ. μὲ τὴν ἄσκησιν, ἠμπορεῖ ὅλη ἡ ἀνωτέρω ἐργασία νὰ συντομευθῇ ὀλίγον κατ' ὀλίγον τόσον, ὥστε εἰς τὸ τέλος νὰ γίνεται ἕνα εἶδος στιγμιαίας ἀντιλήψεως. Ἀλλὰ αὐτὸ κατορθώνεται μόνον, διότι ἐντυπώνεται στερεὰ εἰς τὴν μνήμην ***ἡ μορφὴ*** τῆς ὁμάδος τῶν στιγμῶν. Δὲν εἶναι λοιπὸν ***ἀρχικὴ*** στιγμιαία ἀντίληψις τοῦ ἀριθμοῦ. Ὅ,τι δὲ συμβαίνει μὲ τὰς 2 στιγμάς, συμβαίνει κατὰ μείζονα λόγον μὲ τὰς 3, 4 κ.τ.λ.». Προσθέτει δὲ ὁ Hartmann: «Μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν γίνεται κατὰ πρῶτον ἀντιληπτὸς ὁ ἀριθμὸς τῶν στιγμῶν, μὲ τὴν συχνὴν ἐπανάληψιν ἐντυπώνεται ἡ μορφὴ τοῦ συμπλέγματος τῶν στιγμῶν καὶ μὲ τὴν μορφὴν ἀνακαλεῖται εἰς τὴν συνείδησιν ὁ σχετικὸς ἀριθμός. Αἱ ὁμάδες ἐπομένως τῶν στιγμῶν εἶναι ἀριθμητικὰ σημεῖα, ὅπως τὰ ψηφία, ἔχοντα μόνον τὸ προσόν, ὅτι κάμνουν δυνατὴν τὴν ἐκ νέου καὶ ὁποτεδήποτε ἐκτέλεσιν τῆς ἀπαριθμήσεως» (Hartmann Zur Diskussion über den elementaren Rechenunterricht, Neue Bahnen, 1891, τεῦχ. 3).

[Ἐν τούτοις, ἂν ὁ Hartmann καὶ οἱ ὁμόφρονες μὲ αὐτὸν δὲν παραδέχωνται τὸν διὰ τῆς ἀμέσου ἐποπτείας ἀρχικὸν σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν, δὲν ἀποκρούουν ὅμως καὶ τὴν ἐξωτερικὴν ἐποπτείαν. Καθὼς εἴδαμεν εἰς τὴν προηγούμενην παράγραφον, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἐκθέσει τὰς ἀντιλήψεις των, θεωροῦν καὶ τὴν ἐξωτερικὴν ἐποπτείαν ἀναγκαίαν, ὄχι ὅμως διότι δι' αὐτῆς ἠμπορεῖ νὰ ἐξακριβωθῇ ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς τῶν ἐξωτερικῶν ἐντυπώσεων, πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον κατ' αὐτοὺς ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ μόνον διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως, ἀλλὰ διότι δι' αὐτῆς γίνονται ἀντιληπτὰ καὶ συγκρατοῦνται εἰς τὴν συνείδησιν ἕνα πρὸς ένα τὰ ἀπαριθμητέα ἀντικείμενα, ἀκόμη δὲ καὶ διότι μία εὐσύνοπτη καὶ εὐμνημόνευτη διάταξις τῶν ἐξωτερικῶν ἀντικειμένων συντελεῖ κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν στερέωσιν τῶν διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως τῶν ἀντικειμένων αὐτῶν σχηματισθεισῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ διευκολύνει κάπως καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἐποπτείαν των. Διὰ τοὺς τελευταίους δὲ μάλιστα αὐτοὺς λόγους ἀρκετοὶ ἀπὸ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς μεθόδου τῆς ἀπαριθμήσεως, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ ἀκόλουθον κεφάλαιον, κηρύσσονται μετὰ θέρμης ὑπὲρ τῆς χρήσεως καὶ τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν ὡς ἐποπτικοῦ μέσου τῆς πρώτης ἀριθμήσεως].

Τὴν ἴδιαν περίπου γνώμην μὲ τοὺς ἀνωτέρω ἄνδρας ἔχει καὶ ὁ καθηγητὴς Meumann, ὁ ὁποῖος, ὡς γνωστόν, ἔχει συντελέσει ὅσον ὀλίγοι εἰς τὴν πρόοδον τῆς Πειραματικῆς Παιδαγωγικῆς (Experimentelle Pädagogik, τόμ. 3). Καὶ ὁ Meumann φρονεῖ, ὅτι εἶναι ψυχολογικῶς ἀδιανόητη ἡ ἀρχικὴ στιγμιαία ἀντίληψις τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ σειρᾶς ἐντυπώσεων. Ἀρχικὰ οἱ ἀριθμοὶ σχηματίζονται μόνον διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως. Μὲ τὴν πεῖραν ὅμως βέβαια ἠμπορεῖ νὰ κατορθωθῇ καὶ στιγμιαία ἀντίληψις τῶν ἀριθμῶν ἕως ἕνα ὡρισμένον ὅριον. Οὐχ ἧττον εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι, ὅπως ἡ ἀποκλειστικὴ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῆς ἀμέσου ἐποπτείας εἶναι ἐπισφαλής, ἔτσι ἐπισφαλὴς εἶναι καὶ ἡ ἀποκλειστικὴ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῆς ἀπαριθμήσεως. Καὶ αἱ δύο μέθοδοι ἔχουν πλεονεκτήματα, ἀλλὰ καὶ μειονεκτήματα, καὶ αἱ δύο ἑπομένως εἶναι μονομερεῖς, μόνον δὲ διὰ τοῦ καταλλήλου συνδυασμοῦ των ἠμποροῦν νὰ γίνουν ἀντιληπταὶ ἀπὸ κάθε ἔποψιν καὶ νὰ στερεωθοῦν εἰς τοὺς μικροὺς παῖδας καὶ αἱ παραστάσεις τῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις. Οἱ παῖδες τοῦ ὀπτικοῦ τύπου ἔχουν νὰ κερδίσουν ἀπὸ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία στηρίζεται κυρίως εἰς τοπικὰ στοιχεῖα, εἰς στοιχεῖα τοῦ χώρου, ἐνῷ οἱ παῖδες τοῦ ἀκουστικοῦ τύπου ἔχουν νὰ κερδίσουν ἀπὸ τὴν μέθοδον τῆς ἀπαριθμήσεως, ἡ ὁποία στηρίζεται κυρίως εἰς τὴν χρονικὴν διαδοχήν. Ἡ τελευταία δὲ αὐτὴ μέθοδος ἔχει παρουσιάσει κατὰ τὸν Meumann ἰδιαζόντως καλὰ ἀποτελέσματα ἐπὶ ἀδυνάτων μαθητῶν, ὁποῖοι εἶναι οἱ μαθηταὶ τῶν βοηθητικῶν τάξεων ἢ σχολείων.

Γ. Ἡ γνώμη μας ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ζήτημα.

Ἡ γνώμη μας ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ζήτημα ἠμπορεῖ νὰ συνοψισθῇ εἰς τὰ ἀκόλουθα :

[1. Αἱ ἔννοιαι τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν εἶναι κυρίως προϊὸν τῆς ἀπαριθμήσεως καὶ ὄχι τῆς ἀμέσου ἐποπτείας. Ἡ ἐξαιρομένη «στιγμιαία ἀντίληψις» τῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀρχική, ἀλλ' ὑστερογενής, προκύπτουσα ἀπὸ τὴν σύνδεσιν τῆς μορφῆς τῆς διατάξεως τῶν ἀπαριθμουμένων μονάδων καὶ τῆς διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως σχηματισθείσης πλέον παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν.

2. Οἱ πειραματιζόμενοι μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀμέσου ἐποπτείας καὶ ἐξαίροντες τὰ ἀγαθὰ ἀποτελέσματα τῶν σχετικῶν πειραμάτων παραβλέπουν τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὰ πειράματα αὐτὰ οἱ μαθηταί, καὶ παρὰ τὴν θέλησιν τῶν πειραματιζομένων, ἴσως δὲ καὶ χωρὶς νὰ λαμβάνουν καὶ οἱ ἴδιοι ἄμεσον συνείδησιν τοῦ πράγματος ἀπαριθμοῦν διὰ τὸν ἁπλούστατον λόγον, ὅτι κάθε πλῆθος ὁμοειδῶν πραγμάτων προκαλεῖ κατ' ἀνάγκην τὴν ἀπαρίθμησιν, ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει ἄλλος τρόπος, διὰ νὰ συμπεριληφθῇ τὸ πλῆθος αὐτὸ εἰς ἕνα σύνολον. Ἄλλωστε πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῆς ἀμέσου ἐποπτείας γίνεται συνηθέστατα μὲ ἕνα τρόπον, ὁ ὁποῖος ἐπιβάλλει αὐτόχρημα τὴν ἀπαρίθμησιν. Διότι προφανῶς δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ λόγος περὶ ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου αὐτῆς, ὅταν ὁ Lay πρὸς σχηματισμὸν μὲν τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἐργάζεται ὡς ἑξῆς (Führer, σ. 226) : «Σύρεται ἡ πρώτη σφαῖρα εἰς τὸ ἐπάνω σύρμα· πόσαι σφαῖραι εἶναι ἐδῶ ; (Μία). Προστίθεται κατόπιν ἡ δεύτερη σφαῖρα, ἡ πρώτη δηλ. τοῦ δευτέρου σύρματος. Πόσας σφαίρας βλέπετε τώρα ; κ.τ.λ.» (νομίζων, ὅτι ἔτσι οἱ μαθηταὶ σχηματίζουν τὸν ἀριθμὸν 2 δι' ἀμέσου ἐποπτείας καὶ ὄχι δι' ἀπαριθμήσεως καὶ δι' αὐτὸ μόλις κατόπιν προκαλῶν αὐτοὺς καὶ εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν 2 σφαιρῶν, τὴν ὁποίαν ὅμως ἔχουν κάμει πλέον οἱ μαθηταὶ μὲ τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν), πρὸς σχηματισμὸν δὲ τοῦ ἀριθμοῦ 6 ἐργάζεται ὡς ἑξῆς (Führer, σ. 221) : «Ὁ Μ. πρόκειται νὰ ἀγοράσῃ ἕνα μολύβι καὶ δύο πεννάκια. Τὸ μολύβι στοιχίζει 4 λεπτὰ καὶ τὸ κάθε πεννάκι ἀπὸ 1 λεπτό. Πόσα λεπτὰ θὰ χρειασθῇ ; — Ἐδῶ ὑπάρχει, παι-

διά, κάποια δυσκολία. Καθὼς βλέπετε, πρέπει νὰ ξεύρωμε καὶ τὸν ἀριθμὸν ἕξι καὶ νὰ ἠμποροῦμε νὰ λογαριάζωμε μ' αὐτόν. Αὐτὸ θὰ μάθετε τώρα. Καὶ πρῶτα νὰ εὕρετε τὴν εἰκόνα τοῦ ἕξι καὶ νὰ μάθετε νὰ τὴν ἔχετε στὸ νοῦ σας» (φανταζόμενος, ὅτι μὲ ὅλα τὰ ἀνωτέρω δὲν ἐσχημάτισαν ἀκόμη οἱ μαθηταὶ τὸν 6 διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως (5+1=6), ἐνῷ ἠξεύρουν τὸν 5, ἠξεύρουν, ὅτι 4 λεπτ. + 1 λεπτ.=5 λ. καὶ βλέπουν, ὅτι ὁ νέος ἀριθμὸς 6 χρειάζεται διὰ τὸ 1 ἀκόμη λεπτὸν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσος μὲ 5+1) κ.τ.λ. Ἐπίσης δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ λόγος περὶ ἐφαρμογῆς τῆς ἴδιας μεθόδου, ὅταν ὁ Büttner (ὅπ. ἀν., σ. 77) πρὸς σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 4 ἐργάζεται ὡς ἑξῆς: «Ὁ διδάσκαλος δεικνύει κατὰ πρῶτον 2 του δάκτυλα, κατόπιν δὲ ἀκόμη ἄλλο 1. «Αὐτὰ εἶναι 3 δάκτυλα». Δεικνύει ἔπειτα 2 καὶ κατόπιν 3 ξυλάρια, καρύδια, σφαίρας καὶ μονόλεπτα. Οἱ μαθηταὶ λέγουν: «2 ξυλάρια, 3 ξυλάρια· 2 καρύδια, 3 καρύδια κ.τ.λ.». Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον σχηματίζεται καὶ ὁ ἀριθμὸς 4 κ.τ.λ.».

3. Ἀνάλογος μὲ τὸν διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν εἶναι καὶ ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ ἐσωτερικὴ ἐποπτεία τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν. Οἱ ἀριθμοὶ ἐποπτεύονται καὶ μὲ τὸ ἐσωτερικὸν ὄμμα ὡς ἀποτελοῦντες προϊοῦσαν σειράν, ἡ ὁποία σύγκειται ἀπὸ ὅμοια ἀντικείμενα καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ὁ κάθε ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ τόσα τέτοια ἀντικείμενα ἀπὸ ὅσα ὁ προηγούμενός του καὶ ἕνα ἀκόμα, δι' αὐτὸ δὲ καὶ τοποθετεῖται εἰς τὴν θέσιν τῆς τελευταίας αὐτῆς μονάδος. Ἔτσι ὁ κάθε ἀριθμὸς ἔχει εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν τὴν ὡρισμένην του θέσιν, διὰ νὰ παρασταθῇ δέ, δὲν χρειάζεται τίποτα ἄλλο παρὰ ἄνοδος εἰς τὴν σειρὰν ἕως τὴν θέσιν αὐτὴν (ἴδ. καὶ ἀνωτ., σ.85κ.ἀ.).

4. Μολονότι ἡ ἀπαρίθμησις εἶναι ἡ βάσις τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν, ἐν τούτοις τὸ ἔργον της ἀποβαίνει ἀδύνατον χωρὶς τὴν συνδρομὴν τῆς ἐξωτερικῆς ἐποπτείας, ἡ ὁποία κάμνει δυνατὴν τὴν σαφῆ ἀντίληψιν καὶ τὴν εἰς τὴν συνείδησιν συγκράτησιν τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς ἀπαριθμητέας μονάδας. Ἐπομένως ὁ σχηματισμὸς τῶν ἐννοιῶν τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν γίνεται ἀκριβέστερα διὰ τῆς συνεργασίας τῆς ἀπαριθμήσεως καὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐποπτείας, συντελεῖται διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως βασιζομένης εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐποπτείαν.

5. Γεγονὸς εἶναι ἐπίσης, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ἐποπτεία συντελεῖ καὶ εἰς τὴν στερέωσιν τῶν διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως σχηματισθεισῶν ἐννοιῶν τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐφόσον αἱ ἐποπτευόμεναι μονάδες τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν παρουσιάζουν μορφὰς διατάξεως, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ ἐντυπωθοῦν εὔκολα εἰς τὴν μνήμην καὶ δι' αὐτὸ νὰ συνδεθοῦν μὲ τὰς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν. Τοῦ γεγονότος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἐντελῶς ἰδιαιτέρως προκειμένου δι' ἄτομα τοῦ ὀπτικοῦ τύπου, ἐπακολούθημα εἶναι, ὅτι καθίσταται δυνατὸς ὁ ἄμεσος καὶ ἄνευ ἀπαριθμήσεως καθορισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ 1—4 ἢ 5 ὁμοίων ἀντικειμένων.

6. Σύμφωνα μὲ ὅλα τὰ ἀνωτέρω καὶ ἡ διδασκαλία ὀφείλει νὰ καθοδηγῇ τοὺς μαθητάς, ὅπως σχηματίζουν τὰς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως, βασιζομένης πάντοτε εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐποπτείαν. Ἔχουσι δὲ ὑπ' ὄψει της, ὅτι οἱ παῖδες ἐποπτεύουν κατὰ κανόνα μὲ τὸ ἐσωτερικόν των ὄμμα τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἀποτελοῦντας μίαν προϊοῦσαν σειράν, θὰ παρουσιάζῃ κατὰ κανόνα εἰς αὐτοὺς τὰ ἀπαριθμητέα ἀντικείμενα διαταγμένα εἰς μίαν τέτοιαν σειράν. Θὰ ἠμπορῇ βέβαια χάριν τῆς στερεώσεως τῶν ἐννοιῶν τῶν πρώτων ἀριθμῶν νὰ καθιστᾷ τοὺς μαθητὰς προσεκτικούς, καὶ μάλιστα εἰς τὰς ἀρχάς, καὶ εἰς τὰς μορφὰς ἐκείνας τῆς διατάξεως τῶν μονάδων των, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ ἐντυπωθοῦν εὔκολα εἰς τὴν μνήμην καὶ δι' αὐτὸ νὰ συνδεθοῦν μὲ τὰς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ἀλλ' αὐτὸ θὰ ἀποτελῇ τὴν ἐξαίρεσιν, θὰ γίνεται δὲ ἄλλωστε μὲ τὴν ἐπίδειξιν μορφῶν τῆς εἰς μίαν ἢ εἰς δύο σειρὰς διατάξεως (ἴδ. καὶ ἀνωτ., σελ. 88).

7. Αἱ λεγόμεναι «εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν» δὲν ἔχουν ἀξίαν, ἐφόσον προβάλλονται ὡς μέσον σχηματισμοῦ τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν διὰ στιγμιαίας ἐποπτείας. Λόγος περὶ τῆς χρησιμότητός των ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ μόνον, ἐφόσον παρουσιάζονται ὡς ἐποπτικὸν μέσον χρησιμεῦον εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως καὶ εἰς τὴν στερέωσιν τῶν δι' αὐτῆς σχηματισθεισῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν. Ἀκριβῶς δὲ τέτοιος λόγος θὰ γίνῃ καὶ περὶ αὐτῶν εἰς τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον κεφάλαιον, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ γίνῃ λόγος καὶ περὶ τῶν ἄλλων μέσων τῆς ἐποπτείας.

Ὅ,τι τώρα ἔχομεν ἀκόμη νὰ προσθέσωμεν εἰς τ' ἀνωτέρω λεχθέντα περὶ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἐννοιῶν τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν, εἶναι τὰ ἑξῆς. Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ᾿ ὄψει, ὅτι, ἐπειδὴ ἡ διδασκαλία τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς θὰ γίνεται χωριστά, ἡ ἀπαρίθμησις κατὰ τὸν σχηματισμὸν αὐτὸν θὰ λαμβάνῃ τὴν μορφὴν τῆς κανονικῆς προσθέσεως τῆς μονάδος, τὴν δὲ μορφὴν τῆς συντομευμένης προσθέσεως τῆς μονάδος θὰ λαμβάνῃ, ὁσάκις θὰ πρόκειται οἱ μαθηταὶ νὰ ἐπανασχηματίσουν ὁλόκληρον σειρὰν γνωστῶν πλέον ἀριθμῶν. Ἔπειτα πρέπει νὰ σημειωθῇ ἀκόμη, ὅτι, ὅπως πολὺ ὀρθὰ παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀνωτ., μερ. 1, σελ. 41 κ. ἀκ.), ἡ ἀπαρίθμησις εἶναι μὲν ἡ βάσις τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν, δὲν ἐξαρκεῖ ὅμως πρὸς σχηματισμὸν ἐντελῶς σαφῶν καὶ εὐκρινῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν μανθάνομεν μόνον, ὅτι ὁ κάθε ὡρισμένος ἀριθμὸς γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του διὰ τῆς προσθέσεως τῆς μονάδος. Ἀλλὰ οἱ ὡρισμένοι ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν μόνον τὸ γνώρισμα αὐτό. Ὁ ἀριθμὸς π.χ. 4 δὲν εἶναι μόνον $3 (ἢ\ 1+1+1)+1$. Αἱ μονάδες, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸ περιεχόμενόν του, ἠμποροῦν νὰ παρουσιασθοῦν καὶ μὲ ἄλλην σύνθεσιν, δι᾿ αὐτὸ δὲ ὁ 4 ἠμπορεῖ νὰ εἶναι καὶ $2+2$ καὶ $1+3$ καὶ $2+1+1$. Ὁ θέλων ἑπομένως νὰ ἔχῃ σαφῆ καὶ εὐκρινῆ ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ 4 πρέπει νὰ ἠξεύρῃ καὶ ὅλα αὐτὰ τὰ γνωρίσματά του. Ἀλλὰ ἀκόμη περισσότερον. Πρέπει νὰ ἠξεύρῃ, ὅτι ὁ 4 εἶναι καὶ 4×1 καὶ 2×2. Πρέπει ἐπίσης νὰ ἠμπορῇ νὰ διακρίνῃ τὸν 4 καθαρὰ ἀπὸ τοὺς μικροτέρους του ἀριθμοὺς καὶ ἑπομένως νὰ ἠξεύρῃ, ὅτι $4-1=3$, $4-2=2$, $4-3=1$, $4-4=0$, τέλος δὲ νὰ γνωρίζῃ, ὅτι ὁ 4 ἠμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς 4 ἢ εἰς 2 ἴσα μέρη ($4:4=1$, $4:2=2$). Μόνον ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος κατέχει ὅλα αὐτὰ τὰ γνωρίσματα τοῦ 4, ἔχει σχηματίσει σαφῆ καὶ εὐκρινῆ ἔννοιάν του. Διὰ νὰ τὸ κατορθώσῃ ὅμως αὐτό, δὲν ἀρκεῖ μόνον νὰ φθάσῃ εἰς τὸν 4 διὰ τῆς πράξεως τῆς ἀπαριθμήσεως, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἐκτελέσῃ κατόπιν καὶ ὅλας τὰς ἄλλας θεμελιώδεις ἀριθμητικὰς πράξεις, ὅσαι ἠμποροῦν νὰ γίνουν εἰς τὴν σειρὰν 1—4. Καὶ ἡ διδασκαλία ἑπομένως, ἐὰν πρόκειται οἱ μαθηταὶ νὰ σχηματίσουν δι᾿ αὐτῆς σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τῶν πρώτων ὡρισμένων ἀριθμῶν, πρέπει νὰ τοὺς ὁδηγῇ νὰ εὑρίσκουν ὅλα τὰ γνωρίσματα τοῦ καθενός

των, καὶ ὡρισμένως πρῶτον μὲν τὸ οὐσιῶδές του γνώρισμα, ὅτι σχηματίζεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του διὰ τῆς προσθέσεως τῆς μονάδος, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον θὰ γίνεται διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως ἤ, ὅπως εἴπαμεν ἀνωτέρω, διὰ τῆς κανονικῆς προσθέσεως τῆς μονάδος, ἔπειτα δὲ τὰ ἄλλα του γνωρίσματα, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον θὰ γίνεται διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἄλλων θεμελιωδῶν πράξεων (ἤτοι τῶν ὑπολοίπων προσθέσεων, τῆς ἀφαιρέσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως), ὅσαι ἠμποροῦν νὰ γίνουν εἰς τὴν σειράν, ἡ ὁποία φθάνει ἕως τὸν ἀριθμὸν αὐτόν].

VI. ΤΑ ΜΕΣΑ ΤΗΣ ΕΠΟΠΤΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΣ.

Τὰ μέσα τῆς ἐποπτείας [εἶναι δύο εἰδῶν. Τὰ ἀνήκοντα εἰς τὸ πρῶτον εἶδος ἐξυπηρετοῦν τὴν ἀρίθμησιν. Ἔχουν τὸν προορισμὸν νὰ διευκολύνουν εἰς τοὺς μαθητὰς α) τὸν σχηματισμὸν καὶ τὴν συγκράτησιν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ β) τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. [Τὰ ἀνήκοντα εἰς τὸ δεύτερον εἶδος αἰσθητοποιοῦν διάφορα ἀντικείμενα τῶν πραγματικῶν κύκλων, ἐπάνω εἰς τοὺς ὁποίους γίνεται ἡ ἀρίθμησις]. Τὰ δὲ μέσα τῆς ἀσκήσεως προσφέρουν εἰς τοὺς μαθητὰς διαφόρους ἀσκήσεις καταλλήλους πρὸς στερέωσιν τοῦ διδαχθέντος ὑλικοῦ.

---

1. ΤΑ ΜΕΣΑ ΤΗΣ ΕΠΟΠΤΕΙΑΣ.

Α. Τὰ ἐποπτικὰ μέσα τῆς ἀριθμήσεως.

Ἀπὸ τὰ μέσα αὐτὰ ἄλλα μὲν χρησιμεύουν εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀκεραίων, ἄλλα δὲ εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κλασμάτων. Τὰ μὲν πρῶτα εἶναι ἀπαραίτητα εἰς κάθε σχολεῖον, τὰ δὲ δεύτερα δὲν εἶναι μὲν ἀπαραίτητα, ἀλλὰ ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀποτελεσματικώτατα, ἐφόσον εἶναι καλά.

α) Τὰ ἐποπτικὰ μέσα τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων.

[Τὰ ἐποπτικὰ μέσα τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων χρησιμεύουν κυρίως εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν τῶν δύο κατωτέρων τάξεων τοῦ δημοτ. σχολείου, εἰς τὰς ὁποίας διδάσκονται οἱ ἀριθμοὶ 1—20 καὶ 1—100, διὰ τὸν ἁπλούστατον λόγον, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ἐποπτεία ἠμπορεῖ νὰ διευκολύνῃ μόνον τὸν σχηματισμὸν τῶν εἰς τὰς τάξεις αὐτὰς διδασκομένων ἀριθμῶν καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων, καὶ ὡρισμένως μὲ περισσοτέραν μὲν σαφήνειαν τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν 1—10 ἢ καὶ 1—20 καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων, μὲ πολὺ δὲ ὀλιγωτέραν τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν 21—100 καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σχετικῶν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς πράξεων. Διὰ τοὺς ἀνωτέρους ἀπὸ τὸν 100 ἀριθμοὺς τὸ πρᾶγμα αὐτὸ δὲν ἀποβαίνει πλέον δυνατόν. Δι' αὐτὸ καὶ τὸ καλύτερον ἐποπτικὸν μέσον ἐλαχίστην βοήθειαν ἠμπορεῖ νὰ συνεισφέρῃ εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν μεγαλυτέρων ἀπὸ τὸν 100 ἀριθμῶν. Τῆς βοηθείας δὲ αὐτῆς δὲν ἔχουν ἄλλωστε ἀνάγκην οἱ συνήθεις μαθηταί, οἱ ὁποῖοι ἠμποροῦν νὰ σχηματίζουν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς μὲ τὴν ἐσωτερικὴν ἐποπτείαν, βασιζομένην εἰς τὰς διὰ μέσου τῆς ἐξωτερικῆς ἐποπτείας σχηματισθείσας ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν 1—10, 1—20 καὶ 1—100. Ἐφόσον οἱ παῖδες ἐσχημάτισαν τὰς τελευταίας αὐτὰς ἐννοίας ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξωτερικῆς ἐποπτείας, ἐσχημάτισαν συγχρόνως καὶ ὀρθὴν ἀντίληψιν τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει εἰς αὐτοὺς νὰ ἀντιλαμβάνωνται μὲ τὸ ἐσωτερικὸν ὄμμα ἀρκετὰ καθαρὰ καὶ τὰς ὑψηλοτέρας βαθμίδας τοῦ εὐτάκτου αὐτοῦ, ἀλλὰ ἀτέρμονος συστήματος (ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 23).

Σημειωτέον τώρα, ὅτι κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν 1—10, 11—20, 21—100 καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων δὲν πρέπει νὰ ἐκκινοῦμεν ἀπὸ ἄλλο ἄλλοτε μέσον ἐποπτείας, ἀλλὰ πάντοτε ἀπὸ τὸ ἴδιον, τὸ ὁποῖον ἔτσι θὰ ἀποβῇ τὸ κυριαρχοῦν, **τὸ θεμελιῶδες** μέσον τῆς ἀριθμητικῆς ἐποπτείας. Διότι εἶναι προφανές, ὅτι εἰς τὴν σαφήνειαν τῆς ἀντιλήψεως καὶ τὴν συγκράτησιν τῶν παρατηρουμένων δὲν συντελεῖ ἡ ἑκάστοτε

ἐκκίνησις ἀπὸ ἄλλο ἐποπτικὸν μέσον, ἀλλὰ ἡ σταθερὰ ἀφόρμησις ἀπὸ ἕνα ἐποπτικὸν μέσον, ἐντελῶς γνώριμον καὶ οἰκεῖον εἰς τοὺς μαθητάς. Τὸ θεμελιῶδες αὐτὸ ἐποπτικὸν μέσον πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ διδασκάλου καὶ νὰ χρησιμοποιῆται διὰ τὴν διδασκαλίαν ὅλης τῆς τάξεως, χωρὶς φυσικὰ νὰ ἀποκλείεται, ἐφόσον εἶναι δυνατόν, νὰ ἔχουν καὶ οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν διάθεσίν των ἀπὸ ἕνα παρόμοιον (εἰς ἀνάλογον φυσικὰ μέγεθος), διὰ νὰ ἠμποροῦν ἔτσι νὰ ἐπαναλαμβάνουν μόνοι των τὰ ἐκτελεσθέντα εἰς τὸ κοινὸν ἐποπτικὸν μέσον. Ἡ χρῆσις τώρα ἑνὸς θεμελιώδους ἐποπτικοῦ μέσου δὲν ἀποκλείει τὴν χρῆσιν καὶ ἄλλων ἐποπτικῶν μέσων, εἴτε κοινῶν δι' ὅλην τὴν τάξιν εἴτε καὶ εὑρισκομένων ἀνὰ χεῖρας τοῦ κάθε μαθητοῦ. Τὰ μέσα ὅμως αὐτὰ θὰ εἶναι **βοηθητικὰ** καὶ μέσα **ἐφαρμογῆς**, θὰ χρησιμοποιοῦνται δηλ. εἴτε διὰ νὰ ἐνισχυθῇ, εἴτε διὰ νὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντελεσθῆ μὲ τὸ θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον].

Εἶναι τώρα προφανές, ὅτι τόσον ἡ φύσις καὶ ὁ τρόπος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὅσον καὶ ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἐπ' αὐτῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπιβάλλουν ὡρισμένας ἀπαιτήσεις, εἰς τὰς ὁποίας τὰ μὲν θεμελιώδη ἐποπτικὰ μέσα πρέπει νὰ ἀνταποκρίνωνται, εἰ δυνατόν, ἐξ ὁλοκλήρου, τὰ δὲ βοηθητικὰ κατὰ μέγιστον μέρος. Εἶναι δὲ αἱ ἀπαιτήσεις αὐταὶ αἱ ἑξῆς:

α) Τὸ ἐποπτικὸν μέσον πρέπει νὰ ἐξυπηρετῇ ἰδίως μὲν τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν, συγχρόνως ὅμως καὶ τὴν ἐκτέλεσιν ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.

β) Ὀφείλει ἐπίσης νὰ προσαρμόζεται πρὸς τὴν φύσιν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ δι' αὐτὸ νὰ παριστάνῃ κάθε ἀριθμὸν συγχρόνως καὶ ὡς ἑνότητα καὶ ὡς πλῆθος μονάδων, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι μὲν ὅμοιαι, ἀλλὰ καὶ θὰ διακρίνωνται ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην.

[γ) Αἱ μονάδες του πρέπει νὰ εἶναι ἁπλαῖ καὶ χωρὶς ἐξεχούσας ποιότητας, διὰ νὰ μὴ ἀποστρέφουν τὴν προσοχὴν τῶν μαθητῶν ἀπὸ τὸ κύριον ἔργον των, ἤτοι τὸν σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν ἢ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων].

δ) Πρέπει ἐπίσης αἱ μονάδες του, ἐφόσον θὰ εἶναι κοινὸν δι' ὁλόκληρον τάξιν, νὰ ἔχουν τόσον μέγεθος, ὥστε νὰ ἠμποροῦν νὰ παρατηροῦνται μὲ εὐκρίνειαν ἀπὸ ὅλους τοὺς μαθητὰς τῆς τάξεως.

[ε) Πρέπει ὡσαύτως αἱ μονάδες του νὰ εἶναι στερεὰ ἀντικείμενα, διὰ νὰ ὑποπίπτουν ὄχι μόνον εἰς τὴν ὅρασιν, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν ἁφὴν τῶν μαθητῶν], προσέτι δὲ καὶ κινητά, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἠμποροῦν καὶ οἱ μαθηταὶ νὰ τὰ μετακινοῦν καὶ νὰ τὰ χειρίζωνται μὲ εὐκολίαν.

ς) Τὸ ἐποπτικὸν μέσον πρέπει νὰ ἔχῃ τέτοιαν κατασκευήν, ὥστε νὰ ἐπιτρέπῃ νὰ παρουσιάζωνται εἰς τοὺς ὀφθαλμοὺς τῶν μαθητῶν ἐκεῖναι μόνον αἱ μονάδες του, αἱ ὁποῖαι χρειάζονται κάθε φοράν.

[ζ) Αἱ μονάδες τοῦ ἐποπτικοῦ μέσου πρέπει νὰ διατάσσωνται ἔτσι, ὅπως θὰ διατάσσωνται κατόπιν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς κατὰ τὴν ἐσωτερικὴν ἐποπτείαν τῶν ἀριθμῶν καὶ κατὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ἤτοι εἰς μίαν προϊοῦσαν σειράν].

η) Τὸ ἐποπτικὸν μέσον πρέπει, εἰ δυνατόν, νὰ ἔχῃ καὶ τέτοιαν κατασκευήν, ὥστε νὰ παρουσιάζῃ καθαρὰ τὸ ἑκάστοτε τεθὲν πρόβλημα καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως, ἡ ὁποία ἔγινε πρὸς λύσιν του.

Τὰ ἐποπτικὰ τώρα μέσα τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων ἠμποροῦν νὰ διαιρεθοῦν εἰς ***φυσικὰ*** καὶ ***τεχνητά***, τὰ δὲ τελευταῖα πάλιν εἰς ***γραφικὰ*** ἢ ***εἰκονικὰ*** καὶ εἰς ***στερεά***.

---

1. Τὰ φυσικὰ ἐποπτικὰ μέσα τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων.

Φυσικὰ ἐποπτικὰ μέσα τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων χρησιμοποιηθέντα μέχρι τοῦδε εἶναι κατὰ πρῶτον μὲν λόγον μέλη τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος καὶ ἰδίως τὰ δάκτυλα, ἔπειτα δὲ καὶ ἄλλα ἀντικείμενα, π. χ. καρποὶ (φασόλια, πίσα, κάρυα κ.τ.λ.), λιθάρια, ἀντικείμενα τῆς σχολικῆς αἰθούσης (θρανία, παράθυρα, θῦραι, τοῖχοι), τῆς μαθητικῆς χρήσεως (κονδύλια, πένναι κ. τ. λ.), καθὼς καὶ τῆς λοιπῆς συνήθους χρήσεως κ.τ.λ.

Τὰ περισσότερον συσταθέντα ἀπὸ τὰ φυσικὰ ἐποπτικὰ μέσα εἶναι ***τὰ δάκτυλα***. Τὰ δάκτυλα εἶναι χωρὶς ἀμφιβολίαν ἁπλᾶ ἐποπτικὰ μέσα, ἔχοντα τὸ πλεονέκτημα, ὅτι εἶναι πάντοτε κυριολεκτικῶς «πρόχειρα».

Οἱ *Klauke* καὶ *Klein* (Anleitung zur Erteilung des Rechen- und Raumlehreunterrichts) συνιστοῦν τὴν χρῆσιν τῶν δακτύλων εἰς τὰς ἑξῆς ἀσκήσεις, εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς ἑκάστοτε προσθήκης μιᾶς μονάδος, εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν (τόσον τὴν κανονικήν, ὅσον καὶ τὴν γινομένην μὲ παράλειψιν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν) καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων μονάδων. Εἰς τὴν πρόσθεσιν ἀκολουθοῦν τὰς ἑξῆς διαδοχικὰς βαθμίδας: α) Ὁ διδάσκαλος ἐκτείνει ὡρισμένον ἀριθμὸν δακτύλων, κατόπιν δὲ προσθέτει ἀκόμη καὶ *ἄλλα*. Οἱ μαθηταὶ ὀφείλουν: 1) νὰ διατυπώσουν τὸ τοιουτοτρόπως τεθὲν πρόβλημα καὶ 2) νὰ τὸ διατυπώσουν καὶ νὰ τὸ λύσουν. β) Ὁ διδάσκαλος λέγει τὸ πρόβλημα· οἱ μαθηταὶ ὀφείλουν νὰ ἐκτείνουν τὰ δάκτυλα, νὰ ἐπαναλάβουν τὸ πρόβλημα καὶ νὰ εὕρουν τὴν λύσιν. Ἀνάλογα γίνονται καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν. Διὰ τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἀριθμῶν καὶ οἱ Klauke καὶ Klein συνιστοῦν τὴν χρῆσιν τοῦ ἀριθμητηρίου.

[Ἐπίσης δὲ καὶ ὁ *Büttner* μεταχειρίζεται τὰ δάκτυλα ὡς θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον τόσον κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν 1—10, ὅσον καὶ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐπ' αὐτῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Παρατηρεῖ δὲ σχετικὰ τὰ ἀκόλουθα (ὅπ. ἀν., σ. 75): «Πολὺ σπουδαῖον εἶναι εἰς τὴν πρώτην ἀρίθμησιν νὰ προκαλοῦμεν τὴν αὐτενέργειαν τῶν παίδων καὶ τὴν διαρκῆ συμμετοχήν των εἰς τὴν ἀρίθμησιν. Ἂν δεικνύῃ πάντοτε μόνον ὁ διδάσκαλος, πολλοὶ παῖδες δὲν θὰ βλέπουν τίποτε, διότι δὲν ἔχουν μάθει ἀκόμη νὰ βλέπουν. Πρέπει νὰ δεικνύουν καὶ οἱ ἴδιοι. Δι' αὐτὸ ἀκριβῶς τὰ δάκτυλα εἶναι εἰς τὴν ἀρχὴν τὸ καλύτερον ἐποπτικὸν μέσον· ἀποτελοῦν ἕνα φυσικὸν ἀριθμητήριον διὰ τὴν σειρὰν 1—10 καὶ προσφέρονται ὡς τὸ κυριολεκτικῶς «προχειρότερον» ὄργανον διὰ τὴν συνεργασίαν διδασκάλου καὶ μαθητῶν εἰς τὴν σειρὰν αὐτήν». Ἐκτὸς τώρα τῶν δακτύλων μεταχειρίζεται ὁ Büttner καὶ γραφικὰ μέσα, καθὼς γραμμάς, στιγμὰς (εἰκόνας στιγμῶν), σταυρούς, δακτυλίους καὶ γωνίας (Λ), τὰς ὁποίας ὀνομάζει εἰς τοὺς μαθητὰς «στέγας». Σημειωτέον δέ, ὅτι ὁ Β. χρησιμοποιῶν τόσον τὰ δάκτυλα, ὅσον καὶ τὰ ἄλλα ἐποπτικά του μέσα προσπαθεῖ νὰ ἐπιτύχῃ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν 1—4 ὄχι διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως, ἀλλὰ διὰ τῆς ἀμέσου ἐποπτείας (ἴδ. καὶ ἀνωτ., σ. 96)].

Ὁ δὲ *Jänicke* λέγει ὡς πρὸς τὰ δάκτυλα τὰ ἀκόλουθα (Geschichte des Rechenunterrichts, σ. 125) : «Εἶναι τὸ γενικώτατον, φυσικώτατον καὶ πάντοτε διαθέσιμον μέσον τῆς ἀριθμήσεως ὅλων τῶν λαῶν καὶ ὅλων τῶν ἐποχῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι κυριολεκτικῶς «πρόχειρον» καὶ τοῦ ὁποίου δι' αὐτὸ κάμνει χρῆσιν καὶ τὸ σχολεῖον. Ἐν τούτοις δὲν ἐπαρκεῖ, διότι περιορίζεται μόνον εἰς τοὺς 10 πρώτους ἀριθμοὺς καὶ διότι τὰ 10 δάκτυλα οὔτε ὅμοια εἶναι ἀναμεταξύ των οὔτε ἠμποροῦν νὰ ἀποχωρίζωνται καὶ νὰ συνενώνωνται κατ' ἀρέσκειαν».

Καὶ ὁ *Wilk* δὲ χρησιμοποιεῖ τὰ δάκτυλα διὰ τοὺς 10 πρώτους ἀριθμούς. Ἀφορμᾶται δὲ εἰς αὐτὸ ἀπὸ τὴν πεποίθησιν, ὅτι αἱ ἔννοιαι τῶν ἀριθμῶν ἔχουν σχηματισθῆ εἰς τοὺς κατὰ φύσιν λαοὺς διὰ μέσου τῶν 5 δακτύλων τῆς μιᾶς χειρὸς καὶ τῶν ἄλλων 5 τῆς ἄλλης.

Ἐπίσης δὲ ὁ *Meumann* (ὅπ. ἀνωτ., III, σελ. 664) θεωρεῖ τὰ δάκτυλα ὡς τὸ φυσικώτατον καὶ κάλλιστον μέσον τῆς ἐποπτείας. Ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ *Dittes, Knilling, Ritthaler, Grass, Lindner* καὶ *Wolfrum* ὑποστηρίζουν τὴν χρῆσιν τῶν δακτύλων κατὰ τὴν ἀρίθμησιν.

Εἰς τοὺς ἀντιτιθεμένους κατὰ τῆς χρήσεως αὐτῆς ἀνήκει μεταξὺ τῶν πρώτων ὁ *B. Hartmann* (ὅπ. ἀν., σ. 363 κ. ἀκ.). Ὁ Hartmann στηριζόμενος εἰς πολλὰς καὶ ἀκριβεῖς παρατηρήσεις διαβεβαιώνει, ὅτι αἱ ἀριθμητικαὶ πρόοδοι τῶν μαθητῶν, εἰς τοὺς ὁποίους ἐπιτρέπεται ἡ χρῆσις τῶν δακτύλων καὶ κατὰ τὸ δεύτερον σχολικὸν ἔτος, εἶναι σημαντικὰ κατώτεραι ἀπὸ τὰς προόδους, τὰς ὁποίας δεικνύουν οἱ μαθηταὶ οἱ μὴ ἀριθμοῦντες μὲ τὰ δάκτυλα. Δι' αὐτὸ δὲ ἐξάγει τὸ πόρισμα, ὅτι τότε μόνον ἐπιτρέπεται νὰ χρησιμοποιοῦνται τὰ δάκτυλα ὡς κύριον μέσον ἐποπτείας τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ κανένα καλύτερον ἀπὸ τὰ τεχνητὰ ἐποπτικὰ μέσα.

Ἐπίσης δὲ καὶ ὁ *Lay* (Führer, σ. 109 κ. ἀκ.) ἀποφαίνεται ἐναντίον τῆς ἀριθμήσεως μὲ τὰ δάκτυλα. Βασιζόμενος εἰς σχετικὰ πειράματα καθορίζει, ὅτι ἡ χρῆσις τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν τοῦ

Born ἔχει κατὰ τὸ διπλάσιον ἀνώτερα ἀποτελέσματα ἀπὸ τὴν χρῆσιν τῶν δακτύλων.

Πράγματι δὲ ἡ ἀρίθμησις μὲ τὰ δάκτυλα, μολονότι ἔχει τὰ μνημονευθέντα πλεονεκτήματα, παρουσιάζει καὶ τὰ ἀκόλουθα **μειονεκτήματα** :

α) Τὰ δάκτυλα δὲν εἶναι 10 ἐντελῶς ὅμοια πράγματα.

β) Δὲν ἠμποροῦν νὰ κινοῦνται, νὰ χωρίζωνται καὶ νὰ συνενώνωνται ἀνεξάρτητα τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο, οὔτε εἶναι δυνατὸν νὰ γίνωνται αἰσθητὰ εἰς τοὺς μαθητὰς ἐκεῖνα μόνον, τὰ ὁποῖα ἑκάστοτε χρησιμοποιοῦνται.

γ) Εἰς τὴν ἀρίθμησιν μὲ τὰ δάκτυλα ἀποστρέφεται ἡ προσοχὴ τῶν μαθητῶν ἀπὸ τὸν διδάσκαλον, ὁ ὁποῖος πάλιν δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐξελέγχῃ εὔκολα τὴν ἀκρίβειαν τῆς ἀριθμήσεως τῶν μαθητῶν.

δ) Μὲ τὰ δάκτυλα δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐκτελεσθοῦν καλὰ ὅλαι αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις. Ἐὰν εἶναι ὁπωσδήποτε δυνατὴ ἡ ἐκτέλεσις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως, δὲν κατορθώνεται ὅμως καὶ ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως.

ε) Οἱ μαθηταὶ περιπίπτουν εἰς τελείαν σχεδὸν ἐξάρτησιν ἀπὸ τὰ δάκτυλα καὶ χάνουν τὴν αὐτοτέλειάν των, μόνον δὲ μὲ πολὺν κόπον ἠμπορεῖ κανεὶς κατόπιν νὰ τοὺς συνηθίσῃ εἰς τὴν αὐτοτελῆ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν.

[Ἐφόσον τώρα ἡ ἀρίθμησις μὲ τὰ δάκτυλα παρουσιάζει τὰ μειονεκτήματα αὐτά, ἐννοεῖται, ὅτι τὰ δάκτυλα δὲν πρέπει νὰ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—10 ὡς τὸ θεμελιῶδες μέσον τῆς ἐποπτείας, παρὰ μόνον ἂν δὲν ὑπάρχῃ κανένα ἄλλο καλύτερον ἐποπτικὸν μέσον. Ἐπειδὴ ἐν τούτοις ἡ ἀρίθμησις μὲ τὰ δάκτυλα παρουσιάζει καὶ ἀρκετὰ καὶ σπουδαῖα πλεονεκτήματα, ἠμποροῦν τὰ δάκτυλα νὰ χρησιμοποιοῦνται ὡς **βοηθητικὸν** ἐποπτικὸν μέσον, καθὼς καὶ ὡς μέσον **ἐφαρμογῆς**. Καθόσον δὲ εἶναι καὶ μέσον, τὸ ὁποῖον διαθέτουν ὅλοι οἱ μαθηταί, ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιοῦνται καὶ ὡς μέσον **ἐπασχολήσεως** καὶ **ἐργασίας** τοῦ κάθε μαθητοῦ, ἐφόσον δὲν καλεῖται νὰ συνεργασθῇ ἀμέσως μὲ τὸν διδάσκαλον ἐπάνω εἰς τὸ ἑκάστοτε χρησιμοποιούμενον κοινὸν ἐποπτικὸν μέσον τῆς τάξεως (ἴδε καὶ τὸ κεφάλαιον «Ἡ ἀρχὴ τῆς ἐργασίας κ.τ.λ.»). Ἠμπορεῖ δὲ νὰ γίνεται ἡ χρησιμοποίησις αὐτὴ τῶν δακτύλων ἰδίως εἰς τὰς ὀλιγοπληθεῖς τάξεις, εἰς τὰς ὁποίας εἶναι εὔκολον εἰς τὸν διδάσκαλον νὰ ἐξελέγχῃ τὴν ἐργασίαν τῶν μαθητῶν.

Τὰ ἄλλα τώρα φυσικὰ μέσα τῆς ἐποπτείας (φασόλια, πίσα, ἀντικείμενα τῆς σχολικῆς αἰθούσης, τῆς μαθητικῆς χρήσεως κ.τ.λ.) δὲν ἠμποροῦν μὲν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὡς θεμελιώδη ἐποπτικὰ μέσα, εἴτε διότι ἕνεκα τοῦ μεγέθους των ἢ τῆς θέσεώς των δὲν ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀπὸ κοινοῦ δι' ὅλην τὴν τάξιν, εἴτε διότι λόγῳ τοῦ ἀριθμοῦ των δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐξυπηρετήσουν τὸν σχηματισμὸν πολλῶν ἀριθμῶν, ἠμποροῦν ὅμως νὰ χρησιμοποιοῦνται ὡς βοηθητικὰ ἐποπτικὰ μέσα καὶ μέσα ἐφαρμογῆς, μερικὰ δὲ ἀπὸ αὐτά, ὅπως π. χ. τὰ φασόλια καὶ τὰ πίσα, καὶ ὡς μέσα ἐπασχολήσεως καὶ ἐργασίας τῶν μαθητῶν].

II. Τὰ τεχνητὰ ἐποπτικὰ μέσα τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων.

α) Τὰ γραφικὰ ἐποπτικὰ μέσα.

Γραφικὰ μέσα χρησιμοποιούμενα, ὅπως διευκολύνουν τοὺς μαθητὰς εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, εἶναι αἱ γραμμαί, αἱ στιγμαί, οἱ δακτύλιοι, οἱ σταυροὶ καὶ ἄλλα. Ὁ διδάσκαλος προϊχνογραφεῖ τὰ χρησιμοποιούμενα σημεῖα εἰς τὸν πίνακα ἢ τὰ παρουσιάζει σχεδιασμένα εἰς πινακίδα (πρβ. τὸν πίνακα τῶν γραμμῶν τοῦ Πεσταλότση ἢ τὰς εἰκόνας τῶν στιγμῶν, ὅπως τὰς παρουσιάζουν οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς χρησιμοποιοῦντας αὐτάς), προσκαλεῖ δὲ κατόπιν τοὺς μαθητὰς νὰ τὰ ἰχνογραφήσουν καὶ αὐτοὶ πρῶτα μὲν εἰς τὸν πίνακα, ἔπειτα δὲ καὶ εἰς τὰ ἀβάκιά των.

[Κανένα ἀπὸ τὰ μέσα αὐτὰ δὲν ἠμπορεῖ να θεωρηθῇ ὡς ἰδιτέρως κατάλληλον διὰ τὸν ἐπιδιωκόμενον σκοπόν, πολὺ δὲ ὀλιγώτερον νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον, διότι ὅλα ὑποπίπτουν μόνον εἰς τὴν ὅρασιν, ὄχι δὲ καὶ εἰς τὴν ἀφὴν τῶν μαθητῶν, αἱ δὲ μονάδες των δὲν ἠμποροῦν νὰ μετακινηθοῦν, νὰ ἑνωθοῦν μαζὶ μὲ ἄλλας ἢ νὰ ἀποχωρισθοῦν ἀπὸ αὐτάς, ἀλλὰ μόνον νὰ προσιχνογραφηθοῦν (ἢ νὰ προσεπιδειχθοῦν) καὶ

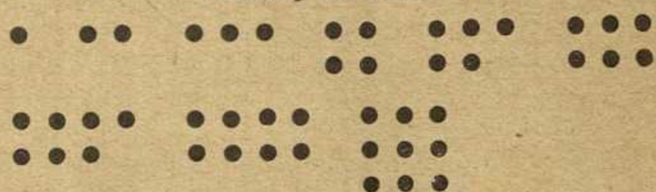
νὰ ἀποσβεσθοῦν (ἢ νὰ ἀποκρυβοῦν). Ἐκτὸς δὲ τοῦ μειονεκτήματος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν εἰς ὅλα, τὸ καθένα των ἔχει νὰ ἐπιδείξῃ καὶ ἄλλα εἰς αὐτὸ προσιδιάζοντα, ὅπως ἀποδεικνύει ἡ χωριστὴ ἐξέτασίς του].

Τῶν ***γραμμῶν*** ἔκαμνε χρῆσιν, καθὼς ηὑρομεν, καὶ ὁ Πεσταλότσης. Ἔκτοτε γίνεται χρῆσίς των ἀπὸ ἀρκετοὺς Μεθοδικούς. Ἔτσι π. χ. τὰς χρησιμοποιεῖ ὁ Büttner, ὁ ὁποῖος, καθὼς εἴδαμεν, κάμνει χρῆσιν καὶ τῶν στιγμῶν καὶ τῶν σταυρῶν καὶ τῶν γωνιῶν ἐκτὸς τῶν δακτύλων. Αἱ γραμμαὶ ἠμποροῦν νὰ θεωροῦνται καὶ ὡς ἀπεικονίσεις τῶν δακτύλων, ἔτσι δὲ καὶ παρουσιάζονται καὶ ἀπὸ τὸν Büttner εἰς τοὺς μαθητάς. Ἰχνογραφοῦνται δὲ αἱ γραμμαὶ εἰς μίαν σειράν. Εἶναι ὅμως εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ, ὅτι περισσότεραι ἀπὸ 4—5 γραμμὰς δὲν ἠμποροῦν νὰ γίνουν ἀσύγχυτα ἀντιληπταὶ ἀπὸ τοὺς μαθητάς, ὅσον δὲ περισσότεραι παρουσιάζονται ἀπὸ τόσας, τόσον δυσκολώτερη γίνεται ἡ ἀσύγχυτη ἀντίληψις τῆς καθεμιᾶς, διὰ νὰ καταστῇ μετ' ὀλίγον ἀδύνατη. [Ἡ χρῆσίς των ἐπομένως περιορίζεται εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν 4—5 πρώτων ἀριθμῶν. Διὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιοῦνται ὡς βοηθητικὰ ἐποπτικὰ μέσα καὶ μάλιστα τόσον μᾶλλον, ὅσον διευκολύνουν σημαντικὰ τὴν ἐσωτερικὴν ἐποπτείαν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ τὴν ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσιν τῶν σχετικῶν πράξεων. Ἐπίσης δὲ ἠμποροῦν, καθὼς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος, νὰ χρησιμοποιοῦνται καὶ ὡς μέσα τῆς ἐγγράφου παραστάσεως τῶν ἴδιων ἀριθμῶν, πρὶν γίνῃ ἡ διδασκαλία τῆς παραστάσεως αὐτῆς διὰ τῶν ἐν χρήσει ἀριθμητικῶν ψηφίων].

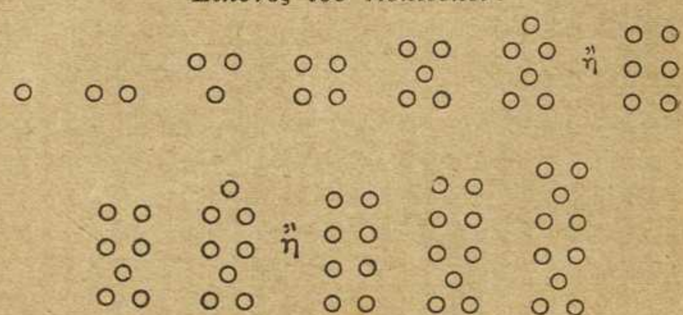
Πολὺ εὐχρηστότεραι ἀπὸ τὰς γραμμὰς ἔχουν ἀποβῆ ***αἱ στιγμαί,*** αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν διατάσσονται, ὅπως αἱ γραμμαί, εἰς μίαν σειράν, ἀλλὰ κατὰ εὐσυνόπτους ὁμάδας, ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς ὁποίας παριστάνει καὶ ἕνα ἀριθμόν. Αἱ ὁμάδες αὐταὶ ὀνομάζονται ***«εἰκόνες τῶν στιγμῶν»*** ἢ συνηθέστερα ***«εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν».*** Καθὼς εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα (ἴδ. ἀνωτ., σελ.37), ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔκαμε πρῶτος χρῆσιν τῶν εἰκόνων αὐτῶν ὡς ἐποπτικοῦ μέσου κατὰ τὴν ἀπαρίθμησιν, εἶναι ὁ *Busse,* ὁ ὁποῖος καὶ παρατηρεῖ περὶ αὐτῶν τὰ ἑξῆς : «Ἀπὸ ὅλας τὰς εἰκόνας, μὲ τὰς ὁποίας ἠμποροῦμεν νὰ προκαλέσωμεν τὸν σχηματισμὸν σαφῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν, αἱ ἁπλούστεραι καὶ δι᾽ αὐτὸ ἀκριβῶς αἱ καταλληλότεραι εἶναι αἱ γινόμεναι ἀπὸ στιγμάς». Ἀργότερα συνιστᾷ πάλιν τὰς εἰκόνας αὐτὰς ὁ *Hentschel*, ὁ ὁποῖος ἀντὶ στιγμῶν μεταχειρίζεται δακτυλίους. Ἔκτοτε αὐξάνει σημαντικὰ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀπαδῶν τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν, εἰς τοὺς ὁποίους συγκαταλέγονται ὄχι μόνον οἱ θιασῶται τῆς μεθόδου τῆς ἀμέσου ἐποπτείας, ὅπως ὁ Beetz, ὁ Lay, ὁ Schneider κ.λ.π., ἀλλὰ καὶ ἀρκετοὶ ἀπὸ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς μεθόδου τῆς ἀπαριθμήσεως, ὁποῖοι εἶναι ἐκτὸς τοῦ Hentschel ὁ Sobolewsky, ὁ Born, ὁ Kaselitz, ὁ Böhme, ὁ Dittmers, ὁ Menzel, ὁ Grass καὶ ἄλλοι.

Παραθέτομεν ἐδῶ τὰς γνωστοτέρας ἀπὸ τὰς εἰκόνας αὐτάς:

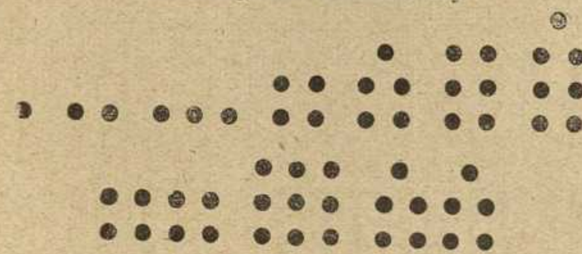
Εἰκόνες τοῦ Busse:



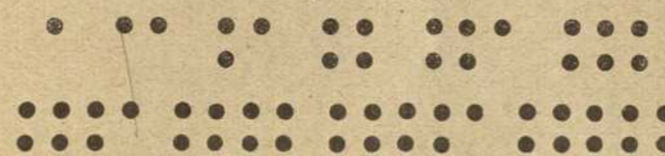
Εἰκόνες τοῦ Hentschel:



Εἰκόνες τοῦ Sobolewsky:

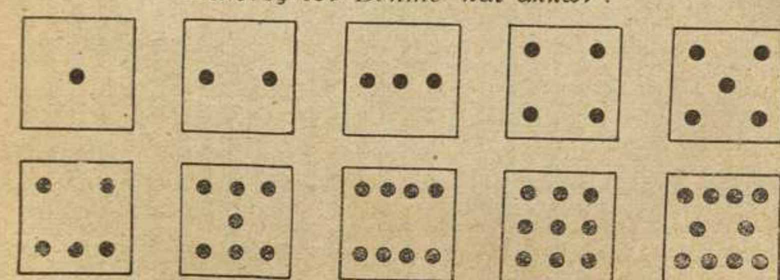


Εἰκόνες τοῦ Born:

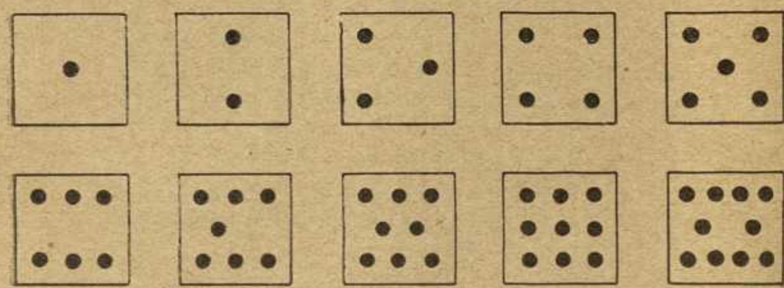


Εἰκόνες τοῦ Kaselitz:

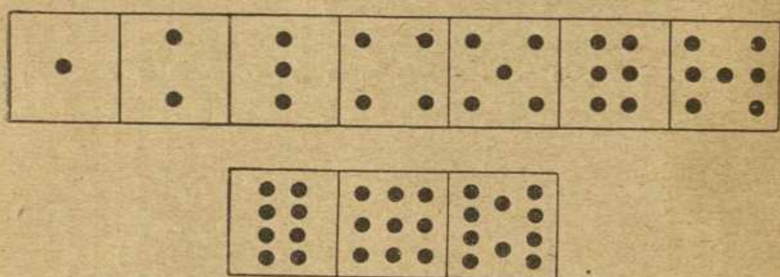
Εἰκόνες τοῦ Böhme καὶ ἄλλων:



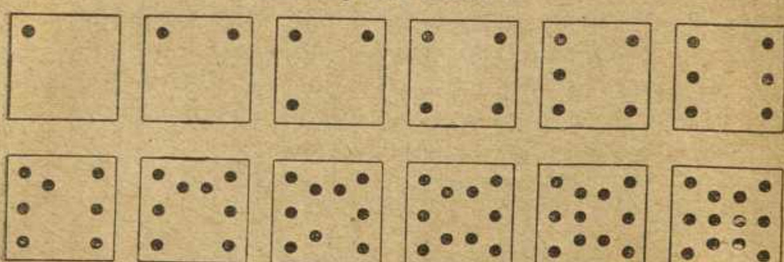
Εἰκόνες τοῦ Dittmers :



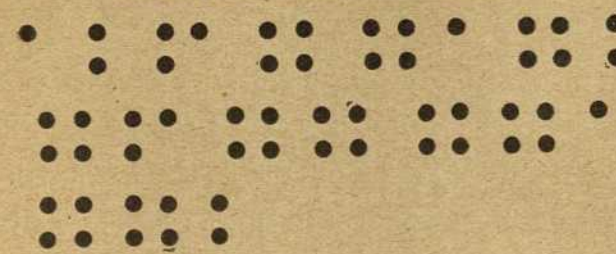
Εἰκόνες τοῦ Menzel :



Εἰκόνες τοῦ Beetz :



Εἰκόνες τῶν Grass, Lay κ.τ.λ. :



[᾿Αποκρούοντες τὸ δυνατὸν τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν μὲ τὴν ἄμεσον ἐποπτείαν ἀποκρούομεν φυσικὰ καὶ τὴν χρῆσιν τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν ὡς ἐποπτικοῦ μέσου δι᾿ ἕνα τέτοιον σχηματισμόν. Δι᾿ αὐτὸ θὰ τὰς ἐξετάσωμεν ἐδῶ μόνον ὡς ἐποπτικὸν μέσον τοῦ διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ὅπως ἄλλωστε τὰς μεταχειρίζονται καὶ ὅσοι ἀπὸ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς μεθόδου τῆς ἀπαριθμήσεως τὰς χρησιμοποιοῦν.

Διὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν δὲν ἠμποροῦν αἱ εἰκόνες αὐταὶ νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὡς θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον, ἀφ᾿ ἑνὸς μὲν διὰ τὸ μειονέκτημα, τὸ ὁποῖον ἔχουν ἀπὸ κοινοῦ μὲ ὅλα τὰ γραφικὰ μέσα τῆς ἐποπτείας, ὅτι δηλαδὴ ὑποπίπτουν μόνον εἰς τὴν ὅρασιν, ἀφ᾿ ἑτέρου δὲ διότι ἀπομακρύνουν ὅλως διόλου τοὺς μαθητὰς ἀπὸ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐποπτεύουν καὶ πρέπει νὰ ἐποπτεύουν ἐσωτερικῶς τοὺς ἀριθμούς, ἤτοι κατὰ μίαν προϊοῦσαν σειράν. ᾿Ακριβῶς δὲ διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς κανεὶς ἀπὸ τοὺς χρησιμοποιοῦντας αὐτὰς Μεθοδικοὺς τῆς μεθόδου τῆς ἀπαριθμήσεως δὲν τὰς μεταχειρίζεται ὡς θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον. ῞Ολοι τὰς μεταχειρίζονται ὡς βοηθητικὸν μέσον καὶ τὰς παρουσιάζουν, ἀφοῦ πλέον οἱ μαθηταὶ ἔχουν σχηματίσει τὰς ἐννοίας τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως ἄλλων πραγμάτων, φυσικῶν ἢ τεχνητῶν, π. χ. δακτύλων, φασολίων, ξυλαρίων, σφαιρῶν, γραμμῶν, στιγμῶν κ.τ.λ.

῾Ο πρῶτος τώρα κύριος λόγος τῆς χρησιμοποιήσεώς των ὡς βοηθητικοῦ μέσου ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω Μεθοδικοὺς εἶναι, ὅτι ἡ συμμετρικὴ διάταξις τῶν στιγμῶν των διευκολύνει τὴν εἰς τὴν μνήμην ἐντύπωσιν τῶν μορφῶν των, ἐπομένως δὲ καὶ τὴν σύνδεσιν τῶν μορφῶν μὲ τὰς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας πάλιν ἐπακολούθημα εἶναι ἡ στερέωσις τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν. Ὁ λόγος βέβαια αὐτὸς εἶναι ἀποχρῶν καὶ χάριν αὐτοῦ ἠμποροῦν αἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν νὰ χρησιμοποιοῦνται ὡς βοηθητικὸν ἐποπτικὸν μέσον, ἐφόσον, ἐννοεῖται, εἶναι εἰς θέσιν νὰ συντελέσουν εἰς τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ ἐπιδιωκομένου σκοποῦ καὶ ἐφόσον ὁ σκοπὸς αὐτὸς δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐκπληρωθῇ καὶ ἀπὸ τὸ χρησιμοποιούμενον θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον. Πρέπει ἐν τούτοις νὰ σημειωθῇ, ὅτι αἱ περισσότεραι ἀπὸ τὰς γνωστὰς εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι κατάλληλαι διὰ τὸν ἐπιδιωκόμενον σκοπόν]. Σχετικὰ μὲ τὸ ζήτημα αὐτὸ ὁ Grass (Die Gruppen—Zahlbilder, σ. 17 κ. ἀκ.) παρατηρεῖ τὰ ἑξῆς :

«α) Εἰς τὰς εἰκόνας τοῦ Böhme, καθὼς καὶ εἰς τὰς εἰκόνας τοῦ Hentschel καὶ τοῦ Menzel, δὲν ὑπόκειται ὡς βάσις ἕνα σταθερὸν θεμελιῶδες σχῆμα, δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ οἱ Μεθοδικοὶ αὐτοὶ δὲν προχωροῦν κανονικὰ εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἀριθμῶν· ἔτσι μεταχειρίζονται ὡς βάσιν, (ὅπως κάμνουν ἄλλωστε καὶ οἱ Dittmers καὶ Sobolewsky), εἰς τὴν μίαν μὲν εἰκόνα τὴν ὁμάδα τῶν 2 στιγμῶν, εἰς τὴν ἄλλην δὲ τὴν ὁμάδα τῶν 3. Οἱ δὲ Hentschel καὶ Kaselitz παρουσιάζουν μάλιστα εἰς τὴν ἴδιαν εἰκόνα καὶ τὰς δύο ὁμάδας.

β) Οἱ Hentschel, Kaselitz, Menzel καὶ Sobolewsky προχωροῦν εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἀριθμῶν ὄχι κατὰ ὁριζοντίαν, ἀλλὰ κατὰ κάθετον διεύθυνσιν.

γ) Εἰς τὰς εἰκόνας τοῦ Beetz οἱ ἀπὸ τοῦ 7 καὶ ἄνω ἀριθμοὶ δὲν εἶναι εὐδιάκριτοι.

δ) Μὲ τὰς εἰκόνας αἰσθητοποιοῦνται μόνον οἱ 10 πρῶτοι ἀριθμοί, κατ᾽ ἐξαίρεσιν δὲ μὲ τὰς εἰκόνας τοῦ Beetz οἱ 12.

ε) Ὅλαι αἱ εἰκόνες εἶναι ἐλάχιστα εὐσύνοπτοι, τὰ δὲ μέρη των δὲν ἔχουν διαταχθῇ σκόπιμα».

[Τὸ γεγονὸς εἶναι, ὅτι, ἂν ἐξαιρέσῃ κανεὶς τὰς εἰκόνας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διάταξιν εἰς 2 σειρὰς (δηλ. τὰς τοῦ Born καὶ κατὰ δεύτερον λόγον τὰς τοῦ Busse καὶ τοῦ Grass), εἰς ὅλας τὰς ἄλλας οἱ ἀριθμοὶ 5—10 παρουσιάζονται κατὰ μέγιστον μέρος μὲ μορφάς, αἱ ὁποῖαι δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐντυπωθοῦν εὔκολα εἰς τὴν

μνήμην. Ἀλλὰ καὶ αἱ καλύτεραι ἀπὸ τὰς εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν, ὅπως εἶναι αἱ τοῦ Born, περιττεύουν, διότι καὶ μὲ ἄλλα μέσα τῆς ἐποπτείας, τὰ ὁποῖα ἔχουν διάταξιν τῶν μονάδων των εἰς 1 σειρὰν καὶ ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὡς θεμελιώδη, εἶναι δυνατὸς ὁ σχηματισμὸς εὐσυνόπτων μορφῶν τῶν ἀριθμῶν 2—10 εἰς δύο σειράς. Τέτοιαι μορφαὶ π. χ. ἠμποροῦν νὰ κατασκευασθοῦν μὲ τὰς σφαίρας τοῦ Ρωσσικοῦ ἀριθμητηρίου, ἂν χρησιμοποιοῦνται συγχρόνως δύο (ὁριζόντιαι) σειραί του ἢ ἂν ἰχνογραφοῦνται αἱ σφαῖραι εἰς 2 σειράς. Ἐπίσης καὶ οἱ κύβοι τοῦ Tillich ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιοῦνται πρὸς τὸν ἴδιον σκοπόν, ἂν ἰχνογραφοῦνται εἰς 2 σειράς.

Ὁ δεύτερος κύριος λόγος τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοὺς περὶ ὧν ὁ λόγος Μεθοδικοὺς εἶναι, ὅτι αἱ εἰκόνες αὐταὶ ἀποτελοῦν καταλληλότατον μέσον διὰ ***τὴν πρώτην ἔγγραφον παράστασιν*** τῶν ἀριθμῶν, προπαρασκευάζουν τὴν χρῆσιν τῶν ἀριθμητικῶν ψηφίων. Ὄντως, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος, ἐνδεικνύεται ἡ χρῆσις ἑνὸς τέτοιου μέσου. Ἀλλὰ ἡ χρῆσις τοῦ μέσου αὐτοῦ θὰ περιορίζεται μόνον εἰς τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς 1—10, ἤτοι εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1 4 ἢ 1—5, διὰ τὴν πρώτην δὲ ἔγγραφον παράστασιν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἐξαρκεῖ ἡ ἰχνογράφησις γραμμῶν, στιγμῶν κ.τ.λ. διαταγμένων κατὰ πρῶτον μὲν λόγον εἰς μίαν σειράν, ἔπειτα δὲ καὶ εἰς δύο. Θὰ ἀνατίθεται βέβαια εἰς τοὺς μαθητάς, ὅπως θὰ ἴδωμεν ἀλλοῦ, καὶ ἡ δι᾽ ἰχνογραφήσεως ἢ ἄλλων τρόπων παράστασις τῶν γνωστῶν εἰς αὐτοὺς μορφῶν καὶ τῶν ἀριθμῶν 5—10, ἀλλ᾽ αὐτὸ θὰ γίνεται ὄχι πρὸς προπαρασκευὴν τῆς χρήσεως τῶν ψηφίων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι γνωστὰ εἰς τοὺς μαθητὰς ἀλλὰ πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς πρὸς δρᾶσιν ὁρμῆς των διὰ καταλλήλου ***ἐπασχολήσεως***. Ἄλλωστε καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ παριστάνουν οἱ μαθηταὶ εὐσυνόπτους μορφὰς τῶν προκειμένων ἀριθμῶν, τέτοιας δὲ μορφὰς δὲν παρουσιάζουν, ὅπως εἴδαμεν, οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἰς τὰς περισσοτέρας εἰκόνας].

Σχετικὰ μὲ ὅλα, ὅσα ἐπαρατηρήσαμεν ἀνωτέρω ὡς πρὸς τὴν χρῆσιν τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν, παρατηρεῖ καὶ ὁ Hartmann (ὅπ. ἀν., σ. 379 κ. ἀκ.) τὰ ἑξῆς :

«α) Ἡ χρῆσις τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν ἔχει στενὰ ὅρια·

ἀρχίζει μέν, ἀφοῦ σχηματισθοῦν αἱ παραστάσεις τῶν ἀριθμῶν μὲ τὴν βοήθειαν πραγματικῶν ἀντικειμένων ἢ κάποιας ἀριθμητικῆς συσκευῆς, παύει δέ, μόλις οἱ μαθηταὶ θὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ συνδέουν μὲ τὰ ἀριθμητικὰ ψηφία τὰς ὀρθὰς παραστάσεις τῶν ἀριθμῶν.

β) Ἀφοῦ ὁ σχηματισμὸς τῶν παραστάσεων τῶν ἀριθμῶν προηγεῖται τῆς (ὀρθῆς) χρήσεως τῶν εἰκόνων, πράγματι αἱ τελευταῖαι αὐταὶ δὲν χρησιμοποιοῦνται διὰ τὸν σχηματισμὸν ἐκεῖνον. Ἀλλ' ἀπ' αὐτὸ συνάγεται ἀκόμη, ὅτι αἱ εἰκόνες εἶναι ὀλιγώτερον κατάλληλαι ἀπὸ ἄλλα ἐποπτικὰ μέσα πρὸς σχηματισμὸν τῶν παραστάσεων τῶν ἀριθμῶν.

γ) Τὸ γεγονός, ὅτι ἡ χρῆσις τῶν εἰκόνων παύει, μόλις ὁ παῖς ἠμπορεῖ νὰ συνδέῃ μὲ τὰ ψηφία τὰς ἀντιστοίχους παραστάσεις τῶν ἀριθμῶν, δὲν σημαίνει τίποτε ἄλλο παρὰ ὅτι τὰ ψηφία ὡς ἀριθμητικὰ σημεῖα πρέπει νὰ προτιμηθοῦν ἀπὸ τὰς εἰκόνας.

δ) Τὸ καθαυτὸ λοιπὸν ἔργον τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ στερεώνουν τὰς ἀποκτημένας πλέον παραστάσεις τῶν ἀριθμῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ προπαρασκευάζουν τὴν ἐπακολουθοῦσαν χρῆσιν τῶν ψηφίων. Τὸ μὲν πρῶτον γίνεται, καθόσον προκαλοῦν τὴν ἀνάπλασιν τῶν παραστάσεων τῶν ἀριθμῶν, τὸ δὲ δεύτερον, καθόσον ἐμφανίζονται μὲν μὲ ἕνα σταθερὸν σχῆμα (ὡς εἰκόνες, ὁποῖαι εἶναι καὶ τὰ ψηφία), ἀλλὰ συγχρόνως παρουσιάζουν καὶ τὰς καθ' ἕκαστον μονάδας».

Ἐπάγεται δὲ καὶ ὁ Hartmann, ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἔργον τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν ἠμποροῦν νὰ ἐκτελέσουν πολὺ καλὰ καὶ οἱ κύβοι τοῦ Tillich καὶ τὸ Ῥωσσικὸν ἀριθμητήριον.

Ἀναλόγους παρατηρήσεις μὲ τὸν Hartmann κάμνει καὶ ὁ Räther, καθὼς καὶ ὅλοι, ὅσοι τάσσονται ἐναντίον τῆς ἀποκλειστικῆς ἢ τῆς ἐπικρατεστέρας χρήσεως τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν.

Ἐν πάσῃ τώρα περιπτώσει ὁ ἐπιθυμῶν νὰ κάμῃ χρῆσιν καὶ τῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν σκόπιμον εἶναι νὰ προτιμήσῃ εἰκόνας παρουσιαζούσας διάταξιν τῶν στιγμῶν εἰς 2 γραμμάς, ὅπως εἶναι αἱ εἰκόνες τοῦ Born, τοῦ Busse καὶ τοῦ Grass.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὸ ζήτημα, κατὰ πόσον αἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιούμεναι ὡς ἐποπτικὸν μέσον ἠμποροῦν νὰ

διευκολύνουν ***τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων***, παρατηροῦμεν ἀμέσως, ὅτι διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν εἶναι ἐν γένει ἄχρηστοι. Εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων ἀδυνατοῦν νὰ διευκολύνουν τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σχετικῶν πράξεων. Ἂν λάβῃ π. χ. κανεὶς ὑπ' ὄψιν τὰς εἰκόνας τοῦ Böhme, παρατηρεῖ, ὅτι ἐκτὸς ὀλίγων περιπτώσεων (π. χ. τῶν 2+2, 3+3, 4+4, 5+5 κ. τ. λ.) εἰς τὰς ἄλλας ἀδυνατοῦν νὰ ἀνταποκριθοῦν πρὸς τὸν ἐπιδιωκόμενον σκοπόν. Ἡ ἕνωσις π. χ. τῆς εἰκόνος τοῦ 2 καὶ τῆς εἰκόνος τοῦ 3 δὲν δίδει τὴν εἰκόνα τοῦ 5, ἡ ἕνωσις τῶν εἰκόνων τοῦ 3 καὶ τοῦ 4 δὲν δίδει τὴν εἰκόνα τοῦ 7, ἡ ἕνωσις τῶν εἰκόνων τοῦ 4 καὶ τοῦ 5 δὲν δίδει τὴν εἰκόνα τοῦ 9 κ.τ.λ. Τὰ ἴδια καὶ χειρότερα συμβαίνουν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν. Τὰ ἴδια ἐπίσης συμβαίνουν καὶ μὲ τὰς εἰκόνας τοῦ Beetz, μολονότι ὁ ἴδιος τὰς ἐκθειάζει ὡς «τύπους τῆς ἀριθμήσεως», ἤτοι ὡς καταλλήλους νὰ αἰσθητοποιοῦν ὄχι μόνον τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ μολονότι ὄντως ἔχουν τὸ προσόν, ὅτι ἡ καθεμία των περιλαμβάνεται ἀμετάβλητη εἰς τὴν ἑπομένην. Ἔτσι ἡ ἕνωσις τῶν εἰκόνων τοῦ 2 καὶ τοῦ 3 δὲν δίδει τὴν εἰκόνα τοῦ 5, ἡ ἕνωσις τῶν εἰκόνων τοῦ 3 καὶ τοῦ 3 δὲν δίδει τὴν εἰκόνα τοῦ 6, ἡ ἕνωσις τῶν εἰκόνων τοῦ 3 καὶ τοῦ 4 δὲν δίδει τὴν εἰκόνα τοῦ 7, ἡ ἕνωσις τῶν εἰκόνων τοῦ 4 καὶ τοῦ 5 δὲν δίδει τὴν εἰκόνα τοῦ 9 κ.τ.λ. Ἀλλὰ καὶ μὲ αὐτὰς τὰς εἰκόνας τοῦ Born, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποιοῦσε ὁ Μεθοδικὸς αὐτὸς κυρίως διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ αἱ ὁποῖαι ὡς ἔχουσαι τὴν εἰς 2 σειρὰς διάταξιν πλεονεκτοῦν ἀπὸ τῆς προκειμένης ἀπόψεως, δὲν διευκολύνεται ἡ ἐκτέλεσις ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων (π β. π. χ. τὰς προσθέσεις 3+2, 4+2, 5+2 κ.τ.λ.). Ἀλλὰ καὶ ἂν ἦτο δυνατὸν μὲ τὴν βοήθειαν καταλλήλων εἰκόνων νὰ διευκολυνθῇ ἡ ἐκτέλεσις ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, πάλιν δὲν θὰ ἔπρεπε νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ εἰκόνες αὐταὶ ὡς κύριον ἐποπτικὸν μέσον διὰ τὸν προκείμενον σκοπόν, διότι ἡ διάταξις τῶν μονάδων των θὰ ἀπεμάκρυνε τοὺς μαθητὰς ἀπὸ τὴν εἰς 1 σειρὰν διάταξιν, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ὁποίας οἱ μαθηταὶ ἐκτελοῦν ἀπὸ μνήμης τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ἀνερχόμενοι ἢ κατερχόμενοι εἰς τὴν σειρὰν ὡρισμένας βαθμίδας.

Εἶναι βέβαια ἀληθές, ὅτι, ὅπως ἡ ἔγγραφος παράστασις τῶν ἀριθμῶν 1—4, ἔτσι καὶ ἡ ἔγγραφος παράστασις τῶν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν πράξεων σκόπιμον εἶναι νὰ γίνεται κατ' ἀρχὰς μὲ εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν καὶ ὄχι μὲ τὰ ἀριθμητικὰ ψηφία. Ἐπίσης δὲ εἶναι σκόπιμον νὰ χρησιμοποιῆται ὡς μέσον εὐχαρίστου ἀπασχολήσεως τῶν παίδων ἡ παρομοία παράστασις καὶ τῶν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν 5—10 πράξεων, μολονότι αἱ πράξεις αὐταὶ θὰ παριστάνωνται ἐξ ἀρχῆς ἐγγράφως μὲ τὰ ἀριθμητικὰ ψηφία. Ἀλλ' εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς αἱ εἰκονικαὶ παραστάσεις θὰ γίνωνται εἰς πράξεις διδαγμένας καὶ τελείως γνωστὰς εἰς τοὺς παῖδας, θὰ χρησιμοποιοῦνται δὲ ἄλλωστε πρὸς τοῦτο εἰκόνες ἀριθμῶν μὲ εὐσυνόπτους μορφάς, ἤτοι μὲ μορφάς, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες θὰ διατάσσωνται εἰς 1 ἢ 2 σειράς, ἡ δὲ μορφή, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ παριστάνεται τὸ ἐξαγόμενον κάθε πράξεως, θὰ προκύπτῃ ἀμέσως ἀπὸ τὰς μορφὰς τῶν ἀριθμῶν, ἀπὸ τοὺς ὁποίους θὰ ἐξάγεται].

β) Τὰ στερεὰ ἐποπτικὰ μέσα.

[Τὰ στερεὰ μέσα τῆς ἐποπτείας ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα ἢ εἶναι χωριστὰ καὶ ἀνεξάρτητα τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο ἢ συνδέονται στενώτερα ἢ χαλαρώτερα ἀναμεταξύ των καὶ ἀποτελοῦν ἔτσι μίαν ***συσκευήν***.

Ὁ κυριώτερος ἀντιπρόσωπος τῶν πρώτων εἶναι ***τὰ ξυλάρια***. Τὰ ξυλάρια ἐχρησιμοποιοῦντο ἤδη πρὸ τοῦ Πεσταλότση ἀπὸ τὸν κατόπιν ὀπαδόν του *Pöhlmann*, ἀλλὰ ὡς ἐποπτικὸν μέσον τῆς ἀριθμήσεως τῶν κλασμάτων, λησμονηθέντα δὲ κατόπιν ἐπανῆλθαν εἰς χρῆσιν ὡς ἐποπτικὸν μέσον τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων ἀπὸ τὸν *Fröbel*. Ἡ χρῆσίς των συνισταται σήμερον ἀπὸ πολλοὺς Μεθοδικούς, ὅπως π. χ. ἀπὸ τὸν Räther καὶ τὸν Hartmann. Εἶναι τὸ μετὰ τὰ δάκτυλα προχειρότερον μέσον τῆς ἐποπτείας, χωρὶς ἐν τούτοις νὰ ἔχῃ κανὲν ἀπὸ τὰ μειονεκτήματα τῶν δακτύλων. Ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ ὡς βοηθητικὸν ἐποπτικὸν μέσον, ἀλλὰ καὶ ὡς θεμελιῶδες, ἐφόσον τὸ σχολεῖον δὲν διαθέτει κανένα ἄλλο καλύτερον. Καθόσον δὲ εἶναι καὶ μέσον, μὲ τὸ ὁποῖον ἠμποροῦν νὰ ἐφοδιασθοῦν χωρὶς δυσκολίαν ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως, ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιοῦνται καὶ μάλιστα εἰς τὰς ὀλιγοπληθεῖς τάξεις καὶ ὡς μέσον ἀπασχολήσεως καὶ ἐργασίας τοῦ κάθε μαθητοῦ, ἐφόσον δὲν καλεῖται νὰ συνεργασθῇ ἀμέσως μὲ τὸν διδάσκαλον εἰς τὸ κοινὸν ἐποπτικὸν μέσον τῆς τάξεως. Καλλίστας ὅμως ὑπηρεσίας ἠμποροῦν νὰ προσφέρουν ὡς μέσον ἐφαρμογῆς καὶ μάλιστα, ἂν ἔχῃ ληφθῇ πρόνοια νὰ ἔχουν ἐφοδιασθῇ οἱ μαθηταὶ μὲ ξυλάρια διαφόρων μηκῶν, π. χ. τριῶν, ὅπως κάμνει ὁ Räther (10, $7\frac{1}{2}$ καὶ 5 ἑκατ. τ. μέτρ.). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ εἴτε μόνοι εἴτε κατόπιν προϊχνογραφήσεως τοῦ διδασκάλου εἰς τὸν πίνακα νὰ κατασκευάζουν μὲ τὰ ξυλάρια διάφορα ἁπλᾶ ἀντικείμενα καὶ νὰ παρατηροῦν καὶ νὰ δηλώνουν, μὲ πόσα ξυλάρια κάθε μήκους (μεγάλα, μεσαῖα καὶ μικρὰ) καὶ μὲ πόσα ἐν συνόλῳ ἔκαμαν τὸ κάθε ἀντικείμενον.

Ξυλάρια ἐξυπηρετοῦντα καὶ τὸν σχηματισμὸν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν εἶναι τὰ «ἀριθμητικὰ ξυλάρια» τοῦ *Hecht*. Τὰ ξυλάρια αὐτά, 10 τὸν ἀριθμόν, διότι προορίζονται μόνον διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—10, εἶναι πρισματικὰ καὶ ἔχουν ὕψος μὲν 15 ἑκ. τ. μ., μῆκος δὲ τῆς κάθε πλευρᾶς τῆς τετραγωνικῆς βάσεως 2 ἑκ. τ. μ. Τὸ κάθε ξυλάριον φέρει εἰς μὲν τὴν μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις του μίαν μαύρην στιγμήν, εἰς δὲ τὴν ἄλλην μίαν κόκκινην. Μὲ τὰς στιγμὰς αὐτάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὁραταὶ καὶ ἀπὸ μακράν, σχηματίζονται εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν].

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ***συσκευὰς*** παρατηροῦμεν πρὸ παντός, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν χρήσει εἶναι μέγιστος. Ὁ *Schröder* εἰς τὸ ἔργον του «Die Rechenapparate der Gegenwart» («Αἱ σημεριναὶ συσκευαί», Magdeburg, Friese und Fuhrmann) ἀναφέρει διακοσίας, προοριζομένας διὰ τὴν χρῆσιν τῆς τάξεως, ἀπὸ τὰς ὁποίας περιγράφει καὶ ἐξετάζει 188, μνημονεύει δὲ ἀκόμη καὶ ἄλλας 12, προοριζομένας διὰ τὰς χεῖρας τῶν μαθητῶν. Ἀλλὰ ἐκτὸς αὐτῶν ἐμφανίζονται διαρκῶς καὶ νέαι. Προφανῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξετάσωμεν ἢ καὶ μόνον νὰ μνημονεύσωμεν ἐδῶ ὅλας τὰς συσκευὰς αὐτὰς ἢ ἔστω καὶ τὰς περισσοτέρας. Θὰ ἐξετάσωμεν μόνον τὰ κυριώτερα εἴδη των καὶ ἀπὸ κάθε εἶδος τοὺς εὐχρηστοτέρους ἀντιπροσώπους. Ὡς πρὸς τὰ λοιπὰ παραπέμπομεν ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν εἰς τὸ μνημονευθὲν ἔργον τοῦ Schröder, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἔχομεν παραλάβει καὶ ἡμεῖς ἀρκετὰς πληροφορίας, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ εἰς τοὺς καταλόγους τῶν καταστημάτων τῶν διδακτικῶν μέσων καὶ εἰς τὰς ἰδιαιτέρας ἀγγελίας τῶν κατασκευαστῶν τῶν συσκευῶν, οἱ ὁποῖοι τὰς ἀποστέλλουν προθύμως εἰς τοὺς ζητοῦντας.

[Αἱ συσκευαὶ ἠμποροῦν νὰ καταταχθοῦν εἰς δύο μεγάλας τάξεις. Εἰς τὴν πρώτην περιλαμβάνονται ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες διατάσσονται ***εἰς εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν***, εἰς τὴν δευτέραν ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες διατάσσονται ***εἰς σειράς***.

Ἡ ***πρώτη*** πάλιν τάξις περιλαμβάνει τὰ ἀκόλουθα εἴδη].

Ἕνα εἶδος ἀποτελοῦν αἱ συσκευαὶ ἐκεῖναι, εἰς τὰς ὁποίας σχηματίζονται εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν ***ἀκίνητοι***. Αἱ συσκευαὶ αὗται ἀποτελοῦνται ἀπὸ ξυλίνας πινακίδας, φερούσας μικρὰς ὀπάς, εἰς τὰς ὁποίας εἰσάγονται ξυλάρια ἔχοντα κεφαλάς, ὁμοιαζούσας μὲ κομβία ἢ δισκία. Αἱ ὀπαὶ φυσικὰ ἔχουν διαταχθῆ εἰς τέτοιας ὁμάδας, ὥστε τὰ κομβία κάθε ὁμάδος νὰ ἀποτελοῦν τὴν εἰκόνα ἑνὸς ἀριθμοῦ. Τὸ περίεργον δὲ εἶναι, ὅτι αἱ συσκευαὶ τοῦ εἴδους αὐτοῦ ἔχουν ὡς βάσιν τὴν παλαιοτέραν ἀριθμητικὴν πινακίδα τοῦ *Joseph Gersbach* († 1830), τῆς ὁποίας ὅμως αἱ ὀπαί, 100 τὸν ἀριθμόν, διατάσσονται εἰς 10 σειράς. Εἰς τὸ εἶδος αὐτὸ ἀνήκουν ἡ ἀριθμητικὴ πινακὶς μὲ τὰς εἰκόνας τοῦ Böhme, ἡ καλουμένη συνήθως «Βερολίνειος συσκευὴ ἀπὸ κομβία» (Berliner Knopfapparat, Hamburg, A. Kleessen, τιμ. 10,50 μ.), τὸ «κιβώτιον τῶν ἀριθμητικῶν εἰκόνων τοῦ Kaselitz» (Kaselitz' Zahlenbilderkasten für den ersten Rechenunterricht, Berlin, Nicolai, 20 μ.), ὁ «πίναξ τῶν τύπων» τοῦ Beetz (Die Typentafel, Neustadt am Rennsteig, C. Christ, 16 μ., ἴδ. καὶ ἀνωτ., σελ. 92), ἡ «συσκευὴ τῶν ἀριθμητικῶν εἰκόνων» τοῦ Schneider (Zahlbilder—Apparat für den Zahlraum von 1—20), πωλουμένη ἀντὶ 12 μ. ἀπὸ τὸν ἴδιον, διδάσκαλον τοῦ Reichenbach—Thüringen (ἴδ. καὶ ἀνωτ., σελ. 96) κ. τ. λ.

Δεύτερον εἶδος ἀποτελοῦν αἱ συσκευαὶ ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ***κινητὰ σώματα***. Ὡς τέτοια δὲ σώματα μεταχειρίζονται οἱ μὲν Grass, Lay, Lüdemann, König κ. ἄλλ. σφαίρας, οἱ δὲ Pfister καὶ Homola δισκία, ὁ δὲ Born στιγμάς, ὡθουμένας μὲ κινητῆρας. Ἀπὸ τὰς συσκευὰς αὐτὰς ἄξιαι ἰδιαιτέρας μνείας εἶναι αἱ ἀκόλουθοι: *Grass*, Münchener Rechenmaschine zur Herstellung wirklich anschaulicher Gruppen—Zahlbilder, συσκευή, ἡ ὁποία ἔχει ὡς βάσιν τὸ Ῥωσσικὸν ἀριθμητήριον καὶ τῆς ὁποίας αἱ σφαῖραι διατάσσονται εἰς «τετραγωνικὰς» εἰκόνας, πωλουμένη ἀπὸ τὸν ἴδιον Grass (München, τύπος A. 18 μ., τύπος B. 13 μ.).—*Lay*, Rechenmaschine für den Zahlraum von 1—20, Wiesbaden, Nemnich (ἴδ. καὶ ἀνωτ., σελ. 94). —*König*, Kleiner Kugel - oder Zahlbilder—Apparat, Kassel, Schleenstein u. Holzapfel, 7,50 μ.—*Born*, Rechenapparat, διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 μ. 9, διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 1—100 μ. 22, Berlin, Müllerstrasse, 160, Wittwe Born.

Τρίτον τέλος εἶδος ἀποτελοῦν αἱ συσκευαί, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν ***ἑτοίμους*** εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὸ εἶδος αὐτὸ ἀνήκει π. χ. ἡ συσκευὴ τοῦ *Klix* (Klix', Zahlenbilder- Rechenkasten für 1 20), πωλουμένη ἀπὸ τὸν ἴδιον, διδάσκαλον εἰς τὸ Reichenbach—Schlesien, ἀντὶ 5 μ.

[Μολονότι αἱ στερεαὶ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν εἶναι ὑπέρτεραι ἀπὸ τὰς γραφικὰς ἀκριβῶς διὰ τὸν λόγον, ὅτι αἱ μονάδες των εἶναι στερεὰ σώματα, ἐν τούτοις θεωροῦμεν τὴν χρῆσιν καὶ αὐτῶν ὡς περιττεύουσαν, διότι ἔχουν ὅλα τὰ ἄλλα μειονεκτήματα, τὰ ὁποῖα ηὕραμεν εἰς τὰς γραφικὰς εἰκόνας.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὰς συσκευάς, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες διατάσσονται ***εἰς σειράς***, παρατηροῦμεν, ὅτι ἠμποροῦν νὰ διακριθοῦν εἰς δύο κύρια εἴδη, ἕνα, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ μονάδες τῶν συσκευῶν εὑρίσκονται εἰς χαλαρώτατον ἀναμεταξύ των σύνδεσμον, καὶ ἄλλο, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ μονάδες ἑνώνονται καὶ εἰς ἑνιαῖα σύνολα.

Τοῦ ***πρώτου*** εἴδους τῶν συσκευῶν αὐτῶν ὁ σπουδαιότερος ἀντιπρόσωπος εἶναι ***τὰ Ῥωσσικὰ ἀριθμητήρια***]. Τὰ ἀριθμητήρια αὐτὰ ἔχουν διαδοθῆ περισσότερον ἀπὸ κάθε ἄλλο εἶδος συσκευῆς. Ὁ συνήθης τύπος των ἔχει ὡς ἑξῆς: Εἰς τὰς 2 καθέτους πλευρὰς ἑνὸς τετραπλεύρου ξυλίνου πλαισίου εἶναι στερεωμένα 10 ὁριζόντια σύρματα εἰς ἴσην ἀναμεταξύ των ἀπόστασιν.

Εἰς τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ σύρματα αὐτὰ ἔχουν περασθῆ δέκα ξύλιναι σφαῖραι, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ ὠθοῦνται εὔκολα εἰς τὸ σύρμα. Ἀντὶ σφαιρῶν χρησιμοποιοῦνται καὶ κῦβοι, ξυλάρια, κομβία, δισκία, κύλινδροι κ.τ.λ. Τὸ οὐσιῶδες εἶναι, ὅτι 10 στερεὰ σώματα συνδέονται μὲ ἕνα σύρμα εἰς 1 σειράν, ἠμποροῦν δὲ νὰ μετακινοῦνται ἐλεύθερα εἰς τὸ σύρμα αὐτό.

Τὰ ἀριθμητήρια αὐτά, ὅπως φανερώνει καὶ τὸ ὄνομά των, ἔχουν τὴν προέλευσίν των ἀπὸ τὴν Ῥωσσίαν. Χρησιμοποιοῦνται ἐκεῖ ἀπὸ παλαιοτάτων χρόνων ὑπὸ τῶν ἐμπόρων, εἰς τὰς τραπέζας, εἰς τὰ ταμεῖα, ἀκόμη δὲ καὶ εἰς τὰ σχολεῖα. Τὸ «Tschotü», ὅπως ὀνομάζουν οἱ Ῥῶσσοι τὸ ἀριθμητήριόν των αὐτό, ἔχει εἰς τὸ μέσον μὲν τοῦ κάθε σύρματος δύο σφαίρας ἀνοικτοῦ χρώματος, εἰς τὰς δύο δὲ πλευράς του ἀπὸ τέσσαρας σκοτεινοῦ χρώματος, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον συντελεῖ εἰς τὴν μεγαλύτερην ἐποπτικότητα τοῦ ἀριθμητηρίου. Καθὼς λέγεται, στρατιῶται ἐπιστρέφοντες ἀπὸ τὴν Ῥωσσικὴν ἐκστρατείαν τοῦ 1812 τὸ ἔφεραν κατὰ πρῶτον εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην. Κατὰ τὸ 1815 ἦτο πλέον ἐν χρήσει εἰς τὸ Metz, κατὰ δὲ τὸ 1836 εἰς τὰ σχολεῖα τοῦ καντονίου τῆς Βέρνης. Ὁ Hentschel εἶναι ὁ πρῶτος Μεθοδικὸς τῆς Ἀριθμητικῆς, ὁ ὁποῖος τὸ μνημονεύει εἰς τὴν Γερμανίαν. Μετὰ τὸν Hentschel τὸ συνιστοῦν θερμότατα οἱ Diesterweg, Goltzsch, Palmer, Dittes, Schüter καὶ ἄλλοι. Ἐναντίον του τάσσονται μεταξὺ ἄλλων οἱ Stern, Lindner, Kehr, Adam καὶ B. Hartmann.

Πλεονεκτήματα μὲν τῶν Ῥωσσικῶν ἀριθμητηρίων εἶναι τὰ ἑξῆς:

[α) Ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὰς ἀπαιτήσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκπληρώνῃ κάθε ἐποπτικὸν μέσον (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 105 κ. ἀκ.).

β) Εἶναι τὰ μόνα ἐποπτικὰ μέσα, εἰς τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ σχηματίζωνται εὔκολα καὶ νὰ παριστάνωνται καθαρὰ καὶ οἱ ἀριθμοὶ 11—100].

γ) Ἠμποροῦν νὰ παριστάνουν καὶ εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν.

δ) Ἔχουν πολὺ ἁπλῆν τὴν κατασκευὴν καὶ

ε) Εἶναι εὐθηνά.

Ὡς ***μειονεκτήματα*** δὲ φέρονται τὰ ἀκόλουθα:

α) Τὰ προβλήματα δὲν ἠμποροῦν νὰ διακρίνωνται εἰς αὐτὰ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν πρὸς λύσιν των.

β) Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις αἰσθητοποιοῦνται μὲ αὐτὰ ἀτελέστατα.

γ) Ὁ ἀριθμὸς παρουσιάζεται εἰς τὰ ἀριθμητήρια μόνον ὡς πληθύς, ὡς ἄθροισμα χωριστῶν μονάδων, ὄχι δὲ καὶ ὡς ἑνότης (Hartmann).

δ) Δὲν παρουσιάζονται εἰς αὐτὰ ἑκάστοτε ἐκεῖναι μόνον αἱ μονάδες, αἱ ὁποῖαι χρειάζονται.

Ὁ Hartmann ἀποβλέπων εἰς τὰ ἀνωτέρω μειονεκτήματα ὀνομάζει τὰ Ῥωσσικὰ ἀριθμητήρια «καταλλήλους συσκευὰς διὰ τὴν ἀπαρίθμησιν, ἀλλ᾽ ὄχι καὶ διὰ τὴν ἀρίθμησιν».

[Μολονότι δὲν πρέπει νὰ παραγνωρισθῇ ἡ σημασία τῶν ἀνωτέρω μειονεκτημάτων, τὸ Ῥ. ἀριθμητήριον ἔχει τόσα καὶ τέτοια πλεονεκτήματα, ὥστε νὰ δικαιολογῆται ἡ τόσον γενικευθεῖσα χρῆσίς του ὡς θεμελιώδους μέσου τῆς ἐποπτείας κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—100. Ἄλλωστε ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω μειονεκτήματα τὸ μὲν τελευταῖον ἔχει ἐξουδετερωθῇ ἀπὸ πολλοῦ, καθόσον προσαρτᾶται ἐμπρὸς εἰς τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ ἀριθμητηρίου ἕνα ξύλινον ἐπικάλυμμα, μὲ τὸ ὁποῖον σκεπάζονται αἱ μὴ χρησιμοποιούμεναι σφαῖραι, ἢ καθόσον στηρίζεται κάπου ἕνα σύρμα, εἰς τὸ ὁποῖον θέτονται ἑκάστοτε τόσαι σφαῖραι, ὅσαι χρειάζονται, ἡ δὲ σημασία τοῦ τρίτου μειώνεται, ἂν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψει, ὅτι μὲ τὸ Ῥ. ἀριθμητήριον ἠμποροῦν νὰ σχηματισθοῦν καὶ εὐσύνοπτοι μορφαὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ ὅτι ἐκτὸς τῶν στηλῶν τοῦ Tillich κανένα ἄλλο ἐποπτικὸν μέσον δὲν παρουσιάζει τοὺς ἀριθμοὺς καὶ ὡς τελείαν ἑνότητα. Ἀπομένουν ἔτσι τὰ δύο πρῶτα μειονεκτήματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ πρῶτον δὲν ἔχει καὶ τόσην μεγάλην σπουδαιότητα].

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν διαφόρων εἰδῶν τοῦ Ῥωσσικοῦ ἀριθμητηρίου παρατηροῦμεν, ὅτι μερικοὶ (ὅπως π. χ. ὁ *Link*) τοποθετοῦν ὄπισθεν τῶν σφαιρῶν ἕνα ξύλινον φράγμα, διὰ νὰ ἐξαίρωνται ἔτσι αἱ σφαῖραι εὐκρινέστερα ἔμπροσθεν αὐτοῦ. Ἄλλοι ἔχουν διατάξει ἔτσι τὰ σύρματα, ὥστε νὰ φαίνωνται αἱ σφαῖραι καθαρὰ καὶ ὡς εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν. Ἀτυχὴς παραλλαγὴ τοῦ Ῥωσσ. ἀριθμητηρίου εἶναι τὸ ἀριθμητήριον τὸ ἔχον κάθετα σύρματα, (ὁποῖον εἶναι π. χ. τὸ ἀριθμητήριον τῶν *Diehl* καὶ *Jarrisch*, τοῦ *Schwegler*, τοῦ *Magnus* κ. ἄλλ.). Μερικοὶ κατασκευασταὶ (ὅπως π. χ. ὁ König καὶ ὁ Klix) δίδουν εἰς τὰ στερεὰ ἀντικείμενα τοῦ ἀριθμητηρίου των διάφορα χρώματα. [Ἀπὸ τὰ ἀριθμητήρια αὐτὰ ἄξια συστάσεως εἶναι ἰδίως ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐναλλὰξ μίαν σειρὰν λευκῶν σφαιρῶν καὶ ἄλλην μαύρων, διότι μὲ τὴν ἐναλλαγὴν αὐτὴν ἐπαυξάνεται ἡ ἐποπτικότης τῶν δεκάδων]. Ἄξια μνείας εἶναι ἐπίσης τὸ Ῥ. ἀριθμητήριον τοῦ *Volckmar*, τὸ ὁποῖον ἔχει μαῦρα ἐπικαλύμματα εἶναι βερνικωμένον καὶ ἔχει 100 μαύρας καὶ λευκὰς ἢ ἐρυθρὰς σφαίρας (εἰς δύο τύπους, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ μικρὸς τιμ. 10,50 μ. καὶ μὲ ὑψηλὰ ὑποστηρίγματα 14 μ., ὁ δὲ μεγάλος, ἔχων καὶ πράσινον παραπέτασμα, τιμ. 18 μ., μὲ μαῦρα δὲ ἐπικαλύμματα καὶ ὑψηλὰ ὑποστηρίγματα 20 μ., σιδηροῦς δὲ καὶ μὲ ἐπικαλύμματα καὶ ὑψηλὰ ὑποστηρίγματα 25 μ.), τὸ Ῥ. ἀριθμητήριον τοῦ *Koop* μὲ κινητὰ ξύλινα ἐπικαλύμματα (εἰς δύο ἐπίσης τύπους, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ μὲν μικρὸς τιμ. 11,50 μ. καὶ μὲ ὑψηλὰ ὑποστηρίγματα 14,50 μ., ὁ δὲ μεγάλος τιμ. 22 μ. καὶ μὲ ὑψηλὰ ὑποστηρίγματα 25 μ.) καὶ τὸ Ῥ. ἀριθμητήριον τοῦ *Goedeke* μὲ διχρώμους σφαίρας (30 μ. καὶ 22,50 μ.). Πρβ. καὶ Schroeder, ὅπ. ἀν., σ. 37 κ. ἀκ. Τὸν εὐχρηστότερον τύπον τῶν Ῥ. ἀριθμητηρίων ἀποτελεῖ τὸ ἀριθμητήριον τῆς Würzburg, τὸ ὁποῖον ἔχει σχεδιασθῆ ἀπὸ τοὺς *Lang* καὶ *Schubert*, κατασκευάζεται δὲ καὶ πωλεῖται ἀντὶ 38,50 μ. εἰς τὴν Schulfabrik τοῦ C. Oettinger εἰς Würzburg.

Τοῦ **δευτέρου** εἴδους τῶν προκειμένων συσκευῶν ὁ κυριώτερος ἀντιπρόσωπος εἶναι **τὸ ἀριθμητικὸν κιβώτιον** τοῦ *Tillich*. Ὁ Tillich (ἴδ. καὶ ἀνωτ., σελ. 46 κ. ἀκ.) εἶχε τὴν γνώμην, ὅτι τὰ ἀντικείμενα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θὰ ἀποτελοῦνται τὰ ἐποπτικὰ μέσα τῆς πρώτης ἀριθμήσεως, πρέπει νὰ πληροῦν τοὺς ἑξῆς ὅρους:

α) πρέπει νὰ εἶναι ὅλως διόλου ὅμοια καὶ νὰ μὴ ἔχουν ἐξέχούσας ποιότητας,

β) πρέπει νὰ ἔχουν συμμετρίαν,

γ) πρέπει νὰ εἶναι εὐκίνητα καὶ

δ) πρέπει νὰ συνδυάζωνται εὔκολα, νὰ ἠμποροῦν δηλ. νὰ παριστάνουν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἔτσι, ὥστε νὰ εὑρίσκῃ κανεὶς εἰς

αὐτοὺς αἰσθητοποιουμένας τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας ἐμφανίζουν οἱ ἀφῃρημένοι ἀριθμοί, νὰ ἠμπορῇ δὲ δι' αὐτὸ νὰ διδάξῃ μὲ τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ καὶ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κλασμάτων.

Ὁ Tillich ἐπίστευσε, ὅτι εἰς τὸ ἀριθμητικόν του κιβώτιον εὗρε τὸ διδακτικὸν μέσον, τὸ ὁποῖον ἐκπληρώνει ὅλους τοὺς ἀνωτέρω ὅρους. Πρβ. τὸ ἔργον του Lehrbuch der Arithmetik (1806). Τὸ ἀριθμητικὸν κιβώτιον τοῦ Tillich περιλαμβάνει κύβους καὶ τετραγωνικὰς στήλας, κατασκευασμένα ἀπὸ ξύλον. Αἱ στῆλαι ἔχουν τὴν βάσιν τῶν κύβων, ὕψος δὲ διπλάσιον, τριπλάσιον, . . . δεκαπλάσιον ἀπὸ τὸ ὕψος τῶν κύβων. Οἱ κῦβοι παριστάνουν τὴν μονάδα, ἀπὸ δὲ τὰς στήλας αἱ μὲν ἔχουσαι ὕψος διπλάσιον τοῦ κύβου τὴν δυάδα, αἱ δὲ τριπλάσιον τὴν τριάδα κ. οὕτ. καθ. Ὅλα δὲ τὰ σώματα αὐτὰ εὑρίσκονται εἰς ἕνα κιβώτιον, διαταγμένα εἰς αὐτὸ κατὰ βαθμίδας ἀναλόγως τοῦ μεγέθους των.

Ἡ ἐφεύρεσις αὐτὴ τοῦ Tillich ἐντὸς ὀλίγου εἶχε λησμονηθῆ· καὶ ὁ Stubba δὲ ἀκόμη, ὁ ὁποῖος κατ' ἀρχὰς ἐχρησιμοποίησε τὸ ἀριθμ. κιβώτιον, τὸ ἐγκατέλειψε ἀργότερα. Μόλις μετὰ ἀρκετὰς δεκαετηρίδας ἐπανῆλθε πάλιν ἡ συσκευὴ τοῦ Tillich εἰς τὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἄρχισε νὰ διαδίδεται ὁλονὲν εὐρύτερα. Ἰδιαιτέρως δὲ ἐσυνετέλεσαν εἰς αὐτὸ Μεθοδικοὶ τῆς Ἑρβαρτιανῆς σχολῆς. Ὁ *Stoy* τὸ ἐπαινεῖ μὲ τοὺς ἑξῆς λόγους: «Τὸ ἀριθμ. κιβώτιον τοῦ Tillich ὑπῆρξε διὰ τὸ Παιδαγωγικὸν Φροντιστήριον τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ἰένης κατὰ τὰ 25 ἔτη τῆς λειτουργίας του πολύτιμον κληροδότημα τῶν χρόνων τῆς ἀκμῆς τῆς Γερμανικῆς Παιδαγωγικῆς . . . Τὸ ἀριθμ. αὐτὸ κιβώτιον μὲ τοὺς κύβους του, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὰς μονάδας, καὶ μὲ τὰς στήλας του, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὴν πολλαπλῆν ἐπανάληψιν τῆς μονάδος, τοιουτοτρόπως δὲ συντελοῦν εἰς τὸν εὔτακτον σχηματισμὸν τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν, ἔχει τόσην δύναμιν εἰς τὰς χεῖρας ἑνὸς προσεκτικοῦ διδασκάλου, ὥστε καὶ μαθηταὶ καθυστερημένοι καὶ ἕνεκα πλημμελείας τῆς στοιχειώδους διδασκαλίας παρουσιάζοντες σύγχυσιν καὶ ἀβεβαιότητα ἠμποροῦν μὲ αὐτὸ νὰ θεραπευθοῦν καὶ νὰ ἀποκατασταθοῦν εἰς τὴν ὁδὸν τῆς ὑγιοῦς ἀναπτύξεως» (ἴδ. τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ Stoy εἰς τὸ ἔργον τοῦ Göpfert «Der Rechenunterricht»). Ὁ δὲ Bartholomäi φρονεῖ, ὅτι τὸ ἀριθμ.

κιβώτιον τοῦ Tillich εἶναι δημιούργημα «ἀληθινῆς ἐμπνεύσεως». Ὁ Kehr τὸ θεωρεῖ ὡς «τὴν σχετικῶς τελειοτάτην ἀριθμητικὴν συσκευήν», ἐπίσης δὲ καὶ οἱ Bräutigam, Schneyer, Heckenhayn, Rein καὶ Pickel, Leutz, Adam, B. Hartmann, Räther καὶ ἄλλοι ἀποδίδουν εἰς αὐτὸ μεγάλην ἀξίαν (πρβ. καὶ Fritzsch, Ernst Tillich, Langensalza, Beyer u. S. 75 λ.).

Ἀλλὰ τὸ ἀριθμητικὸν κιβώτιον τοῦ Τ. ἔχει εὕρει καὶ κηρυγμένους ***ἀντιπάλους***. Ἀπὸ αὐτοὺς πρέπει νὰ μνημονευθῇ ἰδίως ὁ *Dittes*. Εἰς τὴν σελ 664 τοῦ ἔργου του «Schule der Pädagogik» παρατηρεῖ τὰ ἀκόλουθα: «Ἡ συσκευὴ αὐτή, τῆς ὁποίας γίνεται ἀκόμη χρῆσις εἰς μερικὰ σχολεῖα (;), ἠμπορεῖ βέβαια νὰ προσφέρῃ ἀγαθὰς ὑπηρεσίας, ἀλλὰ ἔχει τὸ μειονέκτημα, ὅτι παριστάνει τὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ μεγέθους, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον προφανῶς ἐμποδίζει τὸν σχηματισμὸν καθαρᾶς περὶ αὐτοῦ ἀντιλήψεως· διότι, μολονότι μία στήλη εἶναι π. χ. ἑξαπλασία ἀπὸ τὸν ὡς μονάδα λαμβανόμενον κῦβον, ἐν τούτοις εἶναι πάντοτε ***ἕνα*** ἀντικείμενον, δὲν εἶναι ἑπομένως ἄμεσος εἰκὼν τοῦ ἕξι. Ἐν πάσῃ περιπτώσει ἡ συσκευὴ τοῦ Tillich δὲν εἶναι ἡ καλλίστη, μάλιστα δὲ δὲν εἶναι οὔτε ἀναγκαία».

Ὁ δὲ *Knilling* παρατηρεῖ κατὰ τῆς συσκευῆς τοῦ Tillich τὰ ἀκόλουθα: «Ἡ παράστασις τοῦ ἀριθμοῦ ἠμπορεῖ νὰ σχηματισθῇ τελείως σαφὴς καὶ ὡρισμένη μόνον διὰ πραγματικῆς πλήθους ἀντικειμένων καὶ ὄχι διὰ φαινομενικῆς, ὁποία εἶναι ἡ ὑποδηλουμένη διὰ τῶν στηλῶν τοῦ Tillich».

[Τὸ μειονέκτημα, τὸ ὁποῖον ὑποδεικνύουν οἱ Dittes καὶ Knilling, παρουσιάζεται πράγματι εἰς τὰς στήλας τοῦ Tillich, αἴρεται ὅμως, ἐφόσον ὑποδηλώνονται αἱ μονάδες κάθε στήλης δι' ἐντομῶν, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν ἢ νὰ ὑπάρχουν μόνον εἰς τὴν μίαν πλευρὰν τῆς στήλης ἢ νὰ περιβάλλουν ὅλας τὰς πλευράς της. Ἐφόσον δὲ παρουσιάζεται ἡ συσκευὴ μὲ τέτοιας στήλας, πρέπει νὰ ὁμολογηθῇ, ὅτι ἀνταποκρίνεται εἰς ὅλας τὰς ἀπαιτήσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκπληρώνῃ τὸ θεμελιῶδες μέσον τῆς ἐποπτείας, προπαντὸς δὲ παριστάνει καλύτερα ἀπὸ κάθε ἄλλο ἐποπτικὸν μέσον τὸν ἀριθμὸν καὶ ὡς πλῆθος μονάδων καὶ ὡς ἑνότητα. Πρέπει ἐν τούτοις νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι ἡ χρῆσίς της σκόπιμον εἶναι νὰ περιορίζεται εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς

1—10 ἢ τὸ πολὺ τῆς σειρᾶς 1—20, διότι εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 11 ἢ 21—100 ὁ χειρισμὸς τῶν κύβων καὶ τῶν στηλῶν ἀποβαίνει πολὺ δύσκολος.

Ἡ πλήρης συσκευὴ τοῦ Tillich, ἤτοι ἡ προοριζομένη διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1-100, πωλεῖται ἀπὸ τὸ ἐκδοτικὸν κατάστημα Fröbelhaus τῆς Λειψίας (τοῦ A. Müller) ἀντὶ 12 μ. Ἐφόσον ὁ διδάσκαλος θέλει νὰ διδάξῃ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 ἐπὶ τῇ βάσει τῆς συσκευῆς τοῦ Tillich, δὲν διαθέτει δὲ τὸ σχολεῖόν του τὴν συσκευήν, ἠμπορεῖ ἐπὶ τῇ βάσει ἑνὸς κύβου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκμαὶ ἔχουν μῆκος 5 ἑκ. τ. μ., ἢ νὰ κατασκευάσῃ ὁ ἴδιος, ἂν ἔχῃ ἔστω καὶ στοιχειώδεις ξυλοτεχνικὰς γνώσεις, ἢ νὰ ἀναθέσῃ εἰς ἕνα ξυλουργὸν νὰ κατασκευάσῃ: 10 ὁμοίους κύβους, παριστάνοντας τὴν μονάδα, 5 στήλας παριστανούσας τὴν δυάδα, 3 τὴν τριάδα, ἀπὸ 2 διὰ τὴν τετράδα καὶ πεντάδα καὶ ἀπὸ μίαν διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 6, 7, 8, 9 καὶ 10. Ἂν δὲ θέλῃ νὰ διατάξῃ τοὺς ἀριθμοὺς 1—20, προσθέτει εἰς τὰ ἀνωτέρω καὶ 5 δυάδας, ἀπὸ 3 τριάδας καὶ τετράδας, ἀπὸ 2 πεντάδας καὶ ἑξάδας καὶ ἀπὸ 1 στήλην παριστάνουσαν τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8, 9 καὶ 10 (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., μέρ, 1, σ. 54)].

Μερικοὶ ἐπροσπάθησαν νὰ βελτιώσουν τὸ κιβώτιον τοῦ Tillich. Τοιουτοτρόπως ὁ *Kreis* εἰς τὴν Βιέννην τὸ ἐσυμπλήρωσε μὲ 10 μεταλλίνας θήκας, εἰς τὰς ὁποίας ἠμποροῦν νὰ εἰσάγωνται οἱ κῦβοι. Ἡ θήκη, εἰς τὴν ὁποίαν εἰσάγονται 2 κῦβοι, ἔχει ὕψος 2 κύβων, ἡ δεχομένη 3 κύβους ἔχει ὕψος 3 καὶ οὕτ. καθ. Αἱ θῆκαι εἶναι ἀνοικταὶ εἰς τὴν μίαν πλευράν, διὰ νὰ γίνωνται ὁραταὶ εἰς τοὺς μαθητὰς αἱ καθ' ἕκαστον μονάδες, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀποτελοῦνται οἱ διάφοροι ἀριθμοί. Ἔτσι ὁ κάθε ἀριθμὸς παρουσιάζεται καὶ ὡς πλῆθος μονάδων καί, καθόσον αἱ μονάδες του συνενώνονται εἰς τὴν θήκην, ὡς ἑνότης. Ἡ συσκευὴ τοῦ Kreis πωλεῖται ἀντὶ 20 καὶ 16 μ. ἀπὸ τὸν Karl Schellner εἰς τὴν Βιέννην.—Εἰς τὸ ἀριθμ. κιβώτιον τοῦ *Wander* (Dresden, Müller—Fröbelhaus, 8 μ.) αἱ μονάδες εἶναι χρωματισμέναι εἰς τὴν ἐμπροσθίαν πλευρὰν τῶν στηλῶν ἐναλλὰξ μὲ λευκὸν καὶ μαῦρον χρῶμα.—Ἡ συσκευὴ τοῦ *Wille* (Delitzsch, Pabst, 10,50 μ.) ἀποτελεῖται ἀπὸ 42 κύβους, οἱ ὁποῖοι εἶναι εἰς 6 διάφορα χρώματα, φέρουν δὲ καὶ στιγμάς, διὰ νὰ ἠμποροῦν νὰ σχηματίζουν καὶ εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν.—Παρόμοιον εἶναι καὶ τὸ ἀριθμητικὸν κιβώτιον τοῦ *Weidner* (Dresden—Blasewitz, μὲ 68 κύβους τιμ. 6 μ., μὲ 24 τιμ. 2,50 μ.). Οἱ κῦβοι τοῦ Weidner εἶναι τρυπημένοι, ἠμποροῦν δὲ νὰ συνενώνωνται μὲ ξυλάρια εἰς ἀριθμητικὰς εἰκόνας.—Οἱ *Posner* καὶ *Langer* κάμνουν τὸν χωρισμὸν τῶν μονάδων εἰς τὰς στήλας μὲ αὔλακας, ἔχουν δὲ χρωματίσει τὰς παριστανούσας τοὺς ἀπὸ τοῦ 5 καὶ ἄνω ἀριθμοὺς εἰς ὅλην τὴν ἔκτασιν τὴν περιλαμβάνουσαν τοὺς 5 κατωτέρους κύβους μὲ κόκκινον χρῶμα. – Ἄξιον μνείας εἶναι ἐπίσης τὸ ἀπὸ τοῦ 1900 ἀρκετὰ διαδοθὲν ἀριθμ. κιβώτιον τοῦ *Müller*, Διευθυντοῦ εἰς τὴν Zeitz, περιέχον ἐγχρώμους στήλας καὶ κύβους, ἐπὶ τῶν ὁποίων ὑπάρχουν καὶ ἀριθμητικὰ ψηφία. Αἱ στῆλαι διαιροῦνται εἰς κύβους μὲ αὔλακας, αἱ ὁποῖαι ἐκτείνονται εἰς ὅλην τὴν περίμετρόν των καὶ εἶναι χρωματισμέναι μὲ σκοτεινὸν χρῶμα, ἀναλύονται δὲ διὰ χρωμάτων, ὑπαρχόντων εἰς τὴν μίαν μόνον πλευράν των, εἰς ὅλα τὰ συστατικά, ὅσα ἠμποροῦν νὰ παρουσιασθοῦν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν 4 θεμελιωδῶν ἀριθμ. πράξεων. Ὁ συνήθης τύπος τοῦ ἀριθμ. κιβωτίου τοῦ Müller, ἀποτελούμενος ἀπὸ 60 τεμάχια, στοιχίζει 22,50 μ., ὁ τύπος τοῦ μεγάλου μεγέθους, ἀποτελούμενος ἀπὸ 100 στήλας καὶ κύβους, 27,50 μ., ὁ δὲ τύπος τοῦ μικροῦ μεγέθους (δι' οἰκογενείας καὶ ὀλιγοπληθεῖς τάξεις ἰδιωτικῶν σχολείων), ἀποτελούμενος ἀπὸ 50 στήλας καὶ κύβους, στοιχ. 8 μ. Καὶ οἱ 3 τύποι πωλοῦνται ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν Müller.—Διὰ τὰς δύο ἀριθμητ. κλίμακας τοῦ *Beetz* ἔγινε λόγος ἀνωτέρω (σελ. 92).—[Σημειωτέον τέλος, ὅτι μερικοί, θέλοντες νὰ συνενώσουν τὰ πλεονεκτήματα τῆς συσκευῆς τοῦ Tillich καὶ τοῦ Ρ. ἀριθμητηρίου, ἔχουν κάμει συνδυασμοὺς τῶν 2 αὐτῶν διδακτικῶν μέσων, οἱ ὁποῖοι ὅμως κυρίως εἰπεῖν εἶναι Ρ. ἀριθμητήρια μὲ κύβους ἀντὶ σφαιρῶν καὶ μὲ κάθετον διεύθυνσιν τῶν συρμάτων ἀντὶ τῆς ὁριζοντίας. Διὰ τῆς ἑνώσεως τῶν κατακορύφως τοποθετημένων κύβων εἰς στήλας ἐπιδιώκεται ἡ παράστασις τοῦ κάθε ἀριθμοῦ καὶ ὡς ἑνότητος. Εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν ὑπάγονται αἱ συσκευαὶ τῶν *Ortlepp* καὶ *Kohlschmidt*].

Ὡς πρὸς τὰς λοιπὰς συσκευὰς τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων 1—100 ἴδ. Schröder, ὅπ. ἀνωτ.

[Ὅ,τι τώρα ἐξάγεται ἀπὸ ὅλα τὰ λεχθέντα διὰ τὰς συσκευάς, εἶναι, ὅτι διὰ μὲν τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1-10 ἐνδεικνύεται ἡ χρῆσις ὡς θεμελιώδους ἐποπτικοῦ μέσου τοῦ ἀριθμ. κιβωτίου τοῦ Tillich, διὰ δὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 11—100 τοῦ Ῥωσσικοῦ ἀριθμητηρίου, ὅτι δ' ὅμως καὶ τὸ Ρ. ἀριθμητήριον ἠμπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐπωφελῶς διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 καὶ τὸ κιβώτιον τοῦ Tillich τοὐλάχιστον διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 11—20.

Φυσικὰ δὲν λείπουν συσκευαὶ καὶ ἐν γένει στερεὰ ἐποπτικὰ μέσα καὶ διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—1000, μολονότι, ὅπως εἴπαμεν καὶ εἰς τὰ προηγούμενα (ἴδ. ἀνωτ., σ. 104), ἡ χρῆσις τῶν μέσων αὐτῶν περιττεύει προκειμένου διὰ συνήθεις μαθητάς, οἱ ὁποῖοι θὰ σχηματίζουν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς μὲ τὴν ἐσωτερικὴν ἐποπτείαν. Ἐὰν εἰς τοὺς μαθητὰς αὐτούς, ὅπως παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀνωτ., μέρ. 2, σ. 13) εἴπῃ ὁ διδάσκαλος, ὅτι ἠμποροῦν νὰ φαντάζωνται μὲ τὸν νοῦν των δίπλα εἰς τὸ χρησιμοποιούμενον ἀριθμητήριον καὶ ἕνα ἄλλο ὅμοιον μὲ αὐτὸ καὶ ὅτι 100 σφαῖραι (δηλ. ἕνα ὁλόκληρον ἀριθμητήριον) καὶ 1 ἀκόμη σφαῖρα κάμνουν 101 σφαίρας, 100 καὶ 2 ἀκόμη σφαῖραι εἶναι 102, θὰ ἠμπορέσουν οἱ μαθηταὶ εὐθὺς κατόπιν μόνοι των νὰ ἀπαριθμήσουν ἕως τὸν ἀριθμὸν 199. Ἐὰν τοὺς δοθοῦν ἔπειτα οἱ ἀριθμοὶ 200 καὶ 201, θὰ ἐξακολουθήσουν πάλιν νὰ ἀπαριθμοῦν μόνοι των. Θὰ σταματοῦν μόνον, ὁσάκις πρόκειται νὰ ἀνέλθουν ἀπὸ μίαν ἑκατοντάδα εἰς ἄλλην. Ἡ χρῆσις ἐπομένως ἐποπτικῶν μέσων κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—1000 ἐνδεικνύεται μόνον δι' ἀδυνάτους μαθητάς.

√ Ἀπὸ τὰ μέσα τώρα αὐτὰ ἄλλα μὲν παριστάνουν τὸ περιεχόμενον τῶν ἀριθμῶν πραγματικά, ἤτοι μὲ τόσας μονάδας, ἀπὸ ὅσας ἀποτελοῦνται οἱ ἀριθμοί, ἄλλα δὲ συμβολικά, καθόσον μὲ ἕνα ἀντικείμενον πρέπει νὰ νοηθῇ ἕνα ὡρισμένον πλῆθος μονάδων. Εἰς τὴν δεύτερην κατηγορίαν ὑπάγονται **τὰ νομίσματα** (1 λεπτὸν=1 μονάς, 1 δεκάλεπτον=1 δεκάς, 1 δραχμὴ=1 ἑκατοντάς, 1 δεκάδραχμον=1 χιλιάς). Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν ἀνήκουν **τὰ ξυλάρια,** ἐφόσον συνενώνονται εἰς δεσμίδας ἀπὸ 10, 100 καὶ 1000. Εἰς τὴν ἴδιαν κατηγορίαν ἀνήκει καὶ **τὸ ἀριθμητήριον τοῦ *Kytzia*** διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 1—1000, ἀποτελούμενον ἀπὸ 2 Ῥωσσ. ἀριθμητήρια, στηριζόμενα εἰς ἕνα κοινὸν ὑποστήριγμα καὶ προοριζόμενα διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—200, προσέτι δὲ ἀπὸ 8 πολὺ μικρὰ Ῥ. ἀριθμητήρια προσαρτημένα εἰς τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ μεγάλου ἀριθμητηρίου καὶ διευκολύνοντα τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—1000. Εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν ἀνήκουν καὶ ***αἱ συσκευαὶ τῶν κύβων*** τοῦ *Heer*, τοῦ *Krämer*, τοῦ *Mittmann*, τοῦ *Beetz* κ. ἄλλ. 10 μικροὶ κῦβοι συνενωνόμενοι ἀποτελοῦν μίαν στήλην, τὴν δεκάδα, δέκα στῆλαι μαζὶ ἀποτελοῦν μίαν πλάκα, τὴν ἑκατοντάδα, καὶ δέκα πλάκες, τοποθετούμεναι ἡ μία ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ἀποτελοῦν ἕνα μεγάλον κῦβον, τὴν χιλιάδα (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ.ἀν., σ. 13 κ.ἀκ.)].

β) Τὰ ἐποπτικὰ μέσα τῆς ἀριθμήσεως τῶν κλασμάτων.

[Ὅπως τὰ ἐποπτικὰ μέσα τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων, ἔτσι καὶ τὰ ἐποπτ. μέσα τῆς ἀριθμήσεως τῶν κλασμάτων εἶναι ***φυσικὰ*** καὶ ***τεχνητά.*** Φυσικὰ εἶναι π. χ. καρποί, τεμάχια χάρτου κ. τ. λ. Τὰ τεχνητὰ εἶναι ἢ ***γραφικά,*** ὁποῖα εἶναι π. χ. γραμμαί, κύκλοι, ὀρθογώνια κ.τ.λ., ἢ ***στερεά,*** ὅπως εἶναι αἱ διάφοροι σχετικαὶ ***συσκευαί***].

Αἱ συσκευαὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ κανόνας, στήλας, κυλίνδρους, σφαίρας κ. τ. λ. Εἰς τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ ἡ εἰς μέρη διαίρεσις ἢ ὑποδηλώνεται μόνον ἢ ἐκτελεῖται πράγματι. Ἀπὸ τὰς συσκευὰς αὐτάς, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἄλλαι μὲν αἰσθητοποιοῦν τὰ κοινὰ κλάσματα, ἄλλαι δὲ πάλιν τὰ δεκαδικά, ἄξιαι μνείας εἶναι αἱ ἀκόλουθοι: *Beetz*, Bruchrechentreppe, Osterwieck—Harz, Zickfeldt, 15 μ. Ἡ συσκευὴ αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ κανόνας, οἱ ὁποῖοι εἶναι κλάσματα τοῦ μέτρου.—*Zarth*, Bruchrechenapparat, Zarth, Berlin—Steglitz, 15 μ. Ἡ συσκευὴ αὐτή, καθὼς καὶ αἱ 2 ἀκόλουθοι, ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀδιαιρέτους κανόνας, εἰς τοὺς ὁποίους ὑποδηλώνεται μόνον ἡ διαίρεσις. Εἶναι δὲ οἱ κανόνες τοῦ Zarth τριγωνικοὶ καὶ ἔγχρωμοι καὶ στηρίζονται εἰς ὑποστηρίγματα.—*Müller*, Bruchrechenapparat, Dresden, Müller—Fröbelhaus, 10 μ.—*Knilling*, Teillineal, 1899.—Ἀπὸ

διῃρημένους κυλίνδρους συνίστανται αἱ συσκευαὶ τῶν *Hermann* (Bensheim, Ehrhard u. Co., 1869, τιμ. ἀπὸ 8,40 μ. ἕως 28 μ.), *Beumann* (Bremervörde, 1890, τ. 9 μ.) καὶ *Koepp*, τοῦ ὁποίου ἡ συσκευὴ αἰσθητοποιεῖ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα (Koepp, Decimalbruch—Rechenapparat, Bensheim, Ehrhard u. Co., τ. 16 μ.). Ἡ δὲ «Bruchrechenmaschine» τοῦ ἰδίου Koepp ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀδιαιρέτους πλάκας (αὐτ., 1886, τ. 10 μ.). Ὁ Koepp ἐχρησιμοποίησε καὶ διῃρημένους κύβους πρὸς παράστασιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων (αὐτ., 1872, τ. 16 μ.).—Ἄξιαι μνείας εἶναι προσέτι καὶ αἱ συσκευαὶ τοῦ *Baier* (Bruchrechen—Maschine, Leipzig, Volckmar, 1908, τ. 34 μ.) καὶ τοῦ *Eberhard Scheiner* (Würzburger Bruchrechenmaschine, Würzburg) πωλουμένη ἀπὸ τὸν ἴδιον ἀντὶ 8 μ.

B. Τὰ μέσα τῆς αἰσθητοποιήσεως τῶν πραγματικῶν κύκλων τῆς ἀριθμήσεως.

[Ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος, ἀντλεῖ τὸ ὑλικὸν τῆς ἀριθμήσεως ἀπὸ τοὺς διαφόρους πραγματικοὺς κύκλους, τοὺς ὁποίους παρουσιάζουν ὁ πρακτικὸς βίος καὶ τὰ εἰς τὸ σχολεῖον διδασκόμενα πραγματικὰ μαθήματα. Διὰ νὰ ἐξαχθῇ τώρα ἀπὸ τὸ πραγματικὸν αὐτὸ ὑλικὸν τὸ ὑλικὸν τῆς ἀριθμήσεως, ἀπαιτεῖται φυσικὰ καὶ ἡ γνῶσις τῶν ἐνεργειῶν ἐκείνων, διὰ τῶν ὁποίων γίνεται ἡ ἐξαγωγὴ αὐτή, ἐνεργειῶν, ὁποῖαι εἶναι π. χ. ἡ μέτρησις μηκῶν, ἐπιφανειῶν, ὄγκων καὶ χωρητικότητος, ἡ στάθμησις βαρῶν, ὁ ὑπολογισμὸς χρονικῶν μεγεθῶν, οἱ διάφοροι τρόποι τῆς συναλλαγῆς κ.τ.λ. Ἐφόσον δὲ αἱ ἐνέργειαι αὐταὶ δὲν εἶναι γνωσταὶ εἰς τοὺς παῖδας, πρέπει νὰ διδαχθοῦν εἰς αὐτούς, ἡ δὲ διδασκαλία των θὰ ἀποβῇ ἀποτελεσματικὴ μόνον, ἂν οἱ μαθηταὶ ἔχουν ἐμπρός των καὶ χειρίζωνται μόνοι των ὅλα τὰ μέσα, ὅλα τὰ ἀντικείμενα, μὲ τὰ ὁποῖα γίνονται αἱ ἐνέργειαι ἐκεῖναι.

Ἔτσι κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν διαφόρων συναλλαγῶν πρέπει νὰ χρησιμοποιοῦνται ὡς μέσα αἰσθητοποιήσεως τὰ νομίσματα, αὐτούσια ἢ εἰς ἀπεικονίσεις καὶ ὁμοιώματα, καὶ μάλιστα ὄχι μόνον τὰ τῆς πατρίδος, ἀλλὰ καὶ τῶν ἄλλων χωρῶν, μὲ τὰς ὁποίας συναλλάσσεται περισσότερον ἡ πατρίς, τὰ γραμματόσημα καὶ τὰ ταχυδρ. δελτάρια, τὰ χαρτόσημα, τὰ εἰς τὰς ἐφημερίδας δημοσιευόμενα δελτία τῶν διαφόρων ἀγορῶν καὶ τοῦ χρηματιστηρίου, σχέδια λογαριασμῶν καὶ ἀποδείξεων πληρωμῆς σχέδια καταστίχων τῶν ἐσόδων καὶ ἐξόδων τῆς οἰκίας, σχέδια χρεωστικῶν γραμματίων, ἀπεικονίσεις διαφόρων τίτλων (μετοχῶν, ὁμολογιῶν), βιβλιάρια καταθέσεως εἰς ταμιευτήρια, τύποι φορολογικῶν δηλώσεων κ.τ.λ. κ.τ.λ. Κατὰ τὰς διαφόρους μετρήσεις καὶ σταθμήσεις θὰ χρησιμοποιοῦνται τὰ κυριώτερα ἀπὸ τὰ ἐν χρήσει μέτρα καὶ σταθμά, ἄλλα μὲν αὐτούσια, ἄλλα δὲ δι' ὁμοιωμάτων των. Πρὸς αἰσθητοποίησιν τῶν χρονικῶν μεγεθῶν σκόπιμον εἶναι νὰ χρησιμοποιῆται μεγάλη πλὰξ ὡρολογίου μὲ κινητοὺς δείκτας, τὴν ὁποίαν ἠμπορεῖ νὰ κατασκευάσῃ μόνος του ὁ διδάσκαλος, καὶ τὸ ἡμερολόγιον κ.τ.λ.].

---

2. ΤΑ ΜΕΣΑ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΣ.

[Διὰ τῶν μέσων αὐτῶν, καθὼς εἴδαμεν, προσφέρονται εἰς τοὺς μαθητὰς ἄφθοναι ἀσκήσεις, κατάλληλαι πρὸς στερέωσιν τοῦ διδαχθέντος ὑλικοῦ. Ὅτι τὰ μέσα τῆς ἀσκήσεως διευκολύνουν καὶ τὸ ἔργον τοῦ διδασκάλου, ὁ ὁποῖος χάρις εἰς αὐτὰ ἐξοικονομεῖ καὶ δυνάμεις καὶ χρόνον καὶ ἠμπορεῖ νὰ συγκρατῇ καλύτερα τὴν τάξιν, εἶναι προφανές. Προφανὲς δὲ ἐπίσης εἶναι ὅτι ἰδιαιτέρως ἐπωφελὴς ἀποβαίνει ἡ χρῆσις τῶν μέσων αὐτῶν εἰς τὰ ὀλιγοτάξια καὶ μονοτάξια σχολεῖα].

Τὰ μέσα τῆς ἀσκήσεως εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν συσκευαί, τὰς ὁποίας ἠμποροῦν νὰ χειρίζωνται καὶ οἱ μαθηταί, ἀφ' ἑτέρου δὲ πίνακες ἀναρτήσεως, [τέλος δὲ βιβλία συλλογῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἐξετάσωμεν μόνον τὰ δύο πρῶτα εἴδη τῶν μέσων τῆς ἀσκήσεως, περὶ δὲ τοῦ τρίτου θὰ πραγματευθῶμεν κατωτέρω εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον.

Ἀπὸ **τὰς συσκευὰς** ἄξιαι ἰδιαιτέρας μνείας εἶναι ἐν πρώτοις

ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦνται ἀπὸ **ξυλάρια,** εἰς τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν σχεδιασμένα ἀριθμητικὰ ψηφία. Ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς συσκευὰς αὐτὰς ἔγινε ἀπὸ τὸν *Goltzsch* (Goltzsch, *Zifferstäbe* und Ziffertafeln zu Rechenübungen in den Elementarschulen, 3 ἔκδ., Berlin, 1859). Ἡ συσκευὴ τοῦ G. ἀποτελεῖται ἀπὸ στενὰ καὶ μακρὰ ξυλάρια, εἰς τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα ὑπάρχει ὡρισμένος ἀριθμὸς ἀρκετὰ μεγάλων ψηφίων, τὰ ὁποῖα κεῖνται τὸ ἕνα ὑποκάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο ὄχι κατὰ κάποιαν ἀριθμητικὴν σειράν, ἀλλὰ ἀναμίξ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ξυλάρια ἠμποροῦν νὰ τεθοῦν τὸ ἕνα κοντὰ εἰς τὸ ἄλλο κατὰ διαφόρους τρόπους, σχηματίζεται μὲ τὰ ψηφία των μεγίστη ποικιλία ἀσκήσεων. Τοῦ ἰδίου τύπου εἶναι καὶ ἡ συσκευὴ τοῦ *Kohlstock* (Aufgabenstreifen, Wiesbaden, Behrend, 1889, 6 μ., μὲ πίνακα 7 μ.).

Ὡς ξυλάρια, ὅπως εἶναι τὰ ἀνωτέρω περιγραφέντα, ἀλλὰ συνενωμένα εἰς ἕνα ἑνιαῖον σύνολον ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ***οἱ πίνακες τῶν ἀριθμητικῶν ψηφίων***, τῶν ὁποίων ἡ εἰσαγωγὴ ὀφείλεται ἐπίσης εἰς τὸν *Goltzsch*, (Goltzsch, Zifferstäbe und *Ziffertafeln* κ.τ.λ.). Τέτοιοι πίνακες ἠμποροῦν νὰ κατασκευασθοῦν διάφοροι καὶ πρὸς διαφόρους εἰδικοὺς σκοπούς. Παραθέτομεν ἀμέσως κατωτέρω ἕνα τέτοιον πίνακα, παραλαμβάνοντες αὐτὸν ἀπὸ τὸν *B. Hartmann* (ὅπ. ἀν., σ. 397 καὶ τεῦχ. 1 τῆς συλλογῆς προβλημάτων τοῦ ἰδίου). Ὁ πίναξ αὐτός, ἀποτελῶν ἕνα μεγάλον τετράγωνον χωρισμένον εἰς 100 τετραγωνίδια, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν οἱ ἀριθμοὶ 1—100 ἀναμίξ, δίδει ἀσκήσεις δι' ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις εἰς τὴν σειρὰν 1—100.

9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
20	18	16	14	12	19	17	15	13	11
27	25	23	21	30	28	26	24	22	29
38	36	34	32	39	37	35	33	31	40
45	43	41	50	48	46	44	42	49	47
56	54	52	59	57	55	53	51	60	58
63	61	70	68	66	64	62	69	67	65
74	72	79	77	75	73	71	80	78	76
81	90	88	86	84	82	89	87	85	83
92	99	97	95	93	91	100	98	96	94

Ὑποδεικνύομεν ἐδῶ μόνον τὰς ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, τὰς ὁποίας ἠμπορεῖ νὰ δώσῃ ὁ πίναξ αὐτὸς (Hartmann, ὅπ. ἀνωτ.). Α) **Ἀσκήσεις προσθέσεως.** α) Εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν κάθε (ὁριζοντίας) σειρᾶς ἠμπορεῖ νὰ προστεθῇ ὁ καθεὶς ἀπὸ τοὺς λοιποὺς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς (9 προβλήματα εἰς κάθε σειράν). Παραδείγματα: 9+7, 9+5 κ. τ. λ., 20+18, 20+16 κ.τ.λ. β) Εἰς τὸν δεύτερον ἀριθμὸν κάθε (ὁριζοντίας) σειρᾶς ἠμπορεῖ νὰ προστεθῇ ὁ καθεὶς ἀπὸ τοὺς ἀκολούθους ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς (8 προβλήματα εἰς κάθε σειράν). Παραδείγματα: 7+5, 7+3 κ.τ.λ., 18+16, 18+14 κ.τ.λ. γ) Ἠμποροῦν νὰ προστεθοῦν ἀπὸ 3 ἀλλεπάλληλοι ἀριθμοὶ κάθε (ὁριζοντίας) σειρᾶς (8 προβλήματα εἰς κάθε σειράν). Παραδείγματα: 9+7+5, 7+5+3 κ.τ.λ. Β) **Ἀσκήσεις ἀφαιρέσεως.** α) Κάθε ἀριθμὸς τῆς πρώτης ὁριζοντίας σειρᾶς ἠμπορεῖ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ κάθε ἀκόλουθον ἀριθμὸν τῆς καθέτου σειρᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει (9 προβλήματα εἰς κάθε κάθετον σειράν) Παραδείγματα: 20—9, 27—9, 38—9 κ.τ.λ., 18 7, 25—7, 36—7 κ.τ.λ., 16—5, 23—5, 34—5 κ.τ.λ. β) Κάθε ἀριθμὸς τῆς δευτέρης ὁριζοντίας σειρᾶς ἠμπορεῖ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ κάθε ἀκόλουθον ἀριθμὸν τῆς καθέτου σειρᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει (8 προβλήματα εἰς κάθε κάθετον σειράν). Παραδείγματα: 27—20, 38—20, 45—20 κ.τ.λ., 25—18, 36—18, 43—18 κ.τ.λ., 23—16, 34—16, 41 16 κ.τ.λ. γ) Τὸ ἴδιον ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ μὲ κάθε ἀριθμὸν τῶν ἀκολούθων ὁριζοντίων σειρῶν. Γ) **Ἀσκήσεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.** α) Εἰς κάθε ἀριθμὸν τῆς τρίτης ὁριζοντίας σειρᾶς ἠμπορεῖ νὰ προστεθῇ ὁ ἀντίστοιχος τῆς δευτέρης, ἀπὸ δὲ τὸ ἄθροισμά των νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀντίστοιχος τῆς πρώτης. Παραδείγματα: 27+20—9, 25+18—7, 23+16—5 κ.τ.λ. β) Τὸ ἴδιον ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ μὲ τὴν τέταρτην, τρίτην καὶ δεύτερην σειρὰν κ. οὕτ. καθ.

Ἕνας τέτοιος πίναξ, ὅπως παρατηρεῖ ὁ Hartmann, ἠμπορεῖ νὰ ἀποβῇ ἀνεξάντλητη πηγὴ ἀσκήσεων καὶ νὰ διευκολύνῃ ἔτσι σημαντικώτατα τὸ ἔργον τοῦ διδασκάλου, ὁ ὁποῖος πρέπει μόνον νὰ ἔχῃ ὑπ' ὄψει του, ὅτι ὀφείλει νὰ ἐκλέγῃ ἁπλοῦς συνδυασμοὺς τῶν ψηφίων καὶ νὰ χρησιμοποιῇ τὸν πίνακα κατάλληλα διὰ κάθε ἀριθμητικὴν πρᾶξιν. Ἐν τούτοις δὲν κρίνει ἄσκοπον ὁ ἴδιος Μεθοδικὸς νὰ συστήσῃ εἰς τοὺς διδασκάλους, ὅπως

ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἰδιαιτέρας ἀνάγκας τῆς τάξεώς των καταρτίζουν μόνοι των τέτοιους πίνακας, ἀνταποκρινομένους εἰς τὰς ἀνάγκας αὐτάς.

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω πινάκων ἀριθμητικῶν ψηφίων, οἱ ὁποῖοι ἠμποροῦν νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς **σταθεροί,** ὑπάρχουν καὶ **κινητοὶ** τέτοιοι πίνακες, ἀπὸ τοὺς ὁποίους γνωστότατος εἶναι ὁ τοῦ *Dürre* (Dürre, Die schiebbare Ziffertafel, Darmstadt, 1863). Παραλαμβάνοντες ἀπὸ τὸν Hartmann (ὅπ. ἀνωτ., σελ. 399) παραθέτομεν τὴν σύνθεσιν τῶν ψηφίων τοῦ πίνακος τοῦ Dürre, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἀκολούθως:

2	4	6	8	3	5	7	9
3	5	7	9	2	4	6	8
4	6	8	2	5	7	9	3
5	7	9	3	4	6	8	2
6	8	2	4	7	9	3	5
7	9	3	5	6	8	2	4
8	2	4	6	9	3	5	7
9	3	5	7	8	2	4	6
1	1	1	1	0	0	0	0

Ὁ λόγος τῆς ὡς ἀνωτέρω κατανομῆς τῶν ψηφίων εἰς κάθε σειρὰν εἶναι καταφανής. Ἐπειδὴ τὰ ξυλάρια, τὰ φέροντα τοὺς ἀριθμοὺς κάθε ὁριζοντίας σειρᾶς, ἠμποροῦν νὰ μετακινοῦνται ἐπὶ αὐλάκων εἴτε πρὸς τὰ δεξιὰ εἴτε πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν ψηφίων ἀποβαίνει μέγιστος.

Παραλλαγμένον εἶδος τῶν πινάκων τῶν ψηφίων εἶναι τὸ **ἀριθμητικὸν ὡρολόγιον** τοῦ *Eigemann,* κατ' ἀναλογίαν μὲ τὸ ὁποῖον ἔχουν κατασκευασθῇ καὶ ἄλλα, ὅπως τὸ τοῦ *Göttsch* (Rechenuhr zur Einprägung und Wiederholung der vier Grundrechnungsarten auf dem Wege des Kopfrechnens, Kiel, 6 μ.). Τὸ ἀριθμητικὸν ὡρολόγιον συνίσταται ἀπὸ ἕνα πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι τυπωμένα τὰ ψηφία εἰς ἀρκετὸν μέγεθος, διὰ νὰ βλέπωνται ἀπὸ ὅλους τοὺς μαθητὰς τῆς τάξεως, καὶ ἀπὸ 2 δείκτας, δι' ἁπλῆς μετακινήσεως τῶν ὁποίων σχηματίζονται ἀναρίθμητα προβλήματα].

Οἱ δὲ **πίνακες τῆς ἀναρτήσεως** περιλαμβάνουν πολλὰς σειρὰς ἀσκήσεων, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται συνήθως εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—100 καὶ εἶναι προσιταὶ εἰς τὰ ὄμματα ὅλων συγχρόνως τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως, οἱ ὁποῖοι τὰς λύουν εἴτε ἀπὸ μνήμης εἴτε ἐγγράφως. Τέτοιοι πίνακες ἔχουν ἐκδοθῆ π. χ. ἀπὸ τοὺς Böhme, Büttner, Fix, Kaselitz, Löser, Menzel—Scheinert, Magnus, Scherer καὶ ἄλλους.

Ὡς πρὸς τὰ μέσα ἐν γένει τῆς ἐποπτείας καὶ τῆς ἀσκήσεως ἴδ. καὶ τὰ ἀκόλουθα ἔργα: *Tanck*, Das Zählen und erste Rechnen, Kiel, 1906. — *Knilling*, Zur Reform des Rechenunterrichts, München, Ackermann, 1 τόμ. 1884, 2 τόμ. 1886.— *Schubert*, Zählen und Zahl, Eine kulturgeschichtliche Studie, Hamburg, Richter, 1887.—*Beetz*, Das Typenrechnen, Halle, Schroedel, 1899.—*Beetz*, Das Wesen der Zahl, Leipzig, Kröner, 1897.—*Schneider*, Die Zahl im grundlegenden Rechenunterricht, Berlin, Reuther u. Reichard, 1900.—*Fährmann*, Die Veranschaulichung im Rechnen nach der rhythmischen Zählmethode, Plauen in V., Kell, 1902.—*Knoche*, Der Rechenunterricht auf der Unterstufe, Arnsberg, Stahl, 1899.—*Hartmann*, Der Rechenunterricht, Leipzig καὶ Frankfurt a. M., Kesselring.—*Lay*, Führer durch den ersten Rechenunterricht, 3 ἐκδ., 1914, Leipzig, Quelle u. Meyer. - *Grass*, Die Gruppenzahlbilder, München, Kellerer, 1890, ἰδίως δὲ *Hübner*, Die Apparate für instrumentales Rechnen und die wichtigsten Rechenapparate für den Schulengebrauch κ.τ.λ., Breslau, 1898 καὶ *Schroeder*, Die Rechenapparate der Gegenwart, Magdeburg, Friese u. Fuhrmann, 1901.

VII. ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ Η ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ ΤΩΝ.

ΑΙ 4 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤ. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ[1].

Τὰς ἐννοίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν σχηματίζομεν ἀρχικά, καθὼς εἴδαμεν, διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως ὁμοειδῶν ἀκεραίων ἀντικειμένων, τὰ ὁποῖα ὑποπίπτουν εἰς τὴν ἀντίληψίν μας. Οἱ τοιουτοτρόπως σχηματιζόμενοι ἀκέραιοι ἀποτελοῦν μίαν ἀτέρμονα, ἀλλὰ φυσικὴν σειράν, τῆς ὁποίας θεμελιῶδες μὲν μέλος εἶναι τὸ πρῶτον, ἤτοι ἡ ἀκεραία μονάς, κάθε δὲ ἄλλο μέλος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἀμέσως προηγούμενόν του καὶ τὴν μονάδα.

Εἰς τὴν ἀτέρμονα αὐτὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων εἰσάγεται τάξις, καθόσον ἡ σειρὰ διατάσσεται κατὰ ἕνα ὡρισμένον σύστημα. Ἕνα τέτοιον σύστημα εἶναι, καθὼς ἠξεύρομεν, καὶ τὸ δεκαδικόν, τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα. Σύμφωνα μὲ αὐτό, καθὼς εἴδαμεν, ἀνὰ 10 κατώτεραι μονάδες συνενώνονται εἰς μίαν μονάδα ἀνωτέρας τάξεως, αἱ 10 ἁπλαῖ μονάδες εἰς τὴν δεκάδα, αἱ 10 δεκάδες εἰς τὴν ἑκατοντάδα κ. οὕτ. καθ. Ἔτσι μόνον οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἁπλῶν μονάδων 1—10 σχηματίζονται καὶ παριστάνονται ὡς σχετικὰ ἁπλοῖ ἀριθμοί, ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι σχηματίζονται καὶ παριστάνονται ὡς σύνθετοι, ὡς ἀποτελούμενοι δηλαδὴ ἀπὸ τὴν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τάξεώς των ἢ πολλαπλάσιόν της καὶ μονάδας μιᾶς ἢ περισσοτέρων κατωτέρων τάξεων. Χάρις εἰς τὸ ἴδιον σύστημα τὰ ὀνόματα τῶν ἀπείρων ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα θὰ ἦσαν ἄπειρα, κατορθώνεται νὰ σχηματίζωνται μὲ τὴν σύνθεσιν 13 μόνον ἁπλῶν ἀριθμητικῶν ὀνομάτων, ἤτοι τῶν: ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, ἕξι, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, δέκα, ἑκατόν, χίλια καὶ ἑκατομμύριον.

Ἐπειδὴ τώρα πρὸς ἔγγραφον παράστασιν τοῦ δεκαδικοῦ μας ἀριθμητικοῦ συστήματος ἐφαρμόζομεν τὸν θεσιαρχικὸν τρόπον τῆς γραφῆς, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον κάθε ψηφίον ἔχει διπλῆν ἀξίαν, μίαν ἀπόλυτον καὶ ἀμετάβλητον καὶ μίαν σχετικὴν καὶ

[1] Πρβ. Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 1, σελ. 45 κ. ἀκ. καὶ μέρος 2 σελ. 46 καὶ ἀκ.

μεταβλητήν, ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς θέσεώς του, φανερώνει δὲ δι' αὐτὸ ὄχι μόνον πλῆθος, ἀλλὰ καὶ εἶδος μονάδων, δι' αὐτὸ κατορθώνεται, ὅπως ηὑρομεν, ὥστε καὶ ἡ γραφὴ ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν νὰ γίνεται μὲ 10 μόνον ψηφία, ἤτοι τὰ 9 καθαυτὸ ψηφία (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) καὶ τὸ βοηθητικὸν 0, τὸ ὁποῖον φανερώνει ἔλλειψιν μονάδων μιᾶς τάξεως.

Ἡ ἀπαρίθμησις, μὲ τὴν ὁποίαν σχηματίζονται ἀρχικὰ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, εἶναι ἕνας τρόπος τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων, ἡ ὁποία πάλιν δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, ὡς γνωστόν, παρὰ ὁ σχηματισμὸς νέων ἀκεραίων ἀπὸ δοθέντας. Ἐκτὸς τῆς ἀπαριθμήσεως, ἡ ὁποία, ὅπως ηὑρομεν, εἶναι μία συντομευμένη πρόσθεσις τῆς μονάδος, ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι τρόποι τῆς ἀριθμήσεως. Εἶναι δὲ οἱ τρόποι αὐτοὶ ἡ κανονικὴ πρόσθεσις μιᾶς ἢ περισσοτέρων μονάδων, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις. Ἀπὸ τοὺς τρόπους αὐτούς, οἱ ὁποῖοι λέγονται καὶ ***θεμελιώδεις πράξεις τῆς ἀριθμήσεως***, ἡ μὲν πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς συνίστανται εἰς ***ἄνοδον*** εἰς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων, ἡ δὲ ἀφαίρεσις καὶ ἡ διαίρεσις εἰς ***κάθοδον*** εἰς τὴν ἰδίαν σειράν.

Εἰς τὴν ***πρόσθεσιν*** αὐξάνομεν τὰς μονάδας ἑνὸς δοθέντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ἄλλος δοθεὶς ἀκέραιος, ἤτοι ἀπὸ ἕνα δοθὲν μέλος τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων ἀνερχόμεθα εἰς αὐτὴν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ἄλλος δοθεὶς ἀκέραιος, ἔτσι δὲ φθάνομεν εἰς νέον ἀνώτερον μέλος τῆς σειρᾶς.

Τὸ ἐναντίον γίνεται εἰς τὴν ***ἀφαίρεσιν***, εἰς τὴν ὁποίαν ἐλαττώνομεν τὰς μονάδας ἑνὸς δοθέντος ἀκεραίου κατὰ τόσας, ὅσας περιέχει ἄλλος δοθεὶς ἀκέραιος, ἤτοι ἀπὸ ἕνα δοθὲν μέλος τῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων κατερχόμεθα εἰς αὐτὴν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ἄλλος δοθεὶς ἀκέραιος, ἔτσι δὲ φθάνομεν εἰς κατώτερον μέλος τῆς σειρᾶς.

Ἡ πρόσθεσις εἶναι προφανῶς ἡ πρωταρχικὴ θεμελιώδης πρᾶξις, προϋποθετομένη καὶ ἀπὸ αὐτὴν ἀκόμη τὴν ἀφαίρεσιν, ἡ δὲ πρόσθεσις τῆς μονάδος εἶναι ἡ πρωταρχικὴ πρόσθεσις. Ἡ ***ἀνιοῦσα ἀπαρίθμησις***, μὲ τὴν ὁποίαν, καθὼς εἴδαμεν, σχηματίζονται ἀρχικὰ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, ἐπαναλαμβάνομεν, παρὰ ***συντομευμένη πρόσθεσις τῆς μονάδος***, ὅπως ἐξ ἄλλου ἡ ***κατιοῦσα ἀπαρίθμησις*** δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ***συντομευμένη ἀφαίρεσις τῆς μονάδος***.

Ὁ ***πολλαπλασιασμὸς*** δὲν εἶναι ***ἀρχικὴ*** θεμελιώδης πρᾶξις, ἀλλὰ ***παράγωγος***, προερχομένη ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν. Εἶναι ἕνα εἶδος προσθέσεως καὶ ὡρισμένως ἡ πρόσθεσις ὁμοίων προσθετέων ($3+3+3+3=3\times4$). Ὅταν λέγωμεν, ὅτι πολλαπλασιάζομεν τὸν 3 ἐπὶ 4, δὲν νοοῦμεν τίποτε ἄλλο παρὰ ὅτι θέτομεν τὸν πρῶτον ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους αὐτούς, ἤτοι τὸν 3, τόσας φορὰς ὡς προσθετέον, ὅσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει ὁ δεύτερος, ἤτοι ὁ 4. Ἡ μόνη διαφορά, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς καθαυτὸ προσθέσεως καὶ τῆς προσθέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι ὅτι ἡ τελευταία γίνεται σύντομα, εἶναι δηλ. ***πρόσθεσις συντομευμένη***. Φυσικὰ δὲ καὶ οἱ μαθηταὶ ὡς πρόσθεσιν συντομευμένην πρέπει νὰ γνωρίσουν τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ νὰ τὸν νοοῦν πάντοτε ἔτσι.

Ἡ ***διαίρεσις*** παρουσιάζεται, καθὼς εἶναι γνωστόν, ὑπὸ 2 μορφάς, τὴν μορφὴν δηλ. ***τῆς μετρήσεως***, κατὰ τὴν ὁποίαν μετροῦμεν, πόσας φορὰς ἕνας δοθεὶς ἀκέραιος περιέχεται εἰς ἄλλον δοθέντα ἀκέραιον, καὶ τὴν μορφὴν τοῦ ***μερισμοῦ***, κατὰ τὴν ὁποίαν μερίζομεν ἕνα δοθέντα ἀκέραιον εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας περιέχει ἄλλος δοθεὶς ἀκέραιος, καὶ δηλοῦμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς μέρους. Καὶ τὰ δύο εἴδη αὐτὰ τῆς διαιρέσεως συγγενεύουν στενώτατα καὶ μὲ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ μὲ τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἂς ἴδωμεν πρῶτα τὴν σχέσιν των μὲ ***τὴν ἀφαίρεσιν***.

Ἂς λάβωμεν κατ' ἀρχὰς ἕνα πρόβλημα ***μετρήσεως***, π. χ. τὸ πρόβλημα «πόσας φορὰς χωροῦν 2 μέτρα εἰς τὰ 8 μέτρα ;». Προφανῶς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ πρόβλημα τῆς ἀφαιρέσεως «πόσας φορὰς ἠμποροῦμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ 2 μέτρα ἀπὸ τὰ 8 μέτρα ;». Εἶναι δηλ. ἡ μέτρησις ***ἐπαναληπτικὴ ἀφαίρεσις*** τοῦ ἰδίου δοθέντος ἀκεραίου (τοῦ ἀφαιρετέου) ἀπὸ ἄλλον δοθέντα ἀκέραιον (τὸν μειωτέον), ὁριζομένη ἀκριβέστερα μὲ τὸ ἐρώτημα «πόσας φορὰς ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις αὐτή;» ἢ ἀλλέως εἶναι ἀφαίρεσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἀπὸ ἕνα δοθέντα ἀκέραιον ἀφαιροῦμεν ἄλλον δοθέντα κατ' ἐπανάληψιν καὶ ὡρισμένως τόσας φοράς, ὅσας εἶναι δυνατόν.

Ἂς λάβωμεν τώρα ἕνα πρόβλημα ***μερισμοῦ***, π. χ. τὸ πρόβλημα «μοιράζομεν 9 πέννες εἰς 3 παιδιά· πόσες πέννες θὰ πάρῃ τὸ καθένα ;». Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἰσοδυναμεῖ προφανῶς μὲ τὸ πρόβλημα «πόσες πέννες ἠμπορῶ νὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τὶς 9 πέννες 3 φοράς ;». Εἶναι δηλ. ὁ μερισμὸς ***ἐπαναληπτικὴ ἀφαίρεσις*** ἀπὸ ἕνα δοθέντα ἀκέραιον (τὸν μειωτέον), εἰς τὴν ὁποίαν δίδεται μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀφαιρέσεων, ζητεῖται δὲ τὸ μέγεθος τοῦ ἀφαιρετέου.

Ἡ διαίρεσις ἑπομένως καὶ κατὰ τὰς 2 της μορφὰς εἶναι ἀφαίρεσις, καὶ ὡρισμένως ***ἀφαίρεσις συντομευμένη***, ὅπως ἐξ ἀντιθέτου ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι συντομευμένη πρόσθεσις.

Ἄς ἴδωμεν τώρα καὶ τὴν σχέσιν τῶν 2 εἰδῶν τῆς διαιρέσεως μὲ ***τὸν πολλαπλασιασμόν.***

Εἰς ***τὴν μέτρησιν*** δίδονται τὸ γινόμενον καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, ζητεῖται δὲ ὁ πολλαπλασιαστής. Ἔτσι ἀπὸ τὸ πρόβλημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ «2 μέτρ. $\times 4 = 8$ μ.» γεννᾶται τὸ πρόβλημα τῆς μετρήσεως «πόσας φορὰς χωροῦν τὰ 2 μ. εἰς τὰ 8 μ ;» ἢ μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς «πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 2 εἰς τὸν 8 ;», τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρόβλημα «πόσας φορὰς πρέπει νὰ λάβω τὸν 2, διὰ νὰ κάμω τὸν 8;».

Εἰς ***τὸν μερισμὸν*** δίδονται τὸ γινόμενον καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, ζητεῖται δὲ ὁ πολλαπλασιαστέος. Ἔτσι ἀπὸ τὸ πρόβλημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ «3 πέννες $\times 3 = 9$ π.» γεννᾶται τὸ πρόβλημα τοῦ μερισμοῦ «πόσες πέννες θὰ ἔχωμεν, ἂν διαιρέσωμεν 9 π. : 3 ;», ἢ μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς «πόσον κάμνει 9 : 3 ;», τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρόβλημα «ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ λάβω 3 φοράς, διὰ νὰ κάμω τὸν 9 ;».

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω καταφαίνεται, ὅτι ἡ διαίρεσις καὶ εἰς τὰς 2 της μορφὰς εἶναι συγχρόνως καὶ ***ἀντιστροφὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.***

Ἐννοεῖται τώρα, ὅτι οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ γνωρίσουν τὴν διαίρεσιν καὶ νὰ τὴν νοοῦν εἰς τὴν σχέσιν της τόσον μὲ τὸν πολλαπλασιασμόν, ὅσον καὶ μὲ τὴν ἀφαίρεσιν.

Ἐν σχέσει τώρα μὲ ***τὴν ἀφαίρεσιν*** ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἀκόλουθα. Ἡ ἀρχική της ἔννοια, τὴν ὁποίαν εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἀπαιτεῖ, ὅπως δοθὲν ποσὸν μονάδων ἐλαττώνεται

κατ' ἄλλο ποσὸν μονάδων, ἐπίσης δοθέν, ἤτοι ὅπως ἀπὸ δοθὲν μέλος τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων, τὸν μειωτέον, γίνεται κάθοδος εἰς αὐτὴν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ἄλλος δοθεὶς ἀκέραιος, ὁ ἀφαιρετέος. Σύμφωνα μὲ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν τὸ πρόβλημα τῆς ἀφαιρέσεως $10-7=\times$ βασίζεται εἰς τὸ πρόβλημα τῆς προσθέσεως $\times+7=10$. Διατί $10-7=3$; Διότι $3+7=10$.

Ἡ ἀφαίρεσις ὅμως ἠμπορεῖ νὰ νοηθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Ἠμπορεῖ δηλ. νὰ νοηθῇ καὶ ὡς ***συμπλήρωσις*** ἑνὸς δοθέντος ἀκεραίου μὲ τόσας μονάδας, ὅσαι ἀπαιτοῦνται, διὰ νὰ σχηματισθῇ ἕνας ἄλλος δοθεὶς ἀκέραιος. Μὲ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον ἀνερχόμεθα εἰς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων τόσον, ὥστε νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν μειωτέον, καὶ παρατηροῦμεν, πόσαι μονάδες ἔλειπαν ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἔπρεπε νὰ προστεθοῦν εἰς αὐτόν, διὰ νὰ γίνῃ ὁ μειωτέος. Διὰ νὰ κάμωμεν π. χ. τὴν ἀφαίρεσιν $10-7$, δὲν σκεπτόμεθα «10 ἔξω $7=3$», ἀλλὰ «7 ἕως τὸ $10=3$. Λοιπὸν $10-7=3$» ἢ ἁπλούστερα ἀκόμη «$7+3=10$, λοιπὸν $10-7=3$». Προφανὲς τώρα εἶναι, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις μὲ τὴν ἔννοιαν αὐτήν, ἡ ὁποία φυσικὰ δὲν εἶναι ἀρχική, ὅπως ἡ ἄλλη ἔννοια τῆς ἀφαιρέσεως, ἀλλὰ παράγωγος, δὲν εἶναι πράγματι ***ἀφαίρεσις***, ἀλλὰ ***πρόσθεσις***. Μᾶς φέρει μόνον ἐμμέσως εἰς τὴν διαφοράν, ἀμέσως δὲ μᾶς φέρει εἰς τὸν μειωτέον, ἐνῷ ἡ ἀφαίρεσις μὲ τὴν ἀρχικὴν ἔννοιαν μᾶς φέρει ἀμέσως εἰς τὴν διαφοράν. Τὸ πρόβλημα τῆς ἀφαιρέσεως $10-7=\times$ βασίζεται καὶ κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς πρόβλημα προσθέσεως, ἀλλ' ὄχι ὅπως εἰς τὴν ἄλλην εἰς τό : $\times + 7 = 10$, ἀλλ' εἰς τὸ ἀντίστροφον : $7 + \times = 10$. Διατί $10-7=3$; Διότι $7+3=10$.

Ἡ ἀφαίρεσις μὲ τὴν νέαν αὐτὴν ἔννοιαν ἠμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ «συμπληρωτικὴ» ἢ «προσθετικὴ» ἀφαίρεσις. Συνήθως ὀνομάζεται «Αὐστριακὴ ἀφαίρεσις» ἢ «ἀφαίρεσις μὲ τὸν Αὐστριακὸν τρόπον ἢ τὴν Αὐστρ. μέθοδον», διότι γίνεται ἀπὸ πολλοῦ γενικὴ σχεδὸν χρῆσίς της εἰς τὰ σχολεῖα τῆς Αὐστρίας. Ἡ ἀφαίρεσις αὐτὴ ἔχει κερδίσει κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους ἀρκετὸν ἔδαφος καὶ εἰς τὰ ἀνώτερα σχολεῖα τῆς Γερμανίας, ἐνῷ ἀπεναντίας δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὰ κατώτερα. Οἱ Μεθοδικοὶ *Sachse* καὶ *Grosse* τάσσονται ὑπὲρ τῆς εἰσαγωγῆς της καὶ εἰς τὰ σχολεῖα αὐτά. Ὁ *Hartmann* τὴν διδάσκει εἰς τὴν ἀνωτέραν μόνον βαθμίδα τοῦ δημ. σχολείου, ἐνῷ εἰς τὰς ἄλλας διδάσκει τὴν ἀφαίρεσιν μὲ τὴν ἀρχικὴν ἔννοιαν. Ὁ *Kühnel* εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἠμποροῦν καὶ τὰ 2 εἴδη τῆς ἀφαιρέσεως νὰ διδάσκωνται εἰς ὅλας τὰς βαθμίδας τοῦ κατωτέρου σχολείου, ὁ δὲ *K. Teupser* κάμνει ἀποκλειστικὴν χρῆσιν τῆς συμπληρωτικῆς. Ποία εἶναι ἡ γνώμη μας περὶ τῆς χρήσεως τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῆς εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον, θὰ ἐκθέσωμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος τοῦ παρόντος ἔργου].

VIII. ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ Η ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ ΤΩΝ[1].

[I. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ.

Ἕως τώρα ὡμιλούσαμεν δι' ἕνα εἶδος ὡρισμένων ἀριθμῶν, ἤτοι διὰ τοὺς ἀκεραίους. Ἐκτὸς ὅμως αὐτῶν ὑπάρχει καὶ ἄλλο εἶδος ὡρισμένων ἀριθμῶν, **τὰ κλάσματα,** εἰς τῶν ὁποίων τὴν ἐξέτασιν ἐρχόμεθα τώρα.

Ὅπως τὰς ἐννοίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τὰς σχηματίζομεν ἀρχικὰ λαμβάνοντες ἀφορμὴν ἀπὸ ἀκέραια ἀντικείμενα ὑποπίπτοντα εἰς τὴν ἀντίληψίν μας, ἔτσι καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ κλάσματος τὴν σχηματίζομεν ἀρχικὰ λαμβάνοντες ἀφορμὴν ἀπὸ τὰ ἴσα κομμάτια, εἰς τὰ ὁποῖα δι' ὁποιονδήποτε λόγον ἔχει μερισθῆ ἕνα τέτοιο ἀκέραιον ἀντικείμενον. Αὐτὸ φαίνεται ἄλλωστε καὶ ἀπὸ αὐτὴν τὴν λέξιν **κλάσμα**, ἡ ὁποία σημαίνει κομμάτι, τεμάχιον. Κλάσματα εἶναι τὰ τεμάχια, εἰς τὰ ὁποῖα μερίζεται κάθε ἀκέραιον πρᾶγμα, τοῦ ὁποίου τὸν μερισμὸν ἀπαιτεῖ ὁ πραγματικὸς βίος.

Ἕνα ὁποιονδήποτε ἀπὸ τὰ ἴσα τεμάχια, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει μερισθῆ ἕνα ἀκέραιον ἀντικείμενον, μία ἀκεραία μονάς, ἠμπορεῖ πάλιν νὰ θεωρηθῇ ὡς **μονάς**, ἀλλὰ φυσικὰ ὡς μονὰς κατωτέρας τάξεως ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν. Ἂν π. χ. τὸ ἀντικείμενον ἔχῃ μερισθῆ

[1] Τὸ κεφάλαιον αὐτὸ ἔχει διασκευασθῆ σύμφωνα μὲ τὰ διδασκόμενα ἀπὸ τὸν Räther (ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σελ. 175 κ. ἀκ., μέρ. 3, σελ. 10 κ. ἀκ., σ. 18 κ. ἀκ., σελ. 26 κ. ἀκ., σελ. 33 κ. ἀκ., σελ. 37 κ. ἀκ.).

εἰς 4 ἴσα τεμάχια, ὁποιονδήποτε ἀπὸ τὰ τεμάχια αὐτά, ποὺ εἶναι τὸ ἕνα τέταρτον τοῦ ἀντικειμένου, ἠμπορεῖ πάλιν νὰ θεωρηθῇ ὡς μονάς. Διότι διὰ τὴν συνήθη ἀντίληψιν ἡ ἔννοια τῆς μονάδος εἶναι **σχετική**· καθετί, ποὺ προκαλεῖ εἰς αὐτὴν μίαν ἑνιαίαν πνευματικὴν εἰκόνα, μίαν ἑνιαίαν καθολικὴν παράστασιν, τὸ θεωρεῖ ὡς μονάδα. Ὅπως θεωρεῖ ὡς μονάδα, μονάδα ὅμως ἀνωτέρας τάξεως, τὴν δωδεκάδα (π. χ. τῶν μανδηλίων, τῶν προσοψίων κ.τ.λ.), διότι ἀποτελεῖ μίαν ἑνότητα, ἔτσι θεωρεῖ ὡς μονάδα καὶ τὸ ἕνα τέταρτον, ἀφοῦ καὶ αὐτὸ εἶναι **ἕνα** πρᾶγμα. Ἐφόσον δὲ τὸ ἕνα τέταρτον θεωρεῖται ὡς μονάς, ἐννοεῖται, ὅτι τὰ τέταρτα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει μερισθῆ τὸ ἀκέραιον ἀντικείμενον, ἠμποροῦν **νὰ ἀπαριθμηθοῦν** ἀκριβῶς ἔτσι, ὅπως ἀπαριθμοῦνται τὰ ἀκέραια ἀντικείμενα. Τοιουτοτρόπως ὅμως σχηματίζεται μία νέα ἀριθμητικὴ σειρά, **μία σειρὰ κλασμάτων** ἢ **κλασματική,** τῆς ὁποίας θεμελιῶδες στοιχεῖον εἶναι τὸ ἕνα τεμάχιον, τὸ ἕνα τέταρτον καὶ ἡ ὁποία ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς: ἕνα τέταρτον, δύο τέταρτα, τρία τέταρτα, τέσσερα τέταρτα. Ἐπειδὴ δὲ φυσικὰ θὰ ἠμποροῦσε τὸ ἀκέραιον ἀντικείμενον, ἀντὶ νὰ κοπῇ εἰς 4 ἴσα τεμάχια, νὰ κοπῇ εἰς 2, 3... 10 κ.τ.λ. καὶ ἔτσι τὸ ἕνα τεμάχιόν του, ἀντὶ νὰ εἶναι ἕνα τέταρτον, νὰ εἶναι ἕνα δεύτερον, ἕνα τρίτον... ἕνα δέκατον κ.τλ.., ἐννοεῖται, ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν κλασματικὰς σειρὰς καὶ τῶν δευτέρων (ἕνα δεύτερον, δύο δεύτερα) καὶ τῶν τρίτων (ἕνα τρίτον, δύο τρίτα, τρία τρίτα)... καὶ τῶν δεκάτων κ.τ.λ. Ὑπάρχουν δηλαδὴ τόσαι κλασματικαὶ σειραί, ὅσοι καὶ διαιρέται τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἤτοι ἄπειραι. Ἡ πρώτη λέξις τῆς ἐπωνυμίας κάθε κλάσματος κάθε σειρᾶς καλεῖται **ἀριθμητής,** διότι μᾶς φανερώνει **τὸν ἀριθμὸν** τῶν μετρηθέντων τεμαχίων· ἡ δεύτερη λέξις καλεῖται **παρονομαστής,** διότι μᾶς φανερώνει **τὸ ὄνομα,** τὸ εἶδος τῶν τεμαχίων. Κατὰ τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν μελῶν τῆς σειρᾶς μεταβάλλεται φυσικὰ μόνον ὁ ἀριθμητής, ὄχι δὲ καὶ ὁ παρονομαστής. Ἡ διὰ τοῦ νοῦ παράστασις καὶ ἡ προφορικὴ ἐξαγγελία ἑνὸς μόνον τεμαχίου (ἑνὸς τετάρτου, ἑνὸς δεκάτου) μᾶς δίδουν **τὴν κλασματικὴν μονάδα** ἢ **τὸ θεμελιῶδες κλάσμα τῆς σειρᾶς,** ἡ δὲ παράστασις καὶ ἐξαγγελία περισσοτέρων τέτοιων τεμαχίων μᾶς δίδουν **τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν** ἢ **τὸ παράγωγον κλάσμα.** Τὸ μὲν θεμελιῶδες κλάσμα κάθε σειρᾶς ἔχει ἀριθμητὴν τὸν ἀριθμὸν 1, κάθε δὲ παράγωγον ἕνα ἀκέραιον ὁ ὁποῖος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 1.

Μὲ αὐτὸν λοιπὸν τὸν τρόπον σχηματίζομεν ἀρχικὰ τὴν ἔννοιαν τῶν κλασμάτων. Δι᾽ αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς καὶ ἀντιλαμβανόμεθα κάθε κλάσμα: 1) ὡς ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει ***ἕνα περισσότερα ἀπὸ*** ὡρισμένα καὶ ***συγκεκριμένα ἴσα τεμάχια*** καὶ 2) ὡς ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει ***ἀπὸ τὸν μερισμὸν ἑνὸς μόνον ἀκεραίου ἀντικειμένου,*** μιᾶς μόνον ἀκεραίας μονάδος, εἰς τέτοια τεμάχια. Ἔτσι μὲ τὸ ἕνα τέταρτον παριστάνομεν ***ἕνα τεμάχιον,*** μὲ τὰ τρία τέταρτα ***τρία τεμάχια,*** κ. τ. λ. Ἐξ ἄλλου τὸ ἕνα τέταρτον τὸ ἀντιλαμβανόμεθα ὡς ***ἐξαγόμενον,*** ὡς ***πηλίκον*** τοῦ μερισμοῦ ***τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος*** εἰς 4 ἴσα μέρη, ἤτοι ὡς ἐξαγόμενον τοῦ μερισμοῦ 1 : 4· ἐπίσης τὰ τρία τέταρτα τὰ ἀντιλαμβανόμεθα ὡς πηλίκον τοῦ ἴδιου μερισμοῦ 1 : 4, τὸ ὁποῖον ὅμως πρέπει νὰ ληφθῇ 3 φοράς, ἤτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ 3, δηλαδὴ ὡς ἐξαγόμενον τοῦ $(1:4)\times 3$ ἢ τοῦ ἕνα τέταρτον $\times 3$. Ἑπομένως ἂν θέλωμεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ κλάσματος βασιζόμενοι εἰς ***τὸν ἀρχικὸν τρόπον τοῦ σχηματισμοῦ της,*** πρέπει νὰ τὴν ὁρίσωμεν ὡς ἑξῆς: Κλάσμα εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει ἕνα ἢ περισσότερα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει μερισθῇ ἕνα ἀκέραιον ὅλον, ἤτοι ἡ ἀκεραία μονάς.

Ἀλλὰ ***ἡ θεωρητικὴ σκέψις*** δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀρκεσθῇ εἰς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὴν συνήθη ἀντίληψιν καὶ προϋποθέτει τὴν ἀκεραίαν μονάδα ὡς ***σχετικὴν*** μονάδα, δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ ὡς περαιτέρω διαιρετὴν εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς νέαι μονάδες. Ἡ θεωρία, κρίνουσα ἀπὸ τὴν καθαρὰν ἀριθμητικὴν ἄποψιν, εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ δεχθῇ τὴν ἀκεραίαν μονάδα ὡς ***ἀπόλυτην*** μονάδα, ὡς τὸ ἀπολύτως ἁπλοῦν καὶ ἀδιαίρετον ἀριθμητικὸν στοιχεῖον, ἀνάλογον μὲ τὸ σημεῖον τῆς Γεωμετρίας, ὡς τὸ πρωταρχικὸν στοιχεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀρχίζει κάθε σχηματισμὸς καὶ τὸ ὁποῖον δι᾽ αὐτὸ δὲν ἐπιτρέπεται νὰ θεωρηθῇ ὡς σχηματισμένον καὶ σύνθετον. Ἂν εἰς τὸν αἰσθητὸν κόσμον δὲν ὑπάρχῃ μία τέτοια μονάς, ὑπάρχει ὅμως εἰς τὸν ψυχικόν, εἰς τὴν ψυχικὴν π.χ. ἐνέργειαν τοῦ παριστάνειν. Ἡ παράστασις εἶναι πάντοτε κατιτὶ

ἀκέραιον, εἶναι πάντοτε ἀπόλυτος μονάς. Ἠμπορῶ νὰ παριστάνω ἕνα δεύτερον τοῦ μήλου, ἕνα τέταρτον τοῦ μήλου κ.τ.λ., ἀλλὰ καὶ ἡ παράστασις τοῦ δευτέρου, τοῦ τετάρτου κ.τ.λ. εἶναι μία ἀκεραία παράστασις καὶ ὄχι ἡμίσεια ἢ τὸ τέταρτον κ. τ. λ. τῆς παραστάσεως.

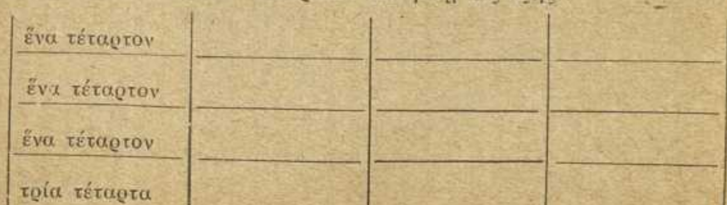
Ἀλλὰ πῶς ἠμπορεῖ ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν καὶ ἀδιαίρετην μονάδα νὰ προκύψῃ ἕνα κλάσμα καὶ ὡρισμένως πρῶτα μὲν μία κλασματικὴ μονάς, ἔπειτα δὲ ἕνας κλασματικὸς ἀριθμός; Κλάσμα μὲ τὴν προηγούμενην ἔννοιαν, ὡς παραστατικὸν δηλ. ἑνὸς συγκεκριμένου μέρους τῆς ἀκεραίας μονάδος, εἶναι ἀπαράδεκτον ἀπὸ τὴν θεωρίαν, ἀφοῦ ἡ ἀκεραία μονὰς εἶναι κατ᾽ αὐτὴν ἀρχικὴ καὶ ἀδιαίρετη. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ καὶ μὲ ἄλλην ἐκδοχήν. Τὴν κλασματικὴν μονάδα ἕνα τέταρτον ἐθεωρούσαμεν ἕως τώρα σύμφωνα μὲ τὸν ἀρχικὸν σχηματισμόν της ἀπὸ τὴν συνήθη ἀντίληψιν ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μερισμοῦ 1 : 4. Ἠμποροῦμεν ὅμως νὰ παραιτηθῶμεν ἀπὸ τὸ πηλίκον αὐτό, ἀπὸ τὸν πραγματικὸν δηλ. μερισμόν, καὶ νὰ θεωρήσωμεν τὴν κλασματικὴν μονάδα μόνον ὡς ***ἕνα πρόβλημα μερισμοῦ,*** ὡς ἕνα μερισμόν, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἐκτελεσθῇ, ἀκριβῶς διότι δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ, ὡς ἕνα ὑποσημαινόμενον μόνον πηλίκον. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτὴν ἕνα τέταρτον εἶναι ἴσον μὲ τὸ 1 : 4 καὶ ὄχι ἴσον μὲ ***τὸ ἐξαγόμενον*** τοῦ μερισμοῦ 1 : 4. Ἔτσι ὁ ἀριθμητὴς τῆς κλασματικῆς μονάδος ἕνα τέταρτον, ἤτοι τὸ ἕνα, εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρετέον τοῦ προβλήματος τοῦ μερισμοῦ καὶ φανερώνει δι᾽ αὐτὸ τὴν ὅλην ἀκεραίαν μονάδα καὶ ὄχι ἕνα μόνον μέρος της, ὅπως ἐφανέρωνε εἰς τὴν προηγούμενην ἐκδοχήν, ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην τοῦ προβλήματος. Σύμφωνα μὲ τὴν ἴδιαν ἐκδοχὴν ἠμποροῦμεν νὰ ἀντιληφθῶμεν καὶ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς. Τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν τρία τέταρτα ἐθεωρούσαμεν ἕως τώρα σύμφωνα μὲ τὸν ἀρχικὸν σχηματισμόν του ὡς ***τὸ ἐξαγόμενον*** τοῦ μερισμοῦ 1 : 4, λαμβανόμενον 3 φοράς, ἤτοι ὡς ***τὸ ἐξαγόμενον*** τοῦ $(1:4)\times 3$. Παραιτούμενοι καὶ ἐδῶ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ μερισμοῦ καὶ θεωροῦντες τὴν κλασματικὴν μονάδα μόνον ὡς πρόβλημα μερισμοῦ (ἤτοι ἴσην μὲ 1 : 4) ἐξάγομεν, ὅτι τρία τέταρτα $= (1:4)\times 3$. Ἐπειδὴ δέ, καθὼς εἶναι γνωστόν, κάθε πηλίκον, ὅπως ἐδῶ τὸ (1 : 4) πολλαπλασιάζεται μὲ ἕνα ἀριθμόν, ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρετέος μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, προφανῶς (1 : 4)×3=3 : 4. Ἔτσι λοιπὸν τὰ τρία τέταρτα=3 : 4. Καὶ ὁ κλασματικὸς ἑπομένως ἀριθμὸς ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα πρόβλημα μερισμοῦ, ὡς ἕνας μερισμὸς μὴ ἐκτελεσθείς, ἀκριβῶς διότι εἶναι ἀνεκτέλεστος. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ἐδῶ τοῦ τρία τέταρτα, εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρετέον τοῦ προβλήματος, φανερώνων ἔτσι 3 ἀκεραίας μονάδας καὶ ὄχι τρία μέρη τῆς μιᾶς μονάδος, ὅπως ἐφανέρωνε εἰς τὴν προηγούμενην ἐκδοχήν, ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην τοῦ προβλήματος.

Ἐπὶ τῇ βάσει λοιπὸν τῆς ἀντιλήψεως, ὅτι ἡ ἀκεραία μονὰς εἶναι ἀπόλυτη καὶ ἀδιαίρετη, ἡ ἔννοια τοῦ κλάσματος πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἑξῆς : τὸ κλάσμα εἶναι ἕνα πρόβλημα ἑνὸς μὴ ἐκτελεστοῦ μερισμοῦ, ἕνα ὑποσημαινόμενον μόνον πηλίκον. Κατόπιν δὲ ἀπὸ αὐτὸ ἀληθεύει φυσικὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι δηλ. κάθε πρόβλημα μερισμοῦ (3 : 4) εἶναι κλάσμα (τρία τέταρτα). Μὲ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν παρουσιάζονται προφανῶς καὶ ἡ κλασματικὴ μονὰς καὶ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς ἐντελῶς διαφορετικὰ ἀπὸ ὅτι ἐπαρουσιάσθηκαν μὲ τὴν πρώτην ἔννοιαν, τὴν σχηματιζομένην δηλ. ἀρχικὰ ἀπὸ τὴν συνήθη ἀντίληψιν. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχικὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὁ ἀριθμητὴς τῆς κλασματικῆς μονάδος φανερώνει ἕνα μόνον μέρος τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς προκύπτει ἀπὸ τὸν μερισμὸν μιᾶς μόνον ἀκεραίας μονάδος, ἐνῷ σύμφωνα μὲ τὴν δεύτερην ὁ ἀριθμητὴς τῆς κλασματικῆς μονάδος φανερώνει τὴν ὅλην ἀκεραίαν μονάδα καὶ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς προκύπτει ἀπὸ τὸν μερισμὸν πολλῶν ἀκεραίων μονάδων.

Ἡ δεύτερη ἐκδοχὴ τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος δὲν εἶναι, καθὼς εἴδαμεν, ἀρχική, ὅπως ἡ πρώτη, ἀλλὰ ἐπιγενέστερον δημιούργημα τῆς θεωρητικῆς σκέψεως. Ἀκριβῶς δὲ δι᾿ αὐτὸ εἶναι πολὺ ἀφῃρημένης φύσεως καὶ δὲν ἠμπορεῖ νὰ κατανοηθῇ εὔκολα καὶ ἀπὸ αὐτοὺς ἀκόμη τοὺς ὡριμωτέρους μαθητάς. Ἀπεναντίας ἡ ἀρχικὴ ἐκδοχὴ τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος, ἡ βασιζομένη εἰς τὸν μερισμὸν τῆς ἀκεραίας μονάδος εἰς ὡρισμένα ἴσα μέρη, ἠμπορεῖ νὰ κατανοηθῇ εὐκολώτατα καὶ ἀπὸ τοὺς μαθητὰς τοῦ δημοτ. σχολείου καὶ ὡρισμένως διὰ τοὺς ἑξῆς λόγους. Ἐν πρώτοις μὲ αὐτὴν ἠμπορεῖ νὰ ἔχουν σχηματίσει, καὶ πρὶν ἀκόμη

διδαχθοῦν εἰς τὸ σχολεῖον τὰ κλάσματα, τὰς ἐννοίας μερικῶν κλασμάτων εἴτε ὅλως διόλου μόνοι των εἴτε παρακολουθοῦντες τὸν πέριξ των πρακτικὸν βίον, εἰς τὸν ὁποῖον τὰ κλάσματα νοοῦνται μόνον μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτήν. Ἔπειτα μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτὴν ἠμπορεῖ νὰ αἰσθητοποιηθῇ εἰς αὐτοὺς εὐκολώτατα ἡ ἔννοια τοῦ κλάσματος, τῆς κλασματικῆς μονάδος, τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῆς κλασματικῆς σειρᾶς. Ἀκριβῶς δὲ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἠμποροῦν τέλος οἱ μικροὶ μαθηταὶ μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτὴν νὰ νοοῦν μὲ κάθε κλάσμα κατιτὶ ἐντελῶς συγκεκριμένον, ἠμποροῦν δηλ. νὰ ἀναφέρουν τὸ κλάσμα εἰς ὡρισμένα συγκεκριμένα τεμάχια ἑνὸς ὡρισμένου συγκεκριμένου ἀντικειμένου. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἐκδοχὴ αὐτὴ διὰ τοὺς μνημονευθέντας λόγους εἶναι πολὺ εὐληπτη εἰς τοὺς μικροὺς μαθητάς, πρέπει φυσικὰ νὰ προτιμηθῇ αὐτὴ κατὰ τὴν εἰσαγωγήν των εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ κλάσματος. Οἱ μικροὶ μαθηταὶ πρέπει ἐξ ἀρχῆς νὰ νοήσουν μὲ τὰ κλάσματα ἕνα ἢ περισσότερα τεμάχια ὡρισμένων συγκεκριμένων ἀντικειμένων. Ἐπειδὴ δὲ μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτὴν διευκολύνεται εἰς αὐτοὺς καὶ ἡ ἐκτέλεσις τῶν περισσοτέρων ἀριθμητικῶν πράξεων τῶν κλασμάτων, σκόπιμον εἶναι νὰ παριστάνουν οἱ μαθηταὶ τὰ κλάσματα μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτὴν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον χρόνον. Ἠμποροῦν δὲ μάλιστα νὰ ἀφεθοῦν μόνον μὲ τὴν ἀντίληψιν αὐτὴν καὶ μέχρι τέλους.

Ἐν τούτοις πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι καὶ ἡ ἄλλη ἐκδοχή, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν τὸ κλάσμα εἶναι ἕνα πρόβλημα μερισμοῦ καὶ κάθε πρόβλημα μερισμοῦ εἶναι ἕνα κλάσμα καὶ ὅτι δι᾿ αὐτὸ τὸ κλάσμα ἠμπορεῖ νὰ προκύψῃ καὶ ἀπὸ τὸν μερισμὸν περισσοτέρων τῆς μιᾶς ἀκεραίων μονάδων, δὲν εἶναι ἄχρηστη καὶ δι᾿ αὐτοὺς ἀκόμη τοὺς μαθητὰς τοῦ δημοτ. σχολείου. Μὲ αὐτὴν εἰσάγεται μία εὐκταία συντόμευσις εἰς ἐκείνας τὰς πράξεις τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως, εἰς τὰς ὁποίας πρόκειται νὰ γίνῃ μερισμὸς ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον, διότι ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐκδοχῆς αὐτῆς ὁ μερισμὸς αὐτὸς ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα. Ἂν πρόκειται νὰ γίνῃ εἰς μίαν τέτοιαν πρᾶξιν ὁ μερισμὸς τοῦ 4 μὲ τὸ 5, σύμφωνα μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν συντομώτατα 4 : 5=τέσσερα πέμπτα, ἐνῷ μὲ τὴν ἄλλην θὰ κάμωμεν τὴν ἑξῆς λοξοδρομίαν : 4 : 5=(1 : 5)×4=ἕνα πέμπτον ×4=τέσσερα πέμπτα. Ἐπειδὴ δὲ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐκδοχῆς αὐτῆς καὶ κάθε κλάσμα ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς πρόβλημα μερισμοῦ, χρησιμεύει καὶ εἰς τὴν τροπὴν τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ $\left(\frac{3}{8}=3:8=0{,}375\right)$. Διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς σκόπιμον εἶναι νὰ διδαχθῇ καὶ ἡ ἐκδοχὴ αὐτὴ εἰς τοὺς μαθητὰς τοῦ δημοτ. σχολείου. Ἐν τούτοις σχετικὰ μὲ τὴν διδασκαλίαν της πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὰ ἀκόλουθα πράγματα. Ἐν πρώτοις δὲν πρέπει νὰ βασισθῇ ἡ ἐκδοχὴ αὐτὴ εἰς τὴν μνημονευθεῖσαν ἀνωτέρω θεωρητικὴν ἀντίληψιν, ὅτι ἡ ἀκεραία μονὰς εἶναι ἀπόλυτη μονάς, δι᾽ αὐτὸ δὲ τὸ κλάσμα εἶναι ἕνας μὴ ἐκτελεστὸς μερισμός. Ἡ ἀντίληψις αὐτὴ ὑπερβαίνει τὰς πνευματικὰς δυνάμεις τῶν μαθητῶν τοῦ δημοτ. σχολείου, οἱ ὁποῖοι ἠμποροῦν νὰ ἀντιληφθοῦν τὴν μὲν ἀκεραίαν μονάδα μόνον ὡς σχετικὴν μονάδα, τὸ δὲ κλάσμα μόνον ὡς ἐκτελεστὸν καὶ πράγματι ἐκτελούμενον, πραγματικὸν δηλ. μερισμόν. Ἑπομένως καὶ ἡ ἐκδοχή, ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι καὶ πρόβλημα μερισμοῦ καὶ ἠμπορεῖ νὰ προκύψῃ καὶ ἀπὸ τὸν μερισμὸν πολλῶν ἀκεραίων μονάδων, πρέπει νὰ βασισθῇ εἰς τὴν ἀντίληψιν, ὅτι ὁ μερισμὸς τοῦ προβλήματος, ἂν δὲν ἐκτελῆται, ἠμπορεῖ ὅμως νὰ ἐκτελεσθῇ, ἀντίληψιν, ἡ ὁποία πρέπει καὶ νὰ αἰσθητοποιηθῇ μὲ τὸν πραγματικὸν μερισμὸν τῶν ἀκεραίων αὐτῶν μονάδων. Προκειμένου π. χ. νὰ διδάξωμεν, ὅτι τὸ κλάσμα τρία τέταρτα εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ μερισμοῦ 3 : 4 καὶ ἠμπορεῖ νὰ προκύψῃ καὶ ἀπὸ τὸν μερισμὸν 3 ἀκεραίων μονάδων εἰς 4 ἴσα μέρη, πρέπει νὰ κάμωμεν πραγματικὸν μερισμὸν 3 ὁμοειδῶν συγκεκριμένων ἀντικειμένων εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ νὰ πάρωμεν ἀπὸ τὸ κάθε μερισθὲν ἀντικείμενον ἀπὸ 1 μέρος, διὰ νὰ ἔχωμεν ἔτσι ἐν συνόλῳ τρία τέταρτα. Ἂν π. χ. τὰ 3 ὁμοειδῆ συγκεκριμένα ἀντικείμενα εἶναι 3 ἴσαι εὐθεῖαι, ἡ αἰσθητοποίησις τῶν τριῶν τετάρτων θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς :



Δεύτερον πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψει, ὅτι ἡ προκειμένη ἐκδοχὴ δὲν πρέπει νὰ γίνῃ γνωστὴ εἰς τοὺς μαθητὰς πολὺ ἐνωρίς, π.χ. κατ᾽ αὐτὴν τὴν εἰσαγωγήν των εἰς τὴν ἔννοιαν τῶν κλασμάτων εἴτε μαζὶ μὲ τὴν ἄλλην, τὴν ἀρχικήν, εἴτε καὶ ὀλίγον χρόνον κατόπιν ἀπὸ αὐτήν. Οἱ λόγοι δὲ τοῦ πράγματος εἶναι οἱ ἑξῆς. Ἐν πρώτοις καὶ ἂν δεχθῶμεν πρὸς στιγμήν, ὅτι καὶ αἱ δύο ἐκδοχαὶ εἶναι ἐξ ἴσου κατάλληλαι, διὰ νὰ κάμουν σαφῆ εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν ἔννοιαν τῶν κλασμάτων, ἐν τούτοις εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ συνύπαρξίς των θὰ ἐπιφέρῃ σύγχυσιν καὶ συμφυρμὸν εἰς τὰς κεφαλάς των. Ἐξ ἄλλου ἡ ἐκδοχή, ὅτι τὸ κλάσμα ἠμπορεῖ νὰ προκύψῃ καὶ ἀπὸ τὸν μερισμὸν πολλῶν ἀκεραίων μονάδων, δὲν εἶναι τόσον κατάλληλη ὅσον ἡ ἄλλη πρὸς διασάφησιν τῆς φύσεως τῶν κλασμάτων. Μὲ αὐτὴν δὲν ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἀντιλαμβάνωνται καὶ νὰ παριστάνουν τόσον εὔκολα ὅσον μὲ τὴν ἄλλην τὰ διάφορα παράγωγα κλάσματα τῆς ἴδιας κλασματικῆς σειρᾶς. Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν σειρὰν τῶν ἑβδόμων. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχικὴν ἐκδοχὴν ἡ σειρὰ αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ αἰσθητοποιηθῇ μὲ μίαν εὐθεῖαν μερισμένην εἰς 7 ἴσα τμήματα. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἑνὸς καὶ μόνου αὐτοῦ σχήματος θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἀντιλαμβάνωνται εὔκολα καὶ νὰ παριστάνουν καθαρὰ ὅλα τὰ παράγωγα κλάσματα τῆς σειρᾶς· ἔτσι ὑπὸ τὰ δύο πρῶτα τμήματα τῆς εὐθείας θὰ ἀντιλαμβάνωνται δύο ἕβδομα, ὑπὸ τὰ 3 τρία ἕβδομα, ὑπὸ τὰ 4 τέσσερα ἕβδομα κ. οὕτ. καθ. καὶ ἀντιστρόφως ὑπὸ τὰ δύο ἕβδομα θὰ παριστάνουν τὰ 2 πρῶτα τμήματα τῆς σειρᾶς, ὑπὸ τὰ τρία ἕβδομα τὰ 3 κ. οὕτ. καθ. Μὲ τὴν ἄλλην ὅμως ἐκδοχὴν οἱ μαθηταὶ θὰ εἶναι ὑποχρεωμένοι πρὸς ἀντίληψιν καὶ παράστασιν κάθε παραγώγου κλάσματος τῆς σειρᾶς νὰ χρησιμοποιοῦν ἰδιαίτερον σχῆμα· πρὸς ἀντίληψιν καὶ παράστασιν τῶν μὲν δύο ἑβδόμων πρέπει νὰ ἔχουν ὑπ᾽ ὄψιν των δύο ὑπαλλήλους γραμμάς, μερισμένας εἰς 7 ἴσα μέρη, τῶν δὲ τριῶν ἑβδόμων τρεῖς ὑπαλλήλους γραμμάς, μερισμένας ὁμοίως, τῶν δὲ πέντε ἑβδόμων πέντε ὑπαλλήλους γραμμάς, μερισμένας μὲ τὸν ἴδιον τρόπον κ. οὕτ. καθ. Ἐφόσον ὅμως οἱ μαθηταὶ θὰ εἶναι ὑποχρεωμένοι διὰ κάθε παράγωγον κλάσμα τῆς σειρᾶς νὰ ἔχουν ὑπ᾽ ὄψιν των διάφορον μέσον αἰσθητοποιήσεως, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἀποβαίνῃ εἰς αὐτοὺς ὑπερβολικὰ δύσκολη ἡ ἀντίληψις καὶ παράστασις τῶν κλασμάτων αὐτῶν. Ἀλλὰ ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτὴν θὰ ἀποβαίνῃ εἰς τοὺς μαθητὰς παραπολὺ δύσκολη καὶ ἡ παράστασις τῆς ὅλης κλασματικῆς σειρᾶς, ἡ ὁποία μὲ τὴν ἀρχικὴν ἐκδοχὴν εἶναι εὐκολώτατη, διότι εἰς αὐτὴν ὅλα τὰ μέλη τῆς σειρᾶς εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς τὴν ἴδιαν εὐθεῖαν. Τέλος ἡ ἴδια ἐκδοχὴ θὰ γεννᾷ πολλὰς δυσκολίας κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν πράξεων. Αὐτὴ ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων τῆς ἴδιας ἀριθμητικῆς σειρᾶς γίνεται μὲ αὐτὴν δυσκολώτατα. Πῶς πρέπει π.χ. νὰ προστεθοῦν σύμφωνα μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτὴν τὰ τρία ἕβδομα καὶ τὰ τέσσερα ἕβδομα ; Βέβαια ἔτσι : $3 : 7 + 4 : 7 = (3 + 4) : 7$. Ἀλλὰ ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς ἐκτελέσεως τῆς προσθέσεως, ἐκτὸς τοῦ ὅτι προϋποθέτει τὴν γνῶσιν, ὅτι πηλίκα μὲ τὸν ἴδιον διαιρέτην προσθέτονται, ἂν προστεθοῦν οἱ διαιρετέοι, καὶ παραπολὺ μακρὸς εἶναι καὶ ἐλάχιστα θὰ συντελέσῃ εἰς τὴν κατανόησιν τῆς προσθέσεως τῶν προκειμένων κλασμάτων ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Δι' ὅλους λοιπὸν τοὺς ἀνωτέρω λόγους ἡ ἐκδοχὴ αὐτὴ δὲν πρέπει νὰ διδαχθῇ ἐνωρίτερα ἀπὸ τὸ πρέπον, ἀπεναντίας δὲ σκόπιμον εἶναι νὰ μεταδοθῇ, ὅταν θὰ πρόκειται ἡ διδασκαλία νὰ ἀσχοληθῇ μὲ ἐκείνας τὰς πράξεις τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως, τῶν ὁποίων ἡ ἐκτέλεσις διευκολύνεται μὲ τὴν ἐκδοχὴν αὐτήν.

---

2. ΤΑ ΔΥΟ ΚΥΡΙΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ, ΗΤΟΙ ΤΑ ΚΟΙΝΑ ΚΑΙ ΤΑ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ, ΚΑΙ Η ΦΥΣΙΣ ΤΟΥ ΚΑΘΕ ΕΙΔΟΥΣ.

Τὰ κλάσματα ὡς ἐκ τοῦ τρόπου τῆς γραπτῆς παραστάσεώς των, ὁ ὁποῖος ἔχει μεγάλην σπουδαιότητα διὰ τὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα συνεπάγεται, ὑποδιαιροῦνται εἰς δύο κύρια εἴδη, ἤτοι εἰς τὰ κοινὰ καὶ εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα.

Τὰ κοινὰ κλάσματα εἶναι κλάσματα, τῶν ὁποίων γράφεται καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστής, ὁ ὁποῖος δι' αὐτὸ ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός. Γράφεται δὲ ὁ παρονομαστὴς κάτω ἀπὸ τὸν ἀριθμητήν, χωριζόμενος ἀπὸ αὐτὸν μὲ μίαν μικρὰν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν (π.χ. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{10}$ κ. τ. λ.).

Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, καθὼς φανερώνει καὶ τὸ ὄνομά των, εἶναι κλάσματα, τῶν ὁποίων ὁ παρονομαστὴς εἶναι μία δύναμις τοῦ 10 ($10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ κ.τ.λ.), δὲν παριστάνεται δὲ ἐγγράφως, διότι ὁ ἀριθμητής των γράφεται μὲ τέτοιον τρόπον, ὥστε νὰ φανερώνῃ ὄχι μόνον τὸν ἀριθμὸν τῶν κλασματικῶν μονάδων των, ἀλλ' ὡς ἐκ τῆς θέσεώς του καὶ τὸ ὄνομά των, τὸ εἶδός των, τὸ ὁποῖον θὰ ἐφανέρωνεν ὁ παρονομαστής. Εἶναι δὲ ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς γραφῆς τοῦ ἀριθμητοῦ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ὁ θεσιαρχικὸς τρόπος τῆς γραφῆς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν ἀκεραίων. Σύμφωνα μὲ αὐτὸν μία μονὰς γραφομένη δεξιὰ ἀπὸ ἄλλην φανερώνει τὸ δέκατον μέρος της. Ἂν λοιπὸν εἰς τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 111 (1 Ἑκατ. 1 Δεκ. 1 Μονὰς) γράψωμεν δεξιὰ ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς μονάδος τῆς κατωτάτης τάξεως ἕνα ἄλλο 1, τὸ 1 αὐτὸ φανερώνει τὸ δέκατον τῆς μονάδος αὐτῆς, τὸ δέκατον δηλ. τῆς καθαυτὸ ἀκεραίας μονάδος, ἤτοι τὴν κλασματικὴν μονάδα ἕνα δέκατον. Ἂν δεξιὰ τοῦ δεκάτου γράψωμεν ἀκόμη ἕνα 1, θὰ φανερώνῃ τὸ δέκατον τοῦ δεκάτου, ἤτοι τὴν κλασματικὴν μονάδα ἕνα ἑκατοστὸν κ. οὕτ. καθ. Ἀποχωρίζοντες τώρα τὴν θέσιν τῶν δεκάτων ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων μὲ ἕνα κόμμα, τὴν λεγομένην ὑποδιαστολήν, ἔχομεν τὸν ἑξῆς νέον ἀριθμόν : 111, 11. Ὁ νέος αὐτὸς ἀριθμὸς περιέχει ἐκτὸς τῶν κλασματικῶν μονάδων καὶ ἀκεραίας. Τὸν ἐσχηματίσαμεν ἔτσι, μόνον καὶ μόνον διὰ νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις τῶν δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων μὲ τὰς ἀκεραίας. Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ἀκέραιαι μονάδες, καὶ σημειώσωμεν τὴν ἔλλειψίν των, ὅπως πάντοτε, μὲ τὸ 0, θὰ ἔχωμεν τὸν νέον ἀριθμὸν 0, 11, ὁ ὁποῖος περιέχει μόνον κλασματικὰς μονάδας, εἶναι δηλ. κλάσμα. Τὸ κλάσμα αὐτὸ ἔχει ἀκριβῶς τὰ ἰδιαίτερα γνωρίσματα, μὲ τὰ ὁποῖα ἐχαρακτηρίσαμεν ἀμέσως ἀνωτέρω τὰ δεκαδικὰ κλάσματα. εἶναι δηλ. δεκαδικὸν κλάσμα, εἴτε ληφθῇ ὡς σύνθεσις δύο ἰδιαιτέρων κλασμάτων (τοῦ ἑνὸς δεκάτου καὶ τοῦ ἑνὸς ἑκατοστοῦ) εἴτε ληφθῇ ὡς ἕνα ἑνιαῖον κλάσμα (11 ἑκατοστά). Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται, ἔχει ὡς παρονομαστὴν μίαν δύναμιν τοῦ 10 (τὸ πρῶτον 10^1, τὸ δεύτερον 10^2), κανεὶς δὲ ἀπὸ τοὺς παρονομαστὰς αὐτοὺς δὲν γράφεται, διότι τὸ ὄνομα τῶν κλασματικῶν μονάδων καὶ τῶν δύο κλασμάτων φανερώνεται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμητοῦ των. Ἂν τὸ κλάσμα ληφθῇ ὡς ἑνιαῖον, ἤτοι ὡς ἕνδεκα ἑκατοστὰ (,διότι ἕνα δέκατον = δέκα ἑκατοστά, δέκα δὲ ἑκατοστὰ καὶ ἕνα ἑκατοστὸν κάμνουν ἕνδεκα ἑκατοστά), ἔχει πάλιν ὡς παρονομαστὴν μίαν δύναμιν τοῦ 10 (10^2), ὁ δὲ παρονομαστὴς αὐτὸς δὲν γράφεται, διότι τὸ ὄνομα τῶν κλασματικῶν μονάδων καὶ τοῦ κλάσματος αὐτοῦ φανερώνεται ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμητοῦ του 11.

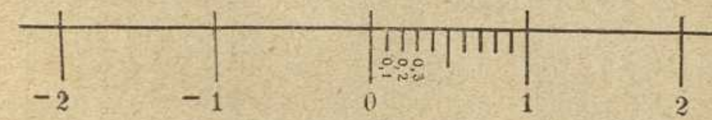
Τὸ γεγονὸς τώρα, ὅτι εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα δὲν γράφεται παρονομαστὴς καὶ ὅτι κάθε μονάς των περιλαμβάνει 10 μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἀκριβῶς ὅπως συμβαίνει εἰς τοὺς ἀκεραίους, ἔκαμε πολλοὺς νὰ μορφώσουν τὴν γνώμην, ὅτι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα δὲν εἶναι ἕνα εἶδος τῶν κλασμάτων, ἀλλὰ ἐπέκτασις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν κάτω ἀπὸ τὴν μονάδα, συνέχισις τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων κάτω ἀπὸ τὴν μονάδα, εἶναι μὲ ἄλλους λόγους ἀκέραιοι ἀριθμοί. Σύμφωνα μὲ τὴν γνώμην αὐτὴν ὅπως ἡ δεκάς, τὸ 10, εἶναι τὸ δέκατον τοῦ 100, ἡ δὲ μονὰς εἶναι τὸ δέκατον τοῦ 10, ἔτσι τὸ 0,1 εἶναι τὸ δέκατον τῆς μονάδος, τὸ 0,01 εἶναι τὸ δέκατον τοῦ δεκάτου κ.τ.λ. καὶ ὅποια σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ 20, 30, 40 κ.τ.λ. μὲ τὸ 10 ($20 = 10 \times 2$, $30 = 10 \times 3$ κ. τ. λ.), τέτοια ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τοῦ 0,2 0,3 0,4 μὲ τὸ 0,1 ($0{,}2 = 0{,}1 \times 2$ $0{,}3 = 0{,}1 \times 3$ κ.τ.λ.). Δι᾿ αὐτὸ αἱ ἐπάνω ἀπὸ τὸ 1 δεκαδικαὶ μονάδες (δεκάς, ἑκατοντὰς κ.τ.λ.) ἠμποροῦν νὰ ὀνομασθοῦν ἀνώτεραι δεκαδικαὶ μονάδες ἢ ἁπλῶς δεκαδικαὶ μονάδες, αἱ δὲ κάτω ἀπὸ τὸ 1 κατώτεραι δεκαδικαὶ μονάδες ἢ δεκατικαὶ μονάδες. Ὁ ἀκόλουθος πίναξ δεικνύει, πῶς ἀντιλαμβάνονται οἱ ὀπαδοὶ τῆς ἀντιλήψεως αὐτῆς τὸ κατὰ τὴν γνώμην των πλῆρες σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν:

1 Χ(ιλιὰς)=10 Ἑ(κατοντάδες)		(Ἀριθμοὶ μὲ δεκατικὰς μονάδας)
1 Ἑ(κατοντὰς) =10Δ(εκάδες)		
1Δ(εκὰς)=	10Μ(ονάδες)	
	1Μ(ονὰς)=	10δ(έκατα)
		1δ(έκατον) =10 ἑ(κατοστὰ)
		1ἑ(κατοστὸν)=10 χ(ιλιοστά).
(Ἀριθμοὶ μὲ δεκαδικὰς μονάδας)		

Συνεπεῖς τώρα μὲ τὴν γνώμην αὐτὴν οἱ πλεῖστοι ἀπὸ τοὺς ὀπαδούς της δὲν ὁμιλοῦν κἂν περὶ δεκαδικῶν κλασμάτων, ἀλλὰ μόνον περὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Ἔτσι π. χ. ὁ *Hartmann* διακρίνει ἀκεραίους, δεκαδικοὺς καὶ κλασματικοὺς ἀριθμούς. Μὲ τὸ ἴδιον πνεῦμα ἀκόμη κατὰ τὸ 1822 ὁ *Kopf* παρατηρεῖ εἰς τὸ ἀριθμητικόν του ἔργον «Anweisung zum Rechnen» (Frankfurt a. d. Od.) τὰ ἀκόλουθα: «Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν ἴδιαν ἐσωτερικὴν συνοχὴν μὲ τοὺς ἀκεραίους, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ δεξιὰ πλευρὰ μὲ τὴν ἀριστεράν, καὶ ἡ ἐξέτασίς των βασίζεται εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν ἀκεραίων. Ἡ μονὰς εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν δεκαδικῶν. Εἰς τὴν δεξιὰν πλευρὰν τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν καταλήγουν εἰς « - ἀς» (μονάς, δεκὰς κ.τ.λ.) εἰς τὴν ἀριστερὰν καταλήγουν « - τον» (δέκατον, ἑκατοστὸν κ.τ.λ.)· εἰς τὴν δεξιὰν εὑρίσκονται οἱ ὀξεῖς, εἰς τὴν ἀριστερὰν οἱ βαρεῖς τόνοι. Ἡ διπλῆ αὐτὴ κλῖμαξ εἶναι πολὺ εὔκολη καὶ εὔληπτη καὶ ἡ κλῖμαξ τῶν ληγόντων εἰς «τον» δὲν εἶναι οὔτε κατ᾿ ἐλάχιστον δυσκολώτερη ἀπὸ τὴν κλίμακα τῶν ληγόντων εἰς «άς». Ἀνάλογα λέγει καὶ ὁ *Adam* (Der Rechenlehrer, Berlin, 1883, σ. 13): «Ἂν μερίσωμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα ὄχι εἰς δέκα, ἀλλὰ εἰς ὀλιγώτερα ἢ περισσότερα ἀπὸ δέκα ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ἕνα ἢ περισσότερα ἀπὸ τὰ μέρη αὐτά, σχηματίζομεν τὸν κλασματικὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται καὶ κλάσμα (κοινὸν κλάσμα)». Ἀπὸ αὐτὰ φυσικὰ ἐξάγεται, ὅτι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα δὲν εἶναι κλάσματα. Ἐπίσης δὲ καὶ ὁ *Kentenich* (Anleitung zur Erteilung des Rechenunterrichts und der Raumlehre in Volksschulen, 4 ἔκδοσ. ἀπὸ τὸν Kentenich καὶ τὸν Frohn, Düsseldorf, 1892, σ. 132) παρατηρεῖ: «Τὰ καλούμενα δεκαδικὰ κλάσματα δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἐπέκτασις τῶν ἀκεραίων. Ἡ ἀρίθμησίς των δὲν εἶναι ἄλλο τίποτε παρὰ ἀρίθμησις τῶν ἀκεραίων».

Ἀλλὰ ἀπὸ ὅσα εἴδαμεν ἀμέσως ἀνωτέρω, εἶναι περισσότερον ἀπὸ φανερόν, ὅτι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἶναι ἕνα εἶδος τῶν κλασμάτων. Ἔχουν ὅλα τὰ γνωρίσματα τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος. Ὅπως κάθε κλάσμα, ἔτσι καὶ αὐτὰ εἶναι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι φανερώνουν ἕνα ἢ περισσότερα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει μερισθῇ ἡ ἀκεραία μονάς. Ὅπως κάθε κλάσμα, ἔτσι καὶ αὐτὰ ἔχουν παρονομαστήν, ὁ ὁποῖος, μολονότι δὲν γράφεται, ὑπάρχει ὅμως κατ' οὐσίαν καὶ παριστάνεται κάθε στιγμὴν μὲ τὸν νοῦν μας. Ἐξ ἄλλου ἡ ἔννοια τοῦ κλάσματος δὲν περιλαμβάνει ὅλα τὰ γνωρίσματα τῆς ἐννοίας τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, διότι ἡ μὲν τελευταία αὐτὴ ἔννοια εἶναι ἔννοια εἴδους, ἡ δὲ ἔννοια τοῦ κλάσματος εἶναι ἔννοια γένους. Τὸ ὅτι δὲν γράφεται ὁ παρονομαστὴς τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, εἶναι ἀκριβῶς ἕνα ἰδιαίτερον γνώρισμά των, τὸ ὁποῖον τὰ διακρίνει ἀπὸ τὰ κοινὰ καὶ τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὸν ἰδιάζοντα τρόπον τῆς γραφῆς των. Τὸ γεγονός, ὅτι κάθε μονὰς τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων περιλαμβάνει 10 μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ὅπως συμβαίνει καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, δὲν ἔχει βέβαια τὴν θαυματουργὸν δύναμιν νὰ τὰ κάμῃ νὰ παύσουν νὰ εἶναι κλάσματα καὶ νὰ μεταβληθοῦν εἰς ἀκεραίους. Διὰ τὸ ὅτι τὸ ἕνα δέκατον ἰσοῦται μὲ δέκα ἑκατοστὰ καὶ τὸ ἕνα ἑκατοστὸν μὲ δέκα χιλιοστὰ κ.τ.λ., δὲν παύει βέβαια τὸ μὲν ἕνα δέκατον νὰ φανερώνῃ ἕνα ἀπὸ τὰ 10 ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει μερισθῇ ἡ ἀκεραία μονάς, τὸ δὲ ἕνα ἑκατοστὸν νὰ φανερώνῃ ἕνα ἀπὸ τὰ 100 ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει μερισθῇ ἡ ἀκεραία μονὰς κ.τ.λ. Τὸ γεγονὸς ἐκεῖνο ἐπιτρέπει μόνον εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα νὰ γράφωνται μὲ τὸν τρόπον τῶν ἀκεραίων. Εἶναι ἐντελῶς ἄτοπον νὰ πιστεύεται καὶ νὰ διδάσκεται, ὅτι οἱ μὲν ἀριθμοὶ οἱ φανερώνοντες ἕνα ἢ περισσότερα ἀπὸ τὰ 3, 4, 5, 12, 15, 25 κ.τ.λ. ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει μερισθῇ ἡ ἀκεραία μονάς, εἶναι κλάσματα, ἀπεναντίας δὲ οἱ ἀριθμοὶ οἱ φανερώνοντες ἕνα ἢ περισσότερα ἀπὸ τὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. ἴσα μέρη, εἰς ὁποῖα ἔχει διαιρεθῇ ἡ ἴδια μονάς, δὲν εἶναι κλάσματα, ἀλλὰ ἀκέραιοι. Δὲν πρέπει ἐπίσης νὰ λέγεται, ὅτι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ἀποτελοῦν ἐπέκτασιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν πρὸς τὰ κάτω, κάτω ἀπὸ τὴν μονάδα. Οὔτε μὲ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα οὔτε μὲ τὰ κλάσματα ἐν γένει ἐπεκτείνεται ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀκεραίων εἴτε πρὸς τὰ κάτω εἴτε πρὸς τὰ ἐπάνω. Τὰ κλάσματα ἁπλούστατα παρεμβαλλόμενα εἰς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων ὡς διάμεσα μέλη τὴν διαρθρώνουν πλουσιώτερα καὶ τὴν τελειοποιοῦν. Ἂν φαντασθῶμεν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων τὸ 0 ὡς τὸ ἀδιάφορον σημεῖον, ὅ,τι κεῖται κάτω ἀπὸ τὸ 0, εἶναι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, ἐνῷ τὰ κλάσματα, εἴτε δεκαδικὰ εἴτε κοινά, εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, κείμενοι ἐπάνω ἀπὸ τὸ 0. Αἰ-

σθητοποιεῖται δὲ τὸ πρᾶγμα αὐτὸ ὡς πρὸς τὰ γνήσια δεκαδικὰ κλάσματα τῶν δεκάτων ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὡς ἑξῆς :



Τὰ γνήσια δεκαδικὰ κλάσματα τῶν δεκάτων ἐκτείνονται εἰς τὸ διάστημα $\underset{0}{|}\text{————}\underset{1}{|}$. Ἀπὸ τὸ ὅτι ἡ δεκαδικὴ φύσις τῶν μονάδων τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων κάμνει δυνατὸν νὰ γράφωνται αἱ μονάδες αὐταὶ συμβατικά, χάριν τῆς εὐκολίας τῆς ἀριθμήσεως, δεξιὰ ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους, δὲν ἠμπορεῖ βέβαια νὰ ἐξαχθῇ, ὅτι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἶναι πράγματι ἐπέκτασις τῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων πρὸς τὰ κάτω.

Ἐπίσης ὅμως δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ ὑποστηρίζεται, ὅτι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἶναι ἕνα εἶδος τῶν κοινῶν κλασμάτων καὶ εἰδικῶς τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν τὸν 10, 100, 1000 κ.τ.λ., ἤτοι τῶν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ. Καθὼς εἶναι γνωστόν, ἂν τὸ γένος δὲν ἔχῃ ὅλα τὰ γνωρίσματα τοῦ εἴδους, τὸ εἶδος ὅμως πρέπει νὰ περιέχῃ ὅλα τὰ γνωρίσματα τοῦ γένους. Γνώρισμα δὲ τῶν κοινῶν κλασμάτων, καθὼς εἴδαμεν, εἶναι, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστής των παριστάνονται ἐγγράφως. Ἀλλὰ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα δὲν ἔχουν τὸ γνώρισμα αὐτό. Ἑπομένως δὲν ἠμποροῦν νὰ εἶναι εἶδος τῶν κοινῶν κλασμάτων. Εἶναι εἶδος τῶν κλασμάτων, τῶν ὁποίων ἄλλο εἶδος, παράλληλον μὲ τὸ εἶδος τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, εἶναι τὸ εἶδος τῶν κοινῶν. Τὰ κοινὰ καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἶναι παράλληλα εἴδη τοῦ γένους τῶν κλασμάτων. Ὅπως δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ὀνομάσωμεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα 0,1 0,01 0,001 κ.τ.λ. κοινά, ἔτσι δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ὀνομάσωμεν τὰ κοινὰ κλάσματα $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ. δεκαδικά. Ἐντελῶς δὲ περιττὸν εἶναι κατόπιν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω νὰ ἀνασκευασθῇ ἡ γνώμη τοῦ *Steuer* (Die Decimalbrüche κ.τ.λ., Breslau, 1885), ὁ ὁποῖος γνωρίζει μόνον κλάσματα καὶ ὡς ἕνα ἰδιαίτερον εἶδός των τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, ἀποφεύγει δὲ ὅλως διόλου τὸν ὅρον «κοινὰ κλάσματα».

Τέλος δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ πιστεύεται, ὅτι μεταξὺ τῶν κοινῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων δὲν ὑπάρχει καμία **οὐσιώδης** διαφορά. Αὐτὸ ὑποστηρίζει π. χ. ὁ *Büttner* (Welche ist die richtige Stelle der Decimalbruchrechnung im Lehrgange des Volksschulrechnens?, Leipzig, 1886), ὁ ὁποῖος ἄλλωστε παραδέχεται, ὅτι αἱ ἔννοιαι τῶν κοινῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἶναι παράλληλαι. Ἐφόσον ὅμως δύο ἔννοιαι εἶναι παράλληλαι, τὰ ἰδιαίτερα γνωρίσματά των εἶναι καθαραὶ ἀντιθέσεις, ἀκριβῶς δὲ ἕνεκα τῶν ἀντιθέσεων αὐτῶν ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο ἐννοιῶν οὐσιώδης διαφορά. Διὰ τὸν λόγον δὲ αὐτὸν δὲν εἶναι ὀρθὰ καὶ ὅσα σχετικὰ μὲ τὸ ζήτημα αὐτὸ λέγει ὁ Steuer (ὅπ. ἀν., σ. 14). «Ὁ τρόπος», λέγει ὁ Steuer, «τῆς συνήθους γραπτῆς παραστάσεως τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἢ ἀκριβέστερα **τοῦ ὀνόματος** τῶν κλασμάτων αὐτῶν εἶναι κάτι ἐντελῶς ἐπουσιῶδες διὰ τὴν φύσιν των. Διότι, ὅσον μεταβάλλεται ἡ ἔννοια τοῦ οὐρανοῦ, ἂν γράψω τὸ ὄνομά του μὲ Γερμανικὰ ἢ μὲ Ἑλληνικὰ στοιχεῖα, ἄλλο τόσον μεταβάλλεται ἡ παράστασις τοῦ κλάσματος ἑπτὰ ἑκατοστά, ἂν γράψω τὸ ὄνομά του, καθὼς ἀνωτέρω, μὲ λέξεις ἢ ἂν γράψω καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστήν του μὲ ἀριθμητικὰ ψηφία $\left(\frac{7}{100}\right)$ ἢ ἂν γράψω μόνον τὸν ἀριθμητήν του, διότι ὁ παρονομαστὴς φαίνεται ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν ψηφίων (0,07)». Σύμφωνα μὲ αὐτὰ οὐσιῶδες διὰ τὸ κλάσμα δὲν εἶναι ἡ μορφὴ τῆς παραστάσεώς του, ἀλλὰ ἡ τιμή του ἢ τὸ μέγεθός του ἢ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον φανερώνει. Ἀλλ' αὐτὸ θὰ ἦτο ἀκριβές, ἂν πάντοτε ἡ τιμὴ τοῦ πράγματος ἦτο τὸ οὐσιῶδες δι' αὐτὸ καὶ ἡ μορφὴ τὸ ἐπουσιῶδες. Δὲν συμβαίνει ὅμως πάντοτε αὐτό. Συχνάκις τὸ οὐσιῶδες εἶναι ἡ μορφή, ὅπως συμβαίνει π. χ. εἰς τὸ ἀριθμητικόν μας σύστημα. Τὸ οὐσιῶδες τοῦ συστήματος αὐτοῦ δὲν ἔγκειται εἰς τὴν δεκαδικήν του φύσιν, διότι δεκαδικὰ ἀριθμητικὰ συστήματα εἶχαν οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς πολιτισμένους λαούς, ὅπως π. χ. οἱ Ῥωμαῖοι, οἱ ὁποῖοι παρίσταναν μὲ τὸν νοῦν καὶ προφορικὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἀκριβῶς ὅπως ἐμεῖς σήμερα, ἀλλὰ εἰς τὴν μορφὴν τῆς γραπτῆς παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία διαφέρει ὅλως διόλου ἀπὸ τὴν Ῥωμαϊκήν. Οἱ Ῥωμαῖοι ἔγραφαν MDCCCXCI, ἐνῷ ἐμεῖς γράφομεν 1891. Ὅτι ἐδῶ ἡ μορφὴ δὲν εἶναι κάτι ἐπουσιῶδες, ἀλλὰ τὸ οὐσιωδέστερον διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Ἀριθμητικῆς, τὸ γνωρίζομεν πολὺ καλά. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ μὲ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα. Ὁ ἰδιαίτερος τρόπος τῆς γραφῆς των εἶναι κάτι οὐσιωδέστατον, διότι ἔχει μεγάλην σπουδαιότητα διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς τὰ κλάσματα αὐτά.

---

3. ΑΙ ΣΕΙΡΑΙ ΚΑΙ ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ. Η ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΣΕΙΡΑΝ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΚΑΙ ΑΙ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΝ ΑΥΤΗΝ ΕΚΤΕΛΟΥΜΕΝΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

Μερίζοντες, καθὼς εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἕνα ἀκέραιον ἀντικείμενον, π. χ. ἕνα μῆλον, εἰς ἴσα μέρη, π. χ. εἰς 4, ἀποκτῶμεν τὴν σειρὰν τῶν κοινῶν κλασμάτων : $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, τῆς ὁποίας θεμελιῶδες μὲν κλάσμα εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$, ὅλα δὲ τὰ ἄλλα παράγωγα. Ἂν μερίσωμεν μὲ τὸν ἴδιον τρόπον περισσότερα ἀπὸ ἕνα τέτοια ἀκέραια ἀντικείμενα, ἐπεκτείνομεν τὴν ἀνωτέρω κλασματικὴν σειράν, ἡ δὲ ἐπέκτασις αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ προχωρήσῃ εἰς τὸ ἄπειρον. Ἔτσι ἡ τέλεια κλασματικὴ σειρὰ τῶν τετάρτων εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4} \cdots\cdots$$

Ὅπως τὰ τέταρτα, ἔτσι καὶ τὰ δεύτερα, τὰ τρίτα, τὰ πέμπτα κ.τ.λ. σχηματίζουν ἰδιαιτέρας κλασματικὰς σειράς. Ὑπάρχουν, καθὼς ἠξεύρομεν, τόσαι σειραὶ κοινῶν κλασμάτων, ὅσοι διαιρέται ἢ ὅσαι κλασματικαὶ μονάδες, ἄρα ἄπειραι. Ἡ κατὰ κλασματικὰς τώρα σειρὰς διάταξις τοῦ ἀπείρου ἐπίσης πλήθους τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰσάγει, ὅπως εἶναι εὐνόητον, τάξιν εἰς αὐτά.

Ἂν λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν σειρὰν τῶν τετάρτων, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ μὲν κλάσμα $\frac{4}{4}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ὅλα δὲ τὰ κατόπιν του κλάσματα εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ αὐτὴν καὶ ὅτι εἰς μὲν τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν, εἰς ὅλα δὲ τὰ κατόπιν κλάσματα εἶναι μεγαλύτερός του. Ὅλα αὐτὰ τὰ κοινὰ κλάσματα τῆς προκειμένης σειρᾶς, ὅπως καὶ κάθε ἄλλης, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἢ μεγαλύτερά της, ὀνομάζονται ***μὴ γνήσια*** ἢ ***νόθα*** κλάσματα, διὰ νὰ διακρίνωνται ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ὀνομάζονται ***γνήσια*** κ. κλάσματα. Μερικοὶ διακρίνουν πάλιν τὰ μὴ γνήσια εἰς ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας ἀκεραίας μονάδας, ὁποῖα εἶναι π. χ. εἰς τὴν προκειμένην σειρὰν τὰ $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{4}$ κ.τ.λ., καὶ εἰς ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα, καθὼς π.χ. τὰ $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{13}{4}$ κ. τ. λ., εἶναι ἴσα μὲ ἀριθμοὺς ἀποτελουμένους ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κοινὸν κλάσμα, ἤτοι τοὺς ὀνομαζομένους ***μικτοὺς ἀριθμούς***, ὀνομάζουν δὲ τὰ πρῶτα καὶ ***φαινομενικὰ*** κλάσματα.

Εἰς τὸ ἄπειρον πλῆθος τῶν κ. κλασμάτων εἰσάγομεν, καθὼς εἴδαμεν, τάξιν διατάσσοντες αὐτὰ κατὰ κλασματικὰς σειράς. Ἀλλὰ πῶς θὰ εἰσαγάγωμεν τάξιν καὶ μεταξὺ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κοινῶν κλασμάτων ; Προφανῶς ἂν συσχετίσωμεν κάθε σειρὰν τῶν κ. κλασμάτων μὲ τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων. Γίνεται δὲ αὐτὸ ἁπλούστατα ὡς ἑξῆς. Εἰς τὴν ἀνωτέρω π. χ. σειρὰν τῶν τετάρτων ***τρέπομεν τὰ μὴ γνήσια εἰς ἰσοδυνάμους ἀκεραίους ἢ μικτοὺς ἀριθμούς***. Μὲ τὴν τροπὴν λοιπὸν αὐτὴν δὲν μεταβάλλεται ***ἡ τιμὴ*** τῶν κλασμάτων αὐτῶν, ἀλλὰ μόνον ***ἡ μορφή των***. Ἔτσι λοιπὸν σχηματίζομεν τὴν σειράν :

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{2}{4}$, $2\frac{3}{4}$, 3. . .

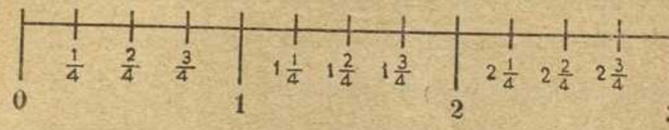
Ἡ συσχέτισις ἑπομένως κάθε σειρᾶς τῶν κ. κλασμάτων μὲ τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων γίνεται διὰ τῆς παρεμβολῆς τῆς πρώτης εἰς τὴν δευτέρην. Σύμφωνα δὲ μὲ τὰ ἀνωτέρω ὀφείλομεν νὰ διακρίνωμεν :

1) τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων : 1, 2, 3, 4 . . .

2) τὴν κάθε σειρὰν τῶν κοινῶν κλασμάτων, ὁποία π. χ. εἶναι ἡ : $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ . . . . .

3) τὴν κάθε ἐμβόλιμην σειράν, ὁποία π. χ. εἶναι ἡ : $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, 2 . . . . .

Αἱ ἐμβόλιμαι σειραὶ αἰσθητοποιοῦνται μὲ τὸν καλύτερον τρόπον ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν γραμμήν. Ἔτσι π. χ. ἡ ἀνωτέρω αἰσθητοποιεῖται ὡς ἑξῆς :



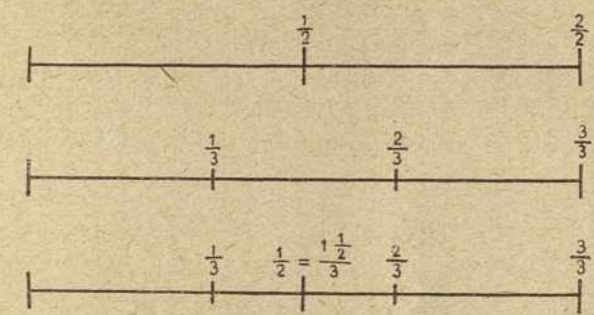
Καθὼς δὲ ἠμποροῦμεν ἀπὸ μίαν σειρὰν τῶν κ. κλασμάτων νὰ μεταπηδήσωμεν εἰς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων καὶ τὴν σχετικὴν ἐμβόλιμην, ἔτσι ἠμποροῦμεν καὶ ἀπὸ τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων καὶ τὴν ἐμβόλιμην νὰ μεταπηδήσωμεν εἰς τὴν σχετικὴν σειρὰν τῶν κ. κλασμάτων. Γίνεται δὲ αὐτὸ μὲ ***τὴν τροπὴν τῶν ἀκεραίων*** τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν ἀκεραίων ***καὶ μικτῶν*** τῆς ἐμβολίμου ***εἰς ἰσοδύναμα μὴ γνήσια κλάσματα***. Καὶ μὲ τὴν τροπὴν λοιπὸν αὐτὴν μεταβάλλεται μόνον ***ἡ μορφή***, ὄχι δὲ καὶ ***ἡ τιμὴ*** τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν μικτῶν. Ἔτσι π. χ. ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐμβόλιμην σειρὰν ἐρχόμεθα εἰς τὴν κλασματικὴν σειρὰν τῶν τετάρτων, ἂν τρέψωμεν τοὺς μὲν ἀκεραίους 1, 2, 3 εἰς τὰ μὴ γνήσια κλάσματα $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{4}$ τοὺς δὲ μικτοὺς $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$ κ. τ. λ. εἰς τὰ μὴ γνήσια κλάσματα $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$ κ. τ. λ.

Ἀλλ' ἂν ἡ συσχέτισις ὁποιασδήποτε σειρᾶς τῶν κ. κλασμάτων μὲ τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων ἠμπορῇ νὰ γίνῃ μὲ ἁπλὸν σχετικὰ τρόπον, πολὺ πολυπλοκώτερη εἶναι ἡ συσχέτισις δύο σειρῶν κ. κλασμάτων ἀναμεταξύ των, π. χ. τῶν δευτέρων καὶ τῶν τετάρτων, τῶν δευτέρων καὶ τῶν τρίτων κ. τ. λ. Κλάσματα τῆς ἴδιας σειρᾶς, ὡς ἔχοντα τὸν ἴδιον παρονομαστήν, λέγονται *ὁμώνυμα,* κλάσματα διαφόρων σειρῶν, ὡς ἔχοντα διαφορετικὸν παρονομαστήν, λέγονται ***ἑτερώνυμα.***

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ συσχετίσωμεν τὰ δεύτερα καὶ τὰ τέταρτα. Πρὸς τοῦτο πρέπει προφανῶς νὰ τρέψωμεν ἢ τὰ δεύτερα εἰς ἰσοδύναμα τέταρτα ἢ τὰ τέταρτα εἰς ἰσοδύναμα δεύτερα. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ ἐν γένει ***τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.*** Καὶ μὲ τὴν τροπὴν αὐτὴν τὰ κ. κλάσματα μεταβάλλουν τὴν μορφήν των, χωρὶς νὰ μεταβάλλουν καὶ τὴν τιμήν των. Ἄς τρέψωμεν πρῶτα ἕνα κλάσμα δευτέρων, π. χ. τὸ $\frac{1}{2}$, εἰς τέταρτα. Μία ἀκεραία μονὰς ἔχει $\frac{4}{4}$. Τὸ $\frac{1}{2}$ της, ἤτοι τὸ ἥμισύ της, θὰ ἔχῃ προφανῶς τὸ ἥμισυ τῶν 4 τετάρτων, ἤτοι $\frac{2}{4}$. Ἑπομένως $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Ἔτσι τὸ $\frac{1}{2}$ ἐτράπη εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα τῶν τετάρτων, τὸ ὁποῖον, καθὼς βλέπομεν, ἔχει καὶ τοὺς δύο ὅρους μεγαλυτέρους ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{1}{2}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἑπομένως αὐτὴν ἕνα κλάσμα μεταπηδᾷ εἰς μίαν ἄλλην κλασματικὴν σειράν, γίνεται ὁμώνυμον μὲ αὐτήν, καθόσον ***τρέπεται εἰς κλάσμα τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἰσοδύναμον καὶ ἔχον ὅρους μεγαλυτέρους ἀπὸ τοὺς ἰδικούς του.*** Ἄν θέλωμεν ἀπεναντίας νὰ τρέψωμεν τὰ $\frac{2}{4}$ εἰς δεύτερα, θὰ σκεφθῶμεν, ὅτι τὸ $\frac{1}{4}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{1}{2}$, ἄρα τὰ $\frac{2}{4}$ εἶναι ὁλόκληρον $\frac{1}{2}$. Ἑπομένως $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Ἔτσι τὸ $\frac{2}{4}$ ἐτράπη εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα τῶν δευτέρων, τὸ ὁποῖον ὅμως ἔχει καὶ τοὺς δύο ὅρους του μικροτέρους ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{2}{4}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἑπομένως αὐτὴν ἕνα κλάσμα γίνεται ὁμώνυμον μὲ ἄλλην σειράν, καθόσον τρέπεται εἰς κλάσμα τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἰσοδύναμον καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους ἀπὸ τοὺς ἰδικούς του ἤ, ὅπως λέγομεν συντομώτερα, καθόσον ***ἁπλοποιεῖται.***

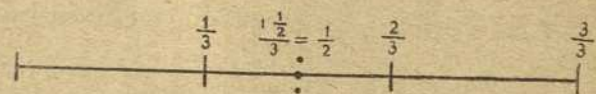
Ἄν θέλωμεν τώρα νὰ συσχετίσωμεν τὰ δεύτερα καὶ τὰ τρίτα, πρέπει πάλιν νὰ τρέψωμεν ἢ τὰ δεύτερα εἰς τρίτα ἢ τὰ τρίτα εἰς δεύτερα. Ἄς τρέψωμεν πρῶτα ἕνα κλάσμα δευτέρων, π.χ. τὸ $\frac{1}{2}$

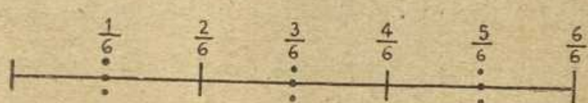
εἰς τρίτα. Μία ἀκεραία μονὰς ἔχει $\frac{3}{3}$· τὸ ἥμισυ, τὸ $\frac{1}{2}$ της, ἔχει τὸ ἥμισυ τῶν $\frac{3}{3}$, ἤτοι $\frac{1\frac{1}{2}}{3}$. Ἔτσι τὸ $\frac{1}{2}$ ἐτράπη εἰς τρίτα. Τὸ πρᾶγμα αἰσθητοποιεῖται καθαρὰ εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα :



Τὸ προκῦψαν κλάσμα $\frac{1\frac{1}{2}}{3}$ ὀνομάζεται ***σύνθετον*** ἢ ***διπλόν,*** διότι ὁ ἀριθμητής του ἔχει πάλιν κλάσμα. Εἰς σύνθετον ἐπίσης κλάσμα καταλήγομεν, καὶ ἄν τρέψωμεν ἕνα κλάσμα τρίτων, π. χ. τὸ $\frac{1}{3}$, εἰς δεύτερα. Μία ἀκεραία μονὰς ἰσοῦται μὲ $\frac{2}{2}$. Τὸ $\frac{1}{3}$ της ἰσοῦται μὲ $\frac{\frac{2}{3}}{2}$. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, κατὰ τὴν μεταπήδησιν δηλ. τοῦ $\frac{1}{2}$ εἰς τὴν σειρὰν τῶν τρίτων, ἔγινε ὅ,τι καὶ κατὰ τὴν μεταπήδησιν τῶν δευτέρων εἰς τὰ τέταρτα· τὸ κλάσμα δηλ. $\frac{1}{2}$ ἔγινε ὁμώνυμον μὲ τὴν σειρὰν τῶν τρίτων, καθόσον ἐτράπη εἰς κλάσμα τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἰσοδύναμον καὶ ἔχον ὅρους μεγαλυτέρους ἀπὸ τοὺς ἰδικούς του. Εἰς τὴν δεύτερην περίπτωσιν, κατὰ τὴν μεταπήδησιν δηλ. τοῦ $\frac{1}{3}$ εἰς τὴν σειρὰν τῶν δευτέρων, ἔγινε ὅ,τι καὶ κατὰ τὴν μεταπήδησιν τῶν τετάρτων εἰς τὰ δεύτερα· τὸ κλάσμα δηλ. $\frac{1}{3}$ ἔγινε ὁμώνυμον μὲ τὴν σειρὰν τῶν δευτέρων, καθόσον ἐτράπη εἰς κλάσμα τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἰσοδύναμον καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους ἀπὸ τοὺς ἰδικούς του. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς δύο προκειμένας περιπτώσεις τὰ προκύπτοντα νέα καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ πρῶτα κλάσματα δὲν εἶναι ἁπλᾶ, καθὼς εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις, ἀλλὰ ***σύνθετα.***

Ἀλλὰ τὰ σύνθετα κλάσματα τρέπονται εἰς ἁπλᾶ. Ἂς λάβωμεν τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ δύο ἀνωτέρω σύνθετα κλάσματα, τὸ $\frac{1\frac{1}{2}}{3}$. Τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, διότι, ἂν τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ τρία τρίτα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει διαιρεθῆ ἡ ἀκεραία μονάς, διαιρεθῇ εἰς 2 ἴσα μέρη, θὰ προκύψουν ἐν ὅλῳ 6 μέρη. Ἄρα 1 $\frac{1}{2}$ τρίτα $= \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$. Ἑπομένως τὸ $\frac{1}{2}$, μὲ τὸ ὁποῖον ἰσοῦται τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{1\frac{1}{2}}{3}$, ἰσοῦται μὲ $\frac{3}{6}$. Τὸ πρᾶγμα αἰσθητοποιεῖται σαφῶς εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα:





Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ δεύτερον σύνθετον κλάσμα $\frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{6}$ καὶ ὅτι ἑπομένως $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Ἔτσι λοιπὸν καὶ τὰ σύνθετα κλάσματα τρεπόμενα εἰς ἁπλᾶ μεταπηδοῦν εἰς ἄλλην κλασματικὴν σειράν. Ἀλλὰ ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω τροπὰς τῶν συνθέτων κλασμάτων εἰς ἁπλᾶ μανθάνομεν καὶ κάτι ἄλλο. Παρατηροῦμεν δηλ., ὅτι τὰ δύο ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$ μὲ τὴν εἰς ἁπλᾶ τροπὴν τῶν ἰσοδυνάμων των συνθέτων κλασμάτων $\frac{1\frac{1}{2}}{3}$ καὶ $\frac{\frac{2}{3}}{2}$, εἰς τὰ ὁποῖα εἶχαν τραπῆ, διὰ νὰ γίνῃ τὸ καθὲν ὁμώνυμον μὲ τὸ ἄλλο, μεταπηδοῦν εἰς μίαν ***νέαν κοινὴν*** κλασματικὴν σειράν, τὴν σειρὰν τῶν ἕκτων, ἔχουσαν παρονομαστὴν μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ἰδικόν των, καὶ γίνονται ἔτσι ***ὁμώνυμα.***

Ἀπὸ αὐτὸ φυσικὰ διδασκόμεθα, ὅτι δύο κλάσματα ἀνήκοντα εἰς δύο διαφορετικὰς σειρὰς ἠμποροῦν νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα καὶ διὰ τῆς μεταπηδήσεως εἰς τρίτην κοινὴν κλασματικὴν σειράν, ἔχουσαν παρονομαστὴν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς παρονομαστὰς τῶν σειρῶν των. Ἡ τροπὴ δὲ αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ ἀπ᾿ εὐθείας, χωρὶς δηλ. νὰ γίνῃ προηγουμένως ἡ λοξοδρομία, τὴν ὁποίαν ἐκάμαμεν ἀνωτέρω, χωρὶς δηλ. νὰ τραπῇ τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ δύο κλάσματα εἰς ὁμώνυμον μὲ τὸ ἄλλο, νὰ γίνῃ μὲ τὴν τροπὴν αὐτὴν σύνθετον καὶ κατόπιν νὰ ἁπλοποιηθῇ. Ἂν π.χ. τὰ δύο αὐτὰ κλάσματα εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$, πρέπει πρὸς τοῦτο ἡ ἀκεραία μονὰς νὰ διαιρεθῇ εἰς περισσότερα μέρη ἀπὸ τὰ 2 καὶ τὰ 3 καὶ ὡρισμένως εἰς τόσα, ὥστε καὶ εἰς τὸ δεύτερόν καὶ εἰς τὸ τρίτον νὰ ἀντιστοιχοῦν μόνον ἀκέραια νέα μέρη, μὲ ἄλλους λόγους εἰς τόσα, ὥστε εἰς τὸν ἀριθμόν των νὰ περιέχωνται καὶ ὁ 2 καὶ ὁ 3 χωρὶς ὑπόλοιπον, νὰ εἶναι δηλ. ποσοστὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ. Πρέπει ἑπομένως νὰ ζητηθῇ ἕνας ἀριθμός, εἰς τὸν ὁποῖον θὰ χωροῦν καὶ ὁ 2 καὶ ὁ 3 χωρὶς ὑπόλοιπον. Τέτοιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 6. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Ὁ παρονομαστὴς τῆς νέας, τῆς κοινῆς σειρᾶς, τὸν ὁποῖον λαμβάνουν τὰ δύο μέχρι τοῦδε ἑτερώνυμα κλάσματα ὀνομάζεται ***κοινὸς*** παρονομαστής. Πρέπει δὲ νὰ σημειωθῇ, ὅτι μὲ τὸν ὅρον ***τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα*** ἐννοεῖται κυρίως ἡ τελευταία αὐτὴ τροπή, ἡ γινομένη διὰ τῆς μεταπηδήσεως τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς νέαν κοινὴν κλασματικὴν σειράν, ἐνῷ ἡ μὲν τροπὴ ἡ γινομένη διὰ τῆς μεταπηδήσεως ἑνὸς κλάσματος εἰς ἄλλην σειρὰν ἔχουσαν μεγαλύτερον παρονομαστὴν καλεῖται κυρίως ***τροπὴ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον ἔχον μεγαλυτέρους ὅρους,*** ἡ δὲ γινομένη διὰ τῆς μεταπηδήσεως ἑνὸς κλάσματος εἰς ἄλλην σειρὰν ἔχουσαν μικρότερον παρονομαστὴν λέγεται ***ἁπλοποίησις*** τοῦ κλάσματος.

Συνοψίζοντες, ὅσα εἴπαμεν ἀνωτέρω διὰ τὰ εἴδη τῶν κοινῶν κλασμάτων, παρατηροῦμεν τὰ ἀκόλουθα. Τὰ κ. κλάσματα διαιροῦνται εἰς ἁπλᾶ καὶ εἰς σύνθετα ἢ διπλᾶ. Τὰ ἁπλᾶ, θεωρούμενα καθ᾿ ἑαυτά, διαιροῦνται εἰς γνήσια καὶ μὴ γνήσια ἢ νόθα. Τὰ μὲν γνήσια διαιροῦνται εἰς θεμελιώδη καὶ παράγωγα, τὰ δὲ μὴ γνήσια εἰς τὰ ἰσοδύναμα μὲ ἀκέραιον (ἢ φαινομενικά) καὶ τὰ ἰσοδύναμα μὲ μικτὸν ἀριθμόν. Τὰ ἁπλᾶ, θεωρούμενα ἐν σχέσει πρὸς ἄλλα κλάσματα, διαιροῦνται εἰς ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα.

Συνοψίζοντες ἐπίσης, ὅσα ἀνωτέρω εἴπαμεν διὰ τὴν συσχέτισιν τῶν σειρῶν τῶν κ. κλασμάτων μὲ τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων καὶ ἀναμεταξύ των, παρατηροῦμεν, ὅτι, διὰ νὰ γίνουν αἱ συσχετίσεις αὗται, ἀπαιτεῖται ἡ ἐκτέλεσις ὡρισμένων ἀριθμητικῶν πράξεων, διὰ τῶν ὁποίων ὅμως δὲν μεταβάλλεται ἡ τιμή, ἀλλὰ μόνον ἡ μορφὴ τῶν ἀριθμῶν, ἐπάνω εἰς τοὺς ὁποίους γίνονται, καὶ αἱ ὁποῖαι δι' αὐτὸ εἶναι δευτερεύουσαι ἀριθμ. πράξεις. Ἔτσι διὰ νὰ συσχετισθῇ ὁποιαδήποτε σειρὰ τῶν κ. κλασμάτων μὲ τὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων καὶ τἀνάπαλιν, ἀπαιτεῖται ἡ τροπὴ τῶν μὴ γνησίων κλασμάτων εἰς ἀκεραίους ἢ μικτοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἡ τροπὴ τῶν μικτῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἀκεραίων εἰς μὴ γνήσια κλάσματα. Διὰ νὰ συσχετισθοῦν ἐξ ἄλλου διάφοροι κλασματικαὶ σειραὶ ἀναμεταξύ των, ἀπαιτεῖται ἡ τροπὴ τῶν κλασμάτων εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ μεγαλυτέρους ὅρους, ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων, ἡ τροπὴ τῶν συνθέτων κλασμάτων εἰς ἁπλᾶ καὶ ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

4. ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΚΟΙΝΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

Ἂν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι κάθε κοινὸν κλάσμα νοεῖται ὡς ἕνα πλῆθος, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ὡρισμένα ἴσα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἀπὸ ὡρισμένας δηλ. κατωτέρας μονάδας, αἱ ὁποῖαι ἀπαριθμοῦνται ἀκριβῶς ὅπως αἱ ἀκέραιαι, θὰ κατανοήσωμεν, ὅτι ἡ ἀρίθμησις τῶν κ. κλασμάτων θὰ γίνεται εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ὅπως ἡ τῶν ἀκεραίων. Ἔτσι ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ μέτρησις, αἱ γινόμεναι εἰς τὴν ἴδιαν κλασματικὴν σειράν, ἐκτελοῦνται καθὼς εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἐφόσον κάμνομεν τὰς ἀνωτέρω πράξεις μὲ κλάσματα τῆς ἴδιας σειρᾶς, ἀνερχόμεθα καὶ κατερχόμεθα εἰς αὐτὴν ἀκριβῶς, ὅπως ἀνερχόμεθα καὶ κατερχόμεθα εἰς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὅταν κάμνωμεν

τὰς ἴδιας πράξεις μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς. Ἡ μόνη διαφορά, ἡ ὁποία παρατηρεῖται κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων αὐτῶν εἰς τὴν κλασματικὴν σειράν, εἶναι ὅτι τὰ ἐξαγόμενά των ὑποβάλλονται εἰς τὰς δυνατὰς τροπάς. Τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα δεικνύουν καθαρώτερα τὸ πρᾶγμα:

1. Ὅπως 2 ἀκέρ. μον. καὶ 3 ἀκέρ. μον. = 5 ἀκέρ. μον., ἔτσι καὶ:

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$$

2. Ὅπως 3 ἀκέρ. μον. — 2 ἀκέρ. μον. = 1 ἀκερ. μον., ἔτσι καὶ:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}.$$

3. Ὅπως εἰς τὰς 6 ἀκερ. μον. χωροῦν αἱ 2 ἀκέρ. μον. 3 φοράς, ἔτσι καὶ:

$$\frac{6}{8}:\frac{2}{8}=3 \text{ φορὰς καὶ}$$

ὅπως εἰς τὰς 7 ἀκερ. μον. χωροῦν αἱ 2 ἀκέρ. μον. $3\frac{1}{2}$ φορ., ἔτσι καὶ:

$$\frac{7}{8}:\frac{2}{8}=3\frac{1}{2} \text{ φορ.}$$

Ἀλλὰ καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ὁποιουδήποτε κ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον γίνεται ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον:

Ὅπως π.χ. 2 ἀκέρ. μον. $\times 3 = 6$ ἀκέρ. μον., ἔτσι καὶ:

$$\frac{2}{4}\times 3=\frac{6}{4}=1\frac{2}{4}.$$

Ἐπίσης δὲ καὶ ὁ μερισμὸς ἑνὸς κοινοῦ κλάσματος μὲ ἕνα ἀκέραιον γίνεται ὅπως ὁ μερισμὸς ἑνὸς ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον:

Ὅπως π.χ. 4 ἀκέρ. μον. : 2 = 2 ἀκέρ. μον., ἔτσι καὶ:

$$\frac{4}{8}:2=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \text{ καὶ}$$

ὅπως 5 ἀκέρ. μον. : $2 = 2\frac{1}{2}$, ἔτσι καὶ:

$$\frac{5}{8}:2=\frac{2\frac{1}{2}}{8}$$

Εἰς τὴν δεύτερην περίπτωσιν τὸ πηλίκον εἶναι σύνθετον κλάσμα, διότι ὁ ἀριθμητὴς 5 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τὸν ἀκέραιον 2.

Ἐν τούτοις ὑπάρχουν καὶ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας αἱ θεμελιώδες πράξεις αἱ γινόμεναι εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα δὲν ἔχουν τὸ ἀνάλογόν των εἰς τοὺς ἀκεραίους, γίνονται δὲ μὲ ἕνα τρόπον, ὁ ὁποῖος προσιδιάζει μόνον εἰς τὰ κλάσματα. Ἀπὸ τὰς περιπτώσεις δὲ αὐτὰς ἐξάγονται εἰδικοὶ κανόνες, ἀφορῶντες μόνον τὴν ἀρίθμησιν τῶν κοινῶν κλασμάτων.

Αὐτὸ συμβαίνει ἐν πρώτοις εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων. Ἐπειδὴ καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἠμποροῦν νὰ γίνουν μόνον μὲ ὁμώνυμα κλάσματα, κατ' ἀνάγκην τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ προστεθοῦν ἢ νὰ ἀφαιρεθοῦν, πρέπει νὰ τραποῦν πρῶτα εἰς ὁμώνυμα μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς τρόπους, τοὺς ὁποίους εἴδαμεν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον. Ἔτσι λοιπὸν ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων, ἐπειδὴ δὲν ἠμποροῦν νὰ γίνουν, πρέπει νὰ μετατραποῦν εἰς πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν ὁμωνύμων κλασμάτων ἰσοδυνάμων μὲ τὰ ἑτερώνυμα. Εἰς τὴν πρότασιν αὐτὴν περιέχεται ἕνας κανών, ὁ ὁποῖος προσιδιάζει μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων.

Εἴδαμεν ἀνωτέρω, ὅτι ὁ μερισμὸς τοῦ κοινοῦ κλάσματος μὲ ἕνα ἀκέραιον γίνεται ὅπως ὁ μερισμὸς τοῦ ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον. Φανερὸν ὅμως εἶναι, ὅτι ὁ μερισμὸς τοῦ κλάσματος ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καθὼς ὁ τοῦ ἀκεραίου, ἂν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον διαιρέτην καὶ ἠμπορῇ νὰ διαιρεθῇ μὲ αὐτόν. Πῶς θὰ μερισθῇ ὅμως ἕνα κλάσμα μὲ ἕνα ἀκέραιον, ἂν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ δὲν ἠμπορῇ νὰ διαιρεθῇ μὲ αὐτόν; Πῶς θὰ μερισθῇ π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{1}{8} : 2$; Προφανῶς εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ μερισμὸς τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἀκέραιον δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ ὅπως ὁ μερισμὸς τοῦ ἀκεραίου μὲ ἕνα ἀκέραιον. Πῶς θὰ γίνῃ λοιπόν; Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ζητεῖται νὰ μερισθῇ τὸ $\frac{1}{8}$ εἰς 2 μέρη καὶ νὰ εὑρεθῇ, πόσον θὰ εἶναι τὸ καθέν. Ἂν κάθε $\frac{1}{8}$ μιᾶς ἀκεραίας μονάδος διαιρεθῇ εἰς *2* ἴσα μέρη, προφανῶς ἡ ὅλη ἀκεραία μονὰς θὰ ἔχῃ μέρη 8×2, ἤτοι 16. Ἄρα τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ 2 μέρη τοῦ $\frac{1}{8}$ θα εἶναι $\frac{1}{16}$ ἢ ἀναλυτικώτερα $\frac{1}{8 \times 2}$. Ἔτσι ἐ-

ξάγεται, ὅτι ἡ διαίρεσις ἑνὸς κ. κλάσματος μὲ ἕνα ἀκέραιον, ὁσάκις ὁ ἀριθμητής του εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ δὲν διαιρεῖται μὲ αὐτόν, γίνεται, ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του μὲ τὸν ἀκέραιον. Εἰς τὸ ἴδιον ἐξαγόμενον καταλήγομεν σκεπτόμενοι καὶ ὡς ἑξῆς. Εἰς ὅσον περισσότερα ἴσα μέρη διαιροῦμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα, τόσον μικρότερα γίνονται τὰ μέρη αὐτά. Ἂν π.χ. διαιρέσω τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 2 φορὰς περισσότερα μέρη ἀπὸ ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα τὴν ἔχω διαιρέσει ἕως τώρα, κάθε νέον μέρος θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ προηγουμένου. Τὸ κ. κλάσμα $\frac{1}{8}$ μᾶς λέγει, ὅτι ἡ ἀκεραία μονὰς ἔχει διαιρεθῇ εἰς 8 ἴσα μέρη· ἂν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν τὸ ἕνα δεύτερον τοῦ $\frac{1}{8}$, πρέπει ἡ ἀκεραία μονὰς νὰ διαιρεθῇ εἰς 8×2, ἤτοι εἰς 16 μέρη. Τὸ καθὲν ἀπ' αὐτά, ἤτοι τὸ $\frac{1}{16}$, εἶναι τὸ ἕνα δεύτερον τοῦ $\frac{1}{8}$. Σημειωτέον τώρα, ὅτι καὶ ἕνα κ. κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μὲν μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον διαιρέτην, δὲν διαιρεῖται ὅμως μὲ αὐτὸν χωρὶς ὑπόλοιπον καὶ τὸ ὁποῖον, καθὼς εἴδαμεν ἀνωτέρω, ἠμπορεῖ νὰ μερισθῇ μὲ αὐτόν, καθὼς μερίζεται ἀκέραιος μὲ ἀκέραιον, μερίζεται εὐκολώτερα μὲ τὸν ἀκέραιον διαιρέτην, ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του μὲ αὐτόν, διότι ἔτσι ἀποφεύγεται τὸ σύνθετον κλάσμα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ὡς ἐκ τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του μὲ τὸν ἀκέραιον. Ἐπειδὴ δὲ μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἠμπορεῖ νὰ διαιρεθῇ καὶ κ. κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς διαιρεῖται χωρὶς ὑπόλοιπον μὲ τὸν ἀκέραιον, ἠμποροῦμεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὸν γενικὸν κανόνα «κ. κλάσμα διαιρεῖται μὲ ἀκέραιον, ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του μὲ αὐτόν», ὁ ὁποῖος προσιδιάζει πάλιν μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων.

Ἐννοεῖται τώρα, ὅτι κάμνοντες ἀναλόγους σκέψεις μὲ τὰς ἀνωτέρω ἠμποροῦμεν νὰ φθάσωμεν εὔκολα εἰς τὸ ἐξαγόμενον, ὅτι καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς κοινοῦ κλάσματος μὲ ἕνα ἀκέραιον, ὁ ὁποῖος γίνεται ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον, ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ παρονομαστοῦ του μὲ τὸν ἀκέραιον, ἐφόσον διαιρεῖται μὲ αὐτὸν χωρὶς ὑπόλοιπον.

Ἔτσι ἐξάγομεν ἕνα νέον κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον, ὁ ὁποῖος προσιδιάζει πάλιν μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων.

Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὰς περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίου μὲ κ. κλάσμα (π.χ. 5 δρ. $\times \frac{1}{2}$, 5 δρ. $\times \frac{3}{4}$) καὶ κ. κλάσματος μὲ ἄλλο κ. κλάσμα (π.χ. $\frac{2}{5}$ δρ. $\times \frac{3}{4}$). Τὰ προβλήματα καὶ τῶν δύο αὐτῶν περιπτώσεων λύονται μὲ ἕνα τρόπον, ὁ ὁποῖος προσιδιάζει μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων καὶ μὲ τὸν ὁποῖον μάλιστα ἐπεκτείνεται ἡ ἀρχικὴ ἔννοια τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὴν ὁποίαν ἔχομεν σχηματίσει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχικὴν αὐτὴν ἔννοιαν πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν ἕνας ἀριθμός, ὁ πολλαπλασιαστέος, θέτεται **ἀμετάβλητος** ὡς προσθετέος τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ἕνας ἄλλος ἀριθμός, ὁ πολλαπλασιαστής. Ἑπομένως 5 δρ. $\times$ 3 σημαίνει 5 δρ. + 5 δρ. + 5 δρ., 5 δρ. $\times 1 =$ 5 δρ. Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἠμπορεῖ νὰ εἶναι μόνον ἀκέραιος ἀριθμός. Ἀλλὰ εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κλασμάτων παρουσιάζεται ὡς πολλαπλασιαστὴς καὶ κλάσμα, ὅπως π. χ. εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα 5 δρ. $\times \frac{1}{2}$, 5 δρ. $\times \frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ δρ. $\times \frac{3}{4}$. Εἰς τὸ πρῶτον ἀπὸ αὐτὰ ζητεῖται νὰ τεθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος 5 δρ. ὡς προσθετέος ὄχι μίαν φοράν, ἀλλὰ $\frac{1}{2}$ φορᾶς, μὲ ἄλλους δηλ. λόγους νὰ μὴ τεθῇ ὁλόκληρος, ἀλλὰ μόνον μὲ τὸ ἕνα δεύτερόν του. Εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα ζητεῖται νὰ τεθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος 5 δρ. ὡς προσθετέος ὄχι μίαν φοράν, ἀλλὰ $\frac{3}{4}$ τῆς φορᾶς, μὲ ἄλλους δηλ. λόγους νὰ τεθῇ ὄχι ὁλόκληρος, ἀλλὰ μόνον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ του, ἤτοι μὲ τὸ $\frac{1}{4}$ του 3 φοράς. Ἐπίσης εἰς τὸ πρόβλημα $\frac{2}{5}$ δρ. $\times \frac{3}{4}$ ζητεῖται νὰ τεθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος $\frac{2}{5}$ δρ. ὡς προσθετέος μὲ τὸ $\frac{1}{4}$ του 3 φοράς. Ἔτσι λοιπὸν εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ προβλήματα ζητεῖται νὰ τεθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ὡς προσθετέος ὄχι ἀμετάβλητος, ὄχι ὁλόκληρος, ἀλλὰ μόνον μὲ ἕνα μέρος του. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μέρος αὐτὸ πρέπει νὰ εὑρεθῇ πρῶτα, δι' αὐτὸ εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ καὶ τὰ ὅμοιά των πρέπει νὰ γίνῃ πρῶτα μία διαίρεσις, ἤτοι ἡ διαίρεσις τοῦ πολλαπλασιαστέου μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Εἰς τὸ πρόβλημα 5 δρ. $\times \frac{1}{2}$, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι μία κλασματικὴ μονάς, μὲ τὴν διαίρεσιν αὐτὴν λύεται καὶ τὸ πρόβλημα, διότι τὸ μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου (δηλ. τὸ ἕνα δεύτερον τοῦ 5, ἤτοι τὰ $\frac{5}{2}$) πρέπει νὰ τεθῇ μίαν μόνον φορὰν $\left(\frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}\right.$ πάλιν). Εἶναι δηλ. ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀκεραίου μὲ μίαν κλασματικὴν μονάδα κατὰ τύπους μόνον πολλαπλασιασιασμός, πράγματι δὲ εἶναι διαίρεσις, ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς 5 $\times$ 1 εἶναι κατὰ τύπους μόνον πολλαπλασιασμός, πράγματι δὲ εἶναι θέσις τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀμεταβλήτου. Εἰς τὸ δεύτερον ὅμως πρόβλημα 5 δρ. $\times \frac{3}{4}$, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι παράγωγον, ἤτοι περιέχει περισσοτέρας ἀπὸ μίαν κλασματικὰς μονάδας, τὸ μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου (ἤτοι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 5), ἀφοῦ εὑρεθῇ $\left(= \frac{5}{4}\right)$, πρέπει νὰ τεθῇ ὡς προσθετέος 3 φοράς, ἤτοι τόσας, ὅσας κλασματικὰς μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής· ἑπομένως 5 δρ. $\times \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ δρ. $+ \frac{5}{4}$ δρ. $+ \frac{5}{4}$ δρ. Ἐπίσης εἰς τὸ τρίτον πρόβλημα $\frac{2}{5}$ δρ. $\times \frac{3}{4}$, ἀφοῦ εὑρεθῇ τὸ τέταρτον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου $\frac{2}{5}$ δρ., τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{2}{5 \times 4} = \frac{2}{20}$, πρέπει νὰ τεθῇ ὡς προσθετέος 3 φοράς· ἑπομένως $\frac{2}{5}$ δρ. $\times \frac{3}{4} = \frac{2}{20}$ δρ. $+ \frac{2}{20}$ δρ. $+ \frac{2}{20}$ δρ. Εἰς ὅλα λοιπὸν τὰ σχετικὰ προβλήματα πρέπει πρῶτα νὰ γίνῃ διαίρεσις (ἡ διαίρεσις τοῦ πολλαπλασιαστέου μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ πολλαπλασιαστοῦ), μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ ὡς προσθετέος, καὶ ἔπειτα νὰ γίνῃ ὁ καθαυτὸ πολλαπλασιασμός, μὲ τὸν ὁποῖον τὸ εὑρεθὲν μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου τίθεται ὡς προσθετέος τόσας φοράς, ὅσας κλασματικὰς μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής, ἤτοι πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Ἔτσι ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών, ὁ ὁποῖος πάλιν προσιδιάζει μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων : «ἀκέραιος ἢ κ. κλάσμα πολλαπλασιάζεται μὲ κ. κλάσμα, ἂν διαιρεθῇ μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος αὐτοῦ, τὸ δὲ πηλίκον πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν ἀριθμητήν του». Ἐπειδὴ δὲ εἰς μὲν τὴν διάταξιν τῆς ἐγγράφου λύσεως τῶν προβλημάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίου μὲ κ. κλάσμα, π. χ. τοῦ προβλήματος 5 δρ. $\times \frac{3}{4}$ ἔχομεν : 5 δρ. $\times \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ δρ. $\times 3 = \frac{5 \times 3}{4}$ δρ. καὶ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων πρῶτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον μὲ τὸν παρονομαστήν, εἰς δὲ τὴν διάταξιν τῆς ἐγγράφου λύσεως τῶν προβλημάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κ. κλάσματος μὲ κ. κλάσμα, π.χ. τοῦ προβλήματος $\frac{2}{5}$ δρ. $\times \frac{3}{4}$ ἔχομεν : $\frac{2}{5}$ δρ. $\times \frac{3}{4} = \left(\frac{2}{5}\right.$ δρ. $\left.: 4\right) \times 3 = \frac{2}{5 \times 4} \times 3 = \frac{2 \times 3}{5 \times 4}$ καὶ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων πρῶτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ἀριθμητὰς καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν, δι' αὐτὸ ὁ ἀνωτέρω κανὼν λαμβάνει εἰς τὴν συνήθη πρᾶξιν τὰς ἑξῆς μορφάς : «ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται μὲ κ. κλάσμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν ἀριθμητήν του, τὸ δὲ γινόμενον διαιρεθῇ μὲ τὸν παρονομαστήν του» καὶ «κ. κλάσμα πολλαπλασιάζεται μὲ κ. κλάσμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἀριθμητὴς μὲ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς μὲ παρονομαστήν, διαιρεθῇ δὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν». Ἡ δὲ ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μὲ τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι ὁ πολλαπλασιαστέος, πρὶν τεθῇ ὡς προσθετέος, ὑφίσταται μίαν μεταβολήν, ἤτοι διαιρεῖται. Μὲ τὴν ἐπέκτασιν αὐτὴν ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λαμβάνει τὴν ἑξῆς πλήρη πλέον μορφήν : πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν ἕνας ἀριθμός, ὁ πολλαπλασιαστέος, θέτεται ἀκέραιος ἢ μὲ ἕνα μέρος του τόσας φορὰς

ὡς προσθετέος, ὅσας ἀκεραίας ἢ κλασματικὰς μονάδας ἔχει ἕνας ἄλλος ἀριθμός, ὁ πολλαπλασιαστής. Προφανὲς δὲ εἶναι, ὅτι καὶ μὲ τὴν πλήρη μορφὴν τῆς ἐννοίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἂν ἐξαιρεθοῦν αἱ περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας πολλαπλασιαστὴς εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1 ἢ μία κλασματικὴ μονάς, κύριον γνώρισμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι τὸ ὅτι κατ' αὐτὸν γίνεται πραγματικὴ ἐπανάληψις, ἔστω καὶ ἂν προηγῆται ἀπὸ αὐτὴν μία διαίρεσις, ὅπως συμβαίνει εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀκεραίου ἢ κ. κλάσματος μὲ κ. κλάσμα.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου μὲ ἕνα κ. κλάσμα, π.χ. $6 : \frac{3}{4}$. Ἐφόσον ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις (6 δρ. $: \frac{3}{4}$ δρ.), ἡ ἐκτέλεσίς της δὲν παρουσιάζει τίποτε νέον ἐν συγκρίσει μὲ τὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀκεραίων, διότι ἡ μέτρησις ἀκεραίου μὲ κ. κλάσμα μετατρέπεται διὰ τῆς τροπῆς τοῦ ἀκεραίου εἰς κλάσμα ὁμώνυμον μὲ τὸν κλασματ. διαιρέτην εἰς μέτρησιν κ. κλάσματος μὲ κ. κλάσμα ὁμώνυμον, ἡ ὁποία πάλιν, καθὼς ἠξεύρομεν, γίνεται ὅπως ἡ μέτρησις ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον. Ἔτσι εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ζητοῦμεν, πόσας φορὰς χωροῦν τὰ $\frac{3}{4}$ δρ. εἰς τὰς 6 δρ. Ἡ 1 δρ. ἰσοῦται μὲ $\frac{4}{4}$, ἄρα αἱ 6 δρ. μὲ $\frac{4 \times 6}{4}$, ἤτοι μὲ $\frac{24}{4}$ δρ. Τὸ πρόβλημά μας λοιπὸν μετατρέπεται εἰς τὸ πρόβλημα : πόσας φορὰς χωροῦν τὰ $\frac{3}{4}$ δρ. εἰς τὰ $\frac{24}{4}$ δρ. ; Τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ δρ. χωροῦν εἰς τὰ $\frac{24}{4}$ δρ. τόσας φοράς, ὅσας ὁ 3 εἰς τὸν 24, ἤτοι 8 φοράς.

Διαφορετικὰ ὅμως ἔχουν τὰ πράγματα εἰς τὸν μερισμὸν ἀκεραίου μὲ κ. κλάσμα, π. χ. 6 δρ. $: \frac{3}{4}$ (ἐφηρμ. προβλ.: Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ἑνὸς ὑφάσματος στοιχίζουν 6 δρ. Πόσον στοιχίζει τὸ 1 μέτρον ;). Τὰ προβλήματα τῆς περιπτώσεως αὐτῆς λύονται μὲ ἕνα τρόπον, ὁ ὁποῖος προσιδιάζει μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων καὶ μὲ τὸν ὁποῖον ἐπεκτείνεται ἡ ἀρχικὴ ἔννοια τοῦ μερισμοῦ, τὴν ὁποίαν ἔχομεν σχηματίσει ἀπὸ τὸν μερισμὸν τῶν ἀκεραίων. Σύμφωνα μὲ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν μερισμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν ἕνας ἀριθμός, ὁ διαιρετέος, μερίζεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ἕνας ἄλλος ἀριθμός, ὁ διαιρέτης, ζητεῖται δὲ νὰ δηλωθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κάθε μέρους. Ἔτσι εἰς τὸ πρόβλημα 6 δρ. : 3 πρόκειται αἱ 6 δρ. νὰ διαιρεθοῦν εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ νὰ δηλωθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κάθε μέρους. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων μερῶν πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 1, ἤτοι νὰ εἶναι 2, 3, 4 κ.τ.λ., πρέπει δηλ. μὲ ἄλλους λόγους ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι πάντοτε ἕνας ἀκέραιος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 1. Αὐτὸ ἄλλωστε τὸ φανερώνει αὐτὴ ἡ ἔννοια «τοῦ μέρους». Ἐπακολούθημα τώρα τοῦ πράγματος αὐτοῦ εἶναι, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ κάθε μέρους (τὸ πηλίκον) πρέπει νὰ εἶναι πάντοτε μικρότερη ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ διαιρετέου. Ἀλλὰ εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων παρουσιάζεται ὡς διαιρέτης καὶ κλάσμα, ὅπως π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 6 δρ. : $\frac{3}{4}$. Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται νὰ μερισθῇ ὁ διαιρετέος 6 δρ. ὄχι μὲ ἀκέραιον διαιρέτην, ἀλλὰ μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ νὰ δηλωθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὅλης ἀκεραίας μονάδος. Ἄς ἴδωμεν πρῶτα, πῶς ἠμπορεῖ νὰ νοηθῇ ὁ μερισμὸς αὐτός, καὶ κατόπιν, πῶς ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ. Ἂν ἐπρόκειτο νὰ μερισθοῦν αἱ 6 δρ. εἰς ἀκέραια μέρη, π. χ. εἰς 2, τί θὰ ἐσήμαινε 6 δρ : 2;

6 δρ. : 2 θὰ ἐσήμαινε : Ὁ διαιρετέος 6 περιέχει 2 ἀκέραια μέρη. Πόσον εἶναι τὸ 1 ἀκέραιον μέρος ;

Ἑπομένως καί :

6 δρ. : 1 σημαίνει : Ὁ διαιρετέος 6 περιέχει 1 ἀκέραιον μέρος. Πόσον εἶναι τὸ 1 αὐτὸ ἀκέρ. μέρος ;

6 δρ. : $\frac{1}{2}$ σημαίνει : Ὁ διαιρετέος 6 περιέχει $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀκεραίου μέρους. Πόσον εἶναι τὸ 1 ἀκέρ. μέρος ;

6 δρ. : $\frac{3}{4}$ σημαίνει : Ὁ διαιρετέος 6 περιέχει $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀκεραίου μέρους. Πόσον εἶναι τὸ 1 ἀκέρ. μέρος ;

Καὶ συντομώτερα : 6 δρ. : 2 σημαίνει : 2 ἀκέραια μέρη=6 δρ.
1 ἀκέρ. μέρος = ;

6 δρ. : $\frac{3}{4}$ σημαίνει: $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀκ.μέρους=6 δρ.
1 ἀκέρ. μέρος = ;

Μόνον ἔτσι θεωρούμενος ὁ μερισμὸς 6 : $\frac{3}{4}$ ἠμπορεῖ νὰ ἐννοηθῇ. Καὶ εἰς αὐτὸν δηλ., ὅπως εἰς τὸν μερισμὸν ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον, ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀκεραίου μέρους, πρέπει ὅμως ἡ τιμὴ αὐτὴ νὰ εὑρεθῇ ὄχι, ὅπως εἰς ἐκεῖνον, μὲ τὸν μερισμὸν τῆς τιμῆς πολλῶν ἀκεραίων μερῶν, ἀλλὰ μὲ τὸν μερισμὸν τῆς τιμῆς (6 δρ.) κάποιου κλάσματος τοῦ ἑνὸς ἀκεραίου μέρους $\left(\text{τοῦ } \frac{3}{4}\right)$. Ἄς ἴδωμεν, πῶς ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ μερισμὸς αὐτός. Τὸ κλάσμα τοῦ ἀκεραίου μέρους εἶναι εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν τὸ $\frac{3}{4}$. Ἡ διδομένη τιμή του εἶναι ὁ διαιρετέος 6 δρ. Ἡ τιμὴ αὐτὴ πρέπει νὰ μερισθῇ ἔτσι, ὥστε ἀπὸ τὸν μερισμὸν νὰ ἐξαχθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου ἀκεραίου μέρους, ἤτοι τῶν $\frac{4}{4}$. Φυσικὰ ἀφοῦ ἡ τιμὴ τῶν $\frac{3}{4}$ εἶναι 6 δρ., ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῶν $\frac{4}{4}$, πρέπει πρῶτα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{4}$ καὶ δι᾽αὐτὸ νὰ μερίσωμεν τὸν διαιρετέον 6 δρ. εἰς 3 μέρη καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{4}$ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν $\frac{4}{4}$ καὶ δι᾽ αὐτὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{4}$ μὲ τὸ 4. Θὰ ἐκτελέσωμεν δηλ. τὴν ζητουμένην πρᾶξιν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς : ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἑνὸς ἀκεραίου μέρους εἶναι 6 δρ., τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μέρους αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ τρίτον μέρος τῶν 6 δρ., ἤτοι $\frac{6}{3}$ δρ. καὶ τὰ $\frac{4}{4}$, ἤτοι τὸ 1 ἀκέραιον μέρος, θὰ εἶναι 4 φορὰς τόσον, ἤτοι $\frac{6}{3}$ δρ. $\times$ 4 $= \frac{6\times4}{3}$ δρ. $=8$ δρ. Τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον 8 δρ. εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν διαιρετέον 6 δρ. καὶ ἐννοοῦμεν φυσικὰ τὸ διατί. Ἀφοῦ ὁ διαιρετέος 6 δρ. εἶναι ἡ τιμὴ τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀκεραίου μέρους, βέβαια ἡ τιμὴ τῶν $\frac{4}{4}$ τοῦ ὅλου ἀκεραίου μέρους, θὰ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν $\frac{3}{4}$. Ἔτσι λοιπὸν διὰ νὰ γίνῃ ὁ μερισμὸς 6 δρ. : $\frac{3}{4}$ πρῶτα γίνεται ἑ-νας μερισμὸς καὶ ἔπειτα ἕνας πολλαπλασιασμός· κατ' ἀρχὰς δηλ. μερίζεται ὁ διαιρετέος εἰς τόσα μέρη, ὅσας κλασματικὰς μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς 1 κλασματικῆς μονάδος τοῦ ὅλου ἀκεραίου μέρους (μερισμὸς μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρέτου), καὶ ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν ἐπαναλαμβάνεται τόσας φοράς, ὅσας κλασματικὰς μονάδας ἔχει τὸ ὅλον ἀκέραιον μέρος, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ζητουμένη τιμή του (πολλαπλασιασμὸς τοῦ εὑρεθέντος μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου). Ἀπὸ τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως ἐξάγεται ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών, ὁ ὁποῖος πάλιν προσιδιάζει εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων, : «ἀκέραιος μερίζεται μὲ κ. κλάσμα, ἂν διαιρεθῇ μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, τὸ δὲ πηλίκον πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν παρονομαστήν του». Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν διάταξιν τῆς ἐγγράφου λύσεως τῶν σχετικῶν προβλημάτων, π. χ. τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος 6 δρ. : $\frac{3}{4}$, ἔχομεν : 6 δρ. : $\frac{3}{4} = \frac{6}{3} \times 4 = \frac{6 \times 4}{3}$ καὶ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων πρῶτα πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἀκέραιον μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασμ. διαιρέτου καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον μὲ τὸν ἀριθμητήν του, δι' αὐτὸ ὁ ἀνωτέρω κανὼν λαμβάνει εἰς τὴν συνήθη πρᾶξιν τῆς ἑξῆς μορφήν : «ἀκέραιος μερίζεται μὲ κ. κλάσμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ μὲ αὐτὸ ἀντεστραμμένον». Ἡ ἐπέκτασις τώρα, ἡ ὁποία γίνεται εἰς τὴν ἀρχικὴν ἔννοιαν τοῦ μερισμοῦ μὲ τὸν μερισμὸν ἀκεραίου διὰ κοινοῦ κλάσματος ἔγκειται εἰς τὰ ἑξῆς, ὅτι δηλ. ὁ διαιρετέος μερίζεται καὶ εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας ***κλασματικὰς*** μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης καὶ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τῆς ἀκεραίας μονάδος πρέπει μετὰ τὸν μερισμὸν νὰ γίνῃ καὶ ἕνας πολλαπλασιασμός. Μὲ τὴν ἐπέκτασιν αὐτὴν ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ μερισμοῦ λαμβάνει τὴν ἑξῆς πλήρη πλέον μορφήν του : «μερισμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν ἕνας ἀριθμός, ὁ διαιρετέος, μερίζεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας ἀκεραίας ἢ κλασματικὰς μονάδας ἔχει ἕνας ἄλλος ἀριθμός, ὁ διαιρέτης, εἰς κάθε δὲ περίπτωσιν δηλώνεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος». Προφανῶς δὲ καὶ μὲ τὴν πλήρη αὐτὴν μορφὴν τῆς ἐννοίας τοῦ μερισμοῦ, ἂν ἐξαιρεθοῦν αἱ περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας διαιρέτης εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1 ἢ μία κλασματικὴ μονάς,

κύριον γνώρισμά του ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι ὁ πραγματικὸς μερισμὸς εἰς ἴσα μέρη, ἔστω καὶ ἂν ὁ μερισμὸς αὐτὸς ἀκολουθῆται ἀπὸ ἕνα πολλαπλασιασμόν, ὅπως συμβαίνει εἰς τὸν μερισμὸν ἀκεραίου διὰ κ. κλάσματος.

Ἂς ἔλθωμεν τέλος εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς διαιρέσεως κ. κλάσματος μὲ ἄλλο κ. κλάσμα, π. χ. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$.

Ἂν ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶναι μέτρησις (π. χ. πόσας φορὰς χωροῦν τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρ. εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μ. ;), ἡ ἐκτέλεσίς της δὲν παρουσιάζει τίποτε τὸ νέον ἐν συγκρίσει μὲ τὴν ἐκτέλεσίν της εἰς τοὺς ἀκεραίους, διότι ἡ μέτρησις ἑνὸς κλάσματος μὲ ἄλλο ἑτερώνυμον μετατρέπεται εἰς μέτρησιν μὲ ὁμώνυμον, ἡ ὁποία, καθὼς γνωρίζομεν, γίνεται ὅπως ἡ μέτρησις ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον· π. χ. $\frac{3}{4}$ μ. : $\frac{2}{5}$ μ. $= \frac{15}{20}$ μ. : $\frac{8}{20}$ μ. $= 15 : 8 = 1\frac{7}{8}$ φορ.

Ἂν ἡ ἀνωτέρω διαίρεσις εἶναι μερισμὸς (π. χ. τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς πράγματος στοιχίζουν $\frac{3}{4}$ τῆς δρ. Πόσον στοιχίζει ὁλόκληρον τὸ πρᾶγμα ; $\frac{3}{4}$ δρ. : $\frac{2}{5}$), ἡ ἐκτέλεσις τοῦ μερισμοῦ αὐτοῦ θὰ στηριχθῇ εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ γνωστοῦ πλέον μερισμοῦ ἀκεραίου μὲ κ. κλάσμα. Ἂν τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ πράγματος στοιχίζουν $\frac{3}{4}$ τῆς δρ., τὸ $\frac{1}{5}$ στοιχίζει τὸ δεύτερον μέρος τοῦ $\frac{3}{4}$ δρ., ἤτοι $\frac{3}{4 \times 2}$ δρ. καὶ τὰ $\frac{5}{5}$, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ πρᾶγμα, στοιχίζει 5 φορὰς τόσον, ἤτοι $\frac{3 \times 5}{4 \times 2}$ δρ. $= \frac{15}{8}$ δρ. $= 1\frac{7}{8}$ δρ. Ἔτσι ἐξάγεται εἰς τὴν συνήθη πρᾶξιν ὁ ἀκόλουθος κανών, προσιδιάζων ἐπίσης μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων, : «κ. κλάσμα μερίζεται μὲ κ. κλάσμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ μὲ αὐτὸ ἀντεστραμμένον».

. ΑΙ ΣΕΙΡΑΙ ΚΑΙ ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ. Η ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΑΝΑΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕ ΤΑΣ ΣΕΙΡΑΣ ΤΩΝ Κ. ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ. ΑΙ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΝ ΑΥΤΗΝ ΕΚΤΕΛΟΥΜΕΝΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

Μερίζοντες ἕνα ἀκέραιον ἀντικείμενον, π.χ. μίαν ῥάβδον ἐκτάσεως ἑνὸς μέτρου, εἰς 10 ἴσα μέρη ἀποκτῶμεν τὴν σειρὰν τῶν δεκαδ. κλασμάτων τῶν δεκάτων : 0,1 0,2 0,3 0,4 κ. τ. λ., τῆς ὁποίας θεμελιῶδες μὲν δεκαδ. κλάσμα εἶναι τὸ 0,1, ὅλα δὲ τὰ ἄλλα παράγωγα. Ἐν τούτοις τὰ δέκα δέκατα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ ἀκέραιον ἀντικείμενον, τὴν ἀκεραίαν μονάδα, δὲν ἠμποροῦν νὰ παρασταθοῦν μὲ δεκαδικὸν κλάσμα. Ἔτσι ἡ σειρὰ τῶν καθαυτὸ δεκαδ. κλασμάτων τῶν δεκάτων τελειώνει εἰς τὰ δέκα δέκατα καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς : 0.1—0,2. . . 0,9 —1. Βέβαια μερίζοντες μὲ τὸν ἴδιον τρόπον περισσότερα ἀπὸ ἕνα ἀκέραια ἀντικείμενα καθὼς τὸ προηγούμενον ἠμποροῦμεν νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν σειρὰν τῶν δεκάτων καὶ πέραν τῶν δέκα δεκάτων καὶ μάλιστα ἐπ' ἄπειρον, ἀλλ' ἡ πέραν τῶν δεκάτων προχωροῦσα σειρὰ δὲν θὰ εἶναι σειρὰ καθαυτὸ δεκαδ κλασμάτων τῶν δεκάτων, ἀλλὰ ἐμβόλιμη, διότι τὰ ἀπὸ τὰ δέκα δέκατα καὶ ἐπάνω κλάσματα τῆς σειρᾶς αὐτῆς δὲν ἠμποροῦν νὰ παρασταθοῦν μὲ καθαυτὸ δεκαδ. κλάσματα, ἀλλὰ ὅσα μὲν ἀπ' αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμα μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας ἀκεραίας μονάδας, παριστάνονται μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς, τὰ δὲ ὑπόλοιπα παριστάνονται μὲ μικτοὺς ἀριθμούς, ἀποτελουμένους ἀπὸ ἕνα ἀκέραιον καὶ ἕνα δεκαδ. κλάσμα. Ἔχει δηλ. ἡ σειρὰ αὐτὴ ὡς ἑξῆς :

0,1 0,2 0.3. . . . 0,9 1 1,1 1,2 1,3. . . . 1,9 2 2,1 κ. τ. λ.

Εἰς τὴν σειρὰν λοιπὸν τῶν δεκαδ. κλασμάτων δὲν ὑπάρχουν φαινομενικὰ καὶ ἐν γένει νόθα δεκαδ. κλάσματα. Ὑπάρχουν μόνον γνήσια δεκαδ. κλάσματα, ὅσα εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, καὶ μικτὰ δεκαδ. κλάσματα, ὅσα εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ παριστάνονται μὲ ἕνα ἀκέραιον καὶ ἕνα γνήσιον δεκαδ. κλάσμα.

Παρόμοια μὲ τὴν σειρὰν τῶν δεκάτων εἶναι διαμορφωμέναι

καὶ αἱ ἄλλαι σειραὶ τῶν δεκαδ. κλασμάτων, ἤτοι αἱ σειραὶ τῶν ἑκατοστῶν, τῶν χιλιοστῶν κ.τ.λ.

Ἡ συσχέτισις τώρα δύο σειρῶν δεκαδ. κλασμάτων ἀναμεταξύ των δὲν παρέχει δυσκολίαν, διότι ἡ μονὰς κάθε σειρᾶς περιέχει 10 μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ δι' αὐτὸ κάθε δεκαδικὸν κλάσμα τῆς προηγούμενης σειρᾶς εἶναι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ ἀντιστοίχου δεκ. κλάσματος τῆς ἑπομένης. Ἔτσι διὰ νὰ τραπῇ ἕνα δεκαδ. κλάσμα τῆς σειρᾶς τῶν δεκάτων, π.χ. τὸ 0,1, εἰς ἰσοδύναμον δεκαδ. κλάσμα τῆς ἀμέσως κατωτέρας σειρᾶς τῶν ἑκατοστῶν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ 10 ($0,1, \times 10 = 0,10$), ἀπεναντίας δὲ διὰ νὰ τραπῇ ἕνα δεκαδ. κλάσμα τῆς σειρᾶς τῶν ἑκατοστῶν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδ. κλάσμα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας σειρᾶς τῶν δεκάτων, πρέπει νὰ διαιρεθῇ μὲ τὸ 10 ($0,10 : 10 = 0,1$). Ἀπὸ τὰς πράξεις αὐτὰς ἐξάγεται ὁ μηχανικὸς κανών : «δεκαδ. κλάσμα τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον τῆς ἀμέσως μὲν κατωτέρας τάξεως, ἂν προστεθῇ εἰς τὸ τέλος του ἕνα μηδενικόν, τῆς ἀμέσως δὲ ἀνωτέρας, ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ τέλος του ἕνα μηδενικόν».

Ἐπίσης δὲν παρουσιάζει δυσκολίας ἡ συσχέτισις ὁποιασδήποτε σειρᾶς τῶν δεκαδ. κλασμάτων μὲ τὴν ἀντίστοιχον ἢ καὶ ἄλλην τῶν κοινῶν κλασμάτων, καθὼς καὶ ἡ συσχέτισις τῶν κ. κλασμάτων μὲ τὰ δεκαδικά. Κάθε δεκαδικὸν κλάσμα τῆς σειρᾶς τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν, χιλιοστῶν κ.τ.λ. τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον κοινὸν τῆς ἴδιας σειρᾶς, ἂν παρασταθῇ γραπτῶς ἔτσι, ὥστε νὰ σημειώνεται καὶ ὁ ἀριθμητής του καὶ ὁ παρονομαστής του. Ἔτσι τὸ δεκαδ. κλάσμα 0,250 εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ κοινὸν $\frac{250}{1000}$. Ἂν δὲ μάλιστα τὸ κ. κλάσμα ἁπλοποιηθῇ, ὅπως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ $\frac{250}{1000}$ εἰς $\frac{1}{4}$, τὸ δεκαδ. κλάσμα ἠμπορεῖ νὰ τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον κοινὸν ὄχι μόνον τῆς ἀντιστοίχου σειρᾶς τῶν κ. κλασμάτων, ἀλλὰ καὶ ἄλλης. Ἐξ ἄλλου κάθε κοινὸν κλάσμα τῆς σειρᾶς τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν, χιλιοστῶν κ.τ.λ. τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν κλάσμα τῆς ἴδιας σειρᾶς, ἂν γραφῇ μὲ τὸν τρόπον τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. Ἔτσι $\frac{37}{100} = 0,37$. Ἀλλὰ καὶ ὁποιονδήποτε ἄλλο κοινὸν κλάσμα ἠμπορεῖ νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής του μὲ τὸν παρονομαστήν του.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι εἴδη μὲν τῶν δεκαδ. κλασμάτων εἶναι τὰ γνήσια καὶ τὰ μικτά, πράξεις δέ, μὲ τὰς ὁποίας συσχετίζονται αἱ σειραὶ τῶν δεκαδ. κλασμάτων ἀναμεταξύ των καὶ μὲ τὰς σειρὰς τῶν κοινῶν κλασμάτων καὶ μὲ τὰς ὁποίας ἐπέρχεται μόνον μεταβολὴ μορφῆς, ὄχι δὲ καὶ τιμῆς, εἶναι ἡ τροπὴ ἑνὸς δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς ἰσοδύναμον κατωτέρας ἢ ἀνωτέρας τάξεως, ἡ τροπὴ δεκαδ. κλάσματος εἰς ἰσοδύναμον κοινὸν καὶ ἡ τροπὴ κοινοῦ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν.

6. ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

Δὲν εἶναι δύσκολον νὰ εὕρωμεν, πῶς θὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ θεμελιώδεις πράξεις εἰς τὰ δεκαδ. κλάσματα, ἂν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ἡ ἔννοιά των ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν συνένωσιν δύο γνωρισμάτων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ μὲν ἕνα εἶναι, ὅτι τὰ δεκαδ. κλάσματα ἀπὸ τὴν πραγματικὴν ἄποψιν, ἤτοι ἀπὸ τὴν ἄποψιν τῆς τιμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνουν, εἶναι κλάσματα, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι ὅτι ἀπὸ τὴν εἰδολογικὴν ἄποψιν, ἤτοι ἀπὸ τὴν ἄποψιν τοῦ τρόπου τῆς γραφῆς των, εἶναι ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ὅμοιοι μὲ τοὺς ἀκεραίους. Ἀπὸ τὰ γνωρίσματά των αὐτὰ ἐννοοῦμεν ἀμέσως, ὅτι ἡ ἀρίθμησίς των εἶναι τόσον ἀρίθμησις κλασμάτων, ὅσον καὶ ἀρίθμησις καθὼς ἡ τῶν ἀκεραίων. Εἶναι ἀρίθμησις κλασμάτων, διότι ὁ ἀριθμῶν μὲ αὐτά, ἂν πρόκειται νὰ ἀριθμῇ μὲ κατανόησιν, πρέπει νὰ ἔχῃ ἀποκτήσει τὴν ἔννοιαν τοῦ κλάσματος καὶ νὰ παριστάνῃ μὲ αὐτὸ ἕνα ἢ περισσότερα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει μερισθῇ ἡ ἀκεραία μονάς, πρέπει ἐπίσης νὰ ἔχῃ ἀποκτήσει τὰς κλασματικὰς παραστάσεις τῶν δεκάτων, τῶν ἑκατοστῶν, τῶν χιλιοστῶν κ.τ.λ., τὸ δὲ σπουδαιότερον πρέπει νὰ ἀντιλαμβάνεται τὰ κλάσματα αὐτὰ εἰς κάθε σκέψιν ἀκριβῶς ἔτσι, ὅπως ἀντιλαμβάνεται τὰ δεύτερα, τὰ τρίτα τὰ τέταρτα κ.τ.λ. Εἶναι ἀρίθμησις καθὼς ἡ τῶν ἀκεραίων, διότι ἡ ἀκολουθία τῶν σκέψεων

εἰς κάθε πρᾶξιν καὶ ὁ ἐξωτερικὸς μηχανισμὸς τῶν πράξεων ἔχουν καὶ εἰς τὴν ἀρίθμησιν αὐτήν, ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀκεραίων. Ἡ διπλῆ αὐτὴ φύσις τῆς ἀριθμήσεως τῶν δεκαδ. κλασμάτων θὰ φανῇ καθαρώτατα ἀπὸ τὴν ἐξέτασιν τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς τὰ κλάσματα αὐτά.

Ἂς ἔλθωμεν πρῶτα εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ προστεθοῦν τὰ δεκαδ. κλάσματα :

0,5 Ὁ κάμνων τὴν πρόσθεσιν αὐτὴν μὲ κατανόησιν ἔχει
0,57 πάντοτε εἰς τὸν νοῦν του, ὅτι προσθέτει τὰ κλάσματα 5
0,215 δέκατα, 57 ἑκατοστὰ κ. τ. λ. Ἔχει ἐπίσης εἰς τὸν νοῦν
0,156 του, ὅτι τὰ κατ' ἀρχὰς προσθετόμενα 5 καὶ 6 εἶναι τὰ
1,441 κλάσματα 5 χιλιοστὰ καὶ 6 χιλιοστά, ὅτι τὰ κατόπιν προσθετόμενα 7,1,5 εἶναι τὰ κλάσματα 7 ἑκατοστά, 1 ἑκατοστὸν καὶ 5 ἑκατοστὰ κ.τ.λ. Ὅταν δὲ προσθέτῃ πρῶτα τὰ 5 χιλιοστὰ καὶ τὰ 6 χιλιοστά, κατόπιν δὲ τὰ 7 ἑκατοστά, 1 ἑκατοστὸν καὶ 5 ἑκατοστὰ καὶ οὕτ. καθ., ἔχει ὑπ' ὄψιν του, ὅτι τὰ κατὰ σειρὰν προσθετόμενα αὐτὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα καὶ πρέπει νὰ προστεθοῦν, ὅπως προσθέτονται τὰ ὁμώνυμα κλάσματα (ἤτοι ὅπως οἱ ἀκέραιοι). Ἀφοῦ εὕρῃ τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιοστῶν, τὸ τρέπει εἰς ἑκατοστὰ καί, ἀφοῦ εὕρῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκατοστῶν, τὸ τρέπει εἰς δέκατα κ. οὕτ. καθ. Ἐφόσον ὁ ἀριθμῶν κάμνει ὅλα αὐτά, εἶναι προφανές, ὅτι ἀριθμεῖ μὲ κλάσματα. Ἀλλὰ εἶναι ἐπίσης φανερόν, ὅτι, διὰ νὰ ἐργάζεται ἔτσι, πρέπει νὰ ἔχῃ ὡρισμένας γνώσεις ἀπὸ τὰ κλάσματα καὶ τὴν ἀρίθμησίν των, πρέπει δηλ. νὰ κατέχῃ τὴν ἔννοιαν τῶν κλασμάτων καὶ τὴν ἔννοιαν τῶν δεκάτων, τῶν ἑκατοστῶν, τῶν χιλιοστῶν κ.τ.λ. καὶ νὰ γνωρίζῃ, πῶς προσθέτονται τὰ ὁμώνυμα κλάσματα καὶ πῶς τρέπονται κλάσματα μιᾶς σειρᾶς εἰς ἰσοδύναμα ἄλλης. Ἄλλας ὅμως γνώσεις ἐκτὸς αὐτῶν δὲν χρειάζεται ἀπὸ τὰ κλάσματα καὶ τὴν ἀρίθμησίν των, διὰ νὰ κάμῃ τὴν πρόσθεσιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων. Διότι ἡ ἀκολουθία τῶν σκέψεων εἰς αὐτὴν καὶ ὁ ἐξωτερικὸς μηχανισμός της δὲν ἔχουν ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἴδιων κλασμάτων ὡς κοινῶν, ἤτοι ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν :

$$\overset{100}{\frac{5}{10}}+\overset{10}{\frac{57}{100}}+\overset{1}{\frac{215}{1000}}+\overset{1}{\frac{156}{1000}}=\frac{500}{1000}+\frac{570}{1000}+\frac{215}{1000}+\frac{156}{1000}=\frac{1441}{1000}=1\ \frac{441}{1000},$$

ἀλλ' ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν ὁποιωνδήποτε πολυψηφίων ἀκεραίων, καθὼς π.χ. εἰς τὴν :

6
28
749
362
1145

Συμβαίνει δὲ αὐτό : 1) διότι εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων ὡς ἐκ τοῦ τρόπου τῆς γραφῆς των οἱ προσθετέοι κατ' ἀνάγκην θεωροῦνται ὡς χωρισμένοι εἰς δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά κ.τ.λ., δι' αὐτὸ δὲ προσθέτονται κατὰ σειρὰν χωριστὰ οἱ ὁμοειδεῖς μερικοὶ προσθετέοι καὶ ἐξάγονται ἔτσι μερικὰ ἀθροίσματα, ἀκριβῶς ὅπως συμβαίνει εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων μὲ τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κ.τ.λ., ἐνῷ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κοινῶν κλασμάτων δὲν γίνεται ἀνάλυσις τοῦ κάθε προσθετέου, 2) διότι εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων, ἀκριβῶς ἐπειδὴ προσθέτονται κατὰ σειρὰν χωριστὰ οἱ ὁμοειδεῖς μερικοὶ προσθετέοι, δὲν παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη νὰ τραποῦν τὰ ἑτερώνυμα δεκαδ. κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ἐνῷ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κοινῶν κλασμάτων εἶναι ἀπαραίτητη ἡ τροπὴ αὐτή, καὶ 3) διότι εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων τὸ μερικὸν ἄθροισμα τῶν χιλιοστῶν πρέπει νὰ τρέπεται εἰς ἑκατοστά, τὸ μερικὸν ἄθροισμα τῶν ἑκατοστῶν εἰς δέκατα, τὸ μερικὸν ἄθροισμα τῶν δεκάτων εἰς ἀκεραίας μονάδας, ὅπως ἀκριβῶς εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων τρέπεται εἰς δεκάδας, τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων εἰς ἑκατοντάδας κ. οὕτ. καθ., ἐνῷ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κ. κλασμάτων ἀπὸ τὸ γενικὸν ἄθροισμα ὅλων τῶν κλασμάτων ἐξάγονται ἀμέσως αἱ ἀκέραιαι μονάδες.

Περιττὸν εἶναι νὰ ἀναπτύξωμεν τὰ γινόμενα εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων, διότι εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰ συμβαίνοντα εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Ἄς ἴδωμεν τώρα τὸν πολλαπλασιασμὸν δεκαδ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον καὶ ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ γίνουν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί :

0,24	0,24
6	16
1,44	1,44
	2,4
	3,84

Ὁ πολλαπλασιάζων μὲ κατανόησιν ἔχει ὑπ' ὄψιν του κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν αὐτῶν, ὅτι πολλαπλασιάζει τὸ κλάσμα 24 ἑκατοστὰ μὲ τοὺς ἀκεραίους 6 καὶ 16 καὶ ὅτι πολλαπλασιάζων τὸ 4 καὶ κατόπιν τὸ 2 μὲ τὸν ἀκέραιον 6 κ.τ.λ. πολλαπλασιάζει τὸ κλάσμα 4 ἑκατοστὰ καὶ κατόπιν τὸ κλάσμα 2 δέκατα μὲ τὸν ἀκέραιον αὐτὸν κ.τ.λ. Ἔχει ἐπίσης ὑπ' ὄψιν του, ὅτι ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς μερικοὺς αὐτοὺς πολλαπλασιασμοὺς εἶναι πολλαπλασιασμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον καὶ πρέπει νὰ γίνῃ, ὅπως γίνεται αὐτός, γίνεται δέ, ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον. Μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἑκατοστῶν μὲ τὸν ἀκέραιον τρέπει τὸ γινόμενον εἰς δέκατα καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δεκάτων τρέπει τὸ γινόμενόν των εἰς ἀκεραίας μονάδας, εἰς δὲ τὴν πρόσθεσιν τῶν μερικῶν γινομένων τοῦ δευτέρου πολλαπλασιασμοῦ ἔχει πρὸ ὀφθαλμῶν, ὅτι προσθέτει ὁμώνυμα κλάσματα. Διὰ νὰ ἐργάζεται δὲ ἔτσι, πρέπει νὰ γνωρίζῃ ἀπὸ τὰ κλάσματα καὶ τὴν ἀρίθμησίν των ὅλα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἴδαμεν ὅτι πρέπει νὰ γνωρίζῃ κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων, ἀκόμη δὲ καὶ τὸ πῶς πολλαπλασιάζεται κλάσμα μὲ ἀκέραιον. Κατὰ τὰ ἄλλα ὅμως δὲν θὰ ἐργάζεται ὅπως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἰδίων κλασμάτων ὡς κοινῶν, ἤτοι ὅπως εἰς τοὺς πολλαπλασιασμούς : $\frac{24}{100} \times 6 = \frac{24 \times 6}{100} = \frac{144}{100} = 1\ \frac{44}{100}$ καὶ $\frac{24}{100} \times 16 = \frac{24 \times 16}{100} = \frac{384}{100} = 3\ \frac{84}{100}$, ἀλλ' ὅπως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων, ἤτοι ὅπως εἰς τοὺς πολλαπλασιασμούς :

24	24
6	16
144	144
	24
	384

Ἐνῷ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν κοινοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον ὁ κλασματικὸς πολλαπλασιαστέος δὲν ἀναλύεται εἰς μερικὰ κλάσματα, δι' αὐτὸ δὲ σχηματίζεται ἕνα μόνον γινόμενον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον καὶ ἐξάγονται αἱ τυχὸν ὑπάρχουσαι ἀκέραιαι μονάδες, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δεκαδ. κλασμάτων μὲ ἀκέραιον ὁ πολλαπλασιαστέος θεωρεῖται ὡς χωρισμένος εἰς δέκατα, ἑκατοστὰ κ.τ.λ., δι' αὐτὸ δὲ σχηματίζονται μερικὰ γινόμενα καὶ τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τρέπεται εἰς μονάδας ἀνωτέρας τάξεως, ὅπως ἀκριβῶς συμβαίνει εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων. Ὅταν δὲ ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶναι διψήφιος, τριψήφιος κ.τ.λ., ἀφοῦ πολλαπλασιασθοῦν οἱ μερικοὶ πολλαπλασιαστέοι μὲ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ αὐτοῦ, πολλαπλασιάζονται κατόπιν μὲ τὰς δεκάδας του, τὸ δὲ ψηφίον τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου μερικοῦ πολλαπλασιασμοῦ μὲ τὰς δεκάδας καταλαμβάνει μίαν θέσιν ἀριστερώτερα ἀπὸ τὸ ψηφίον τοῦ πρώτου μερικοῦ πολλαπλασιασμοῦ μὲ τὰς μονάδας, ἀκριβῶς ὅπως συμβαίνει εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων. Διότι, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν τὸ ἀνωτέρω σημειωθὲν παράδειγμα $0{,}24 \times 16$, 4 ἑκατ. $\times$ 1 δεκάδ. ἤτοι $\times 10 = 40$ ἑκατ., ἤτοι $= 4$ δέκατα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ γραφοῦν εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, ἀκριβῶς ὅπως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων 24×16 αἱ 4 μον. $\times$ 1 δεκ., ἤτοι $\times 10 = 40$ μον. ἤτοι 4 δεκάδ., αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ γραφοῦν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. – Σημειωτέον τώρα, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς δεκαδ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον, καὶ μάλιστα μὲ ἀκέραιον διψήφιον καὶ ἐν γένει πολυψήφιον, ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ πρακτικώτερα μὲ ἄλλον τρόπον. Ὁ δεκαδ. πολλαπλασιαστέος ἠμπορεῖ, καθὼς εἶναι γνωστόν, νὰ γραφῇ καὶ ὡς συγκεκριμένος ἀκέραιος, δηλαδὴ ὡς ἀκέραιος μὲ τὴν ἐπωνυμίαν τῶν ἑκατοστῶν (24 ἑκατ.). Δὲν εἶναι ἑπομένως ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιασθῇ ὡς δεκ. κλάσμα, ὅπως ἔγινεν ἀνωτέρω, ἀλλὰ ἠμπορεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὡς ἀκέραιος. Τὸ γινόμενον εἶναι φυσικὰ ἑκατοστά, τρέπεται δὲ εἰς ἀκεραίας μονάδας, ἂν διαιρεθῇ μὲ τὸν 100. Ἀπὸ τὴν λύσιν αὐτὴν ἐξάγεται εἰς τὴν συνήθη πρᾶξιν ὁ ἑξῆς μηχανικὸς κανών: «δεκαδ. κλάσμα πολλαπλασιάζεται μὲ ἀκέραιον ὅπως ἀκέραιος μὲ ἀκέραιον, ἀπὸ δὲ τὸ γινόμενον ἀποχωρίζομεν μὲ τὴν ὑποδιαστολὴν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστέος». Μὲ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ὁ πολλαπλασιασμὸς δεκαδ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον γίνεται, ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον, ὁ δὲ ἀριθμῶν μὲ αὐτὸν δὲν ἔχει ἀνάγκην νὰ γνωρίζῃ τίποτε ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων. Ἀξιοσημείωτον δὲ εἶναι, ὅτι ὁ τρόπος αὐτὸς προσεγγίζει καὶ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν κοινοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον· διότι, ὅπως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν κ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον, ἔτσι καὶ ἐδῶ πρῶτα πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς μὲ τὸν ἀκέραιον, κατόπιν δὲ τὸ

γινόμενον διαιρεῖται μὲ τὸν παρονομαστήν. Ἐν τούτοις δὲν εἶναι ἀνάγκη ὁ τρόπος αὐτὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ στηριχθῇ εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων, διότι, ὅπως εἴδαμεν, ὁ δεκαδ. πολλαπλασιαστέος λαμβάνεται ὡς συγκεκριμένος ἀκέραιος.

Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ διαίρεσις δεκαδικοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον, π.χ. ἡ διαίρεσις:

```
0,348 | 3
3     |______
 04     0,116
  18
```

Ἄς ἔχωμεν ἐκ παραλλήλου ὑπ' ὄψιν μας καὶ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ ὡς κοινοῦ κλάσματος, ἤτοι τὴν διαίρεσιν: $\frac{348}{1000} : 3 = \frac{348:3}{1000} = \frac{116}{1000}$ καὶ τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον, π. χ. τὴν:

```
348 | 3
    |______
04    116
 18
```

Καὶ ὁ ἐκτελῶν τὴν διαίρεσιν τοῦ δεκαδ. κλάσματος 0,348 μὲ τὸν ἀκέραιον 3 πρέπει νὰ κατέχῃ μὲν καὶ τὰς ἄλλας γενικὰς γνώσεις τὰς σχετικὰς μὲ τὰ κλάσματα, αἱ ὁποῖαι, καθὼς εἴδαμεν, χρειάζονται καὶ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν μέχρι τοῦδε ἐξετασθεισῶν πράξεων, νὰ γνωρίζῃ δὲ ἀκόμη, πῶς διαιρεῖται κλάσμα μὲ ἀκέραιον, νὰ γνωρίζῃ δηλ., ὅτι ἕνα κλάσμα ἠμπορεῖ νὰ διαιρεθῇ μὲ ἕνα ἀκέραιον, ὅπως καὶ ἕνας ἀκέραιος μὲ ἄλλον. Κατὰ τὰ ἄλλα ὅμως θὰ ἐργάζεται ὅπως εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων. Ὁ δεκαδικὸς διαιρετέος θὰ ἀναλύεται εἰς δέκατα, ἑκατοστὰ κ.τ.λ., ὁ καθένας δὲ ἀπὸ τοὺς μερικοὺς αὐτοὺς διαιρετέους θὰ διαιρῆται κατὰ σειρὰν μὲ τὸν διαιρέτην καὶ θὰ ἐξάγωνται μερικὰ πηλίκα, ὅπως συμβαίνει καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον. Εἰς τὴν διαίρεσιν κ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον ὁ κλασματικὸς διαιρετέος δὲν ἀναλύεται εἰς μερικὰ κλάσματα, δι' αὐτὸ δὲ καὶ σχηματίζεται ἕνα μόνον πηλίκον. Παρ' ὅλην τώρα αὐτὴν τὴν διαφορὰν ἡ διαίρεσις κ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον, ἐφόσον γίνεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἀκέραιον, ὁμοιάζει μὲ τὴν διαίρεσιν δεκαδ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον, εἰς τὴν ὁποίαν ἐπίσης ὁ δεκαδικὸς ἀριθμητὴς διαιρεῖται μὲ τὸν ἀκέραιον. Ἐνῷ ὅμως ἡ διαίρεσις τοῦ δεκαδ. κλάσματος ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ μόνον μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν καὶ δι' αὐτὸ πάντοτε ὁμοιάζει μὲ τὴν διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων, ἡ διαίρεσις κοινοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος δὲν διαιρῆται μὲ αὐτόν, γίνεται καλύτερα μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ παρονομαστοῦ του μὲ τὸν ἀκέραιον, ἤτοι μὲ ἕνα τρόπον, ὁ ὁποῖος προσιδιάζει μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κοινῶν κλασμάτων. Ἡ διαίρεσις π.χ. τοῦ κ. κλάσματος $\frac{523}{1000}:4$ δὲν θὰ γίνῃ ἔτσι : $\frac{523:4}{1000}=\frac{130\frac{3}{4}}{1000}$, ἀλλὰ ἔτσι : $\frac{523}{1000\times4}=\frac{523}{4000}$, ἐνῷ ἡ διαίρεσις τοῦ ἰδίου κλάσματος ὡς δεκαδικοῦ γίνεται μόνον μὲ τὸν πρῶτον τρόπον δηλ. $0{,}523:4=0{,}523\,\underline{|\,4\quad}=0{,}13075$.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου (ἢ δεκαδ. κλάσματος) μὲ δεκαδ. κλάσμα (π.χ. $26\times0{,}6$ ἢ $0{,}26\times0{,}6$) ἠμπορεῖ βέβαια νὰ γίνῃ καὶ χωρὶς τὴν γνῶσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίου (ἢ κλάσματος) μὲ κλάσμα. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 26 (ἢ τὸ δεκ. κλάσμα 0,26) μὲ 6 δέκατα, τὸν πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν ἀκέραιον 6, ἤτοι μὲ πολλαπλασιαστὴν 10 φορὰς μεγαλύτερον. Τὸ γινόμενον θὰ εἶναι 156 (ἢ εἰς τὴν δευτέρην περίπτωσιν 1,56). Ἐπειδὴ ὅμως τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι 10 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ τὸ διαιρέσωμεν μὲ τὸ 10, τὸ ὁποῖον κάμνομεν ἀποχωρίζοντες ἀπὸ αὐτὸ 1 ψηφίον μὲ τὴν ὑποδιαστολήν, ὅτε θὰ ἔχωμεν 15,6 (ἢ εἰς τὴν δευτέρην περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ μετακινήσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά, 0,156). Φυσικὰ δὲ εἰς τὴν δευτέρην περίπτωσιν, ἤτοι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δεκ. κλάσματος μὲ δεκαδ. κλάσμα ($0{,}26\times0{,}6$) ἠμποροῦμεν ἐξ ἀρχῆς νὰ θεωρήσωμεν καὶ τοὺς δύο παράγοντας ὡς ἀκεραίους. Τὸ γινόμενόν των 156 θὰ εἶναι χιλίας φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ζητούμενον, δι' αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ τὸ διαιρέσωμεν μὲ τὸ 1000, τὸ ὁποῖον κάμνομεν ἀποχωρίζοντας ἀπὸ αὐτὸ 3 ψηφία μὲ τὴν ὑποδιαστολήν, ὅτε θὰ ἔχωμεν 0,156. Ἀπὸ τὸν τρόπον αὐτὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μὲ δεκαδ. κλάσμα ἐξάγονται εἰς τὴν συνήθη πρᾶξιν οἱ μηχανικοὶ κανόνες: «ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται μὲ δεκαδ. κλάσμα, καθὼς μὲ ἀκέραιον, ἀπὸ δὲ τὸ γινόμενον ἀποχωρίζονται τόσα δεκαδ. ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ δεκαδ. πολλαπλασιαστὴς» καὶ «δεκαδ. κλάσματα πολλαπλασιάζονται καθὼς ἀκέραιοι; ἀπὸ δὲ τὸ γινόμενόν των ἀποχωρίζονται τόσα δεκαδ. ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες». Ἔτσι εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μὲ δεκαδ. κλάσματα ἐργαζόμεθα μὲ τὰ κλάσματα αὐτά, ὡσὰν νὰ ἦσαν ἀκέ-

ραιοι, ἐννοεῖται ὅμως, ἀφοῦ τὰ προβλήματα αὐτὰ ὑποστοῦν μίαν **μετατροπήν**· ἔτσι τὸ μὲν πρόβλημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίου μὲ δεκαδ. κλάσμα $26\times0{,}6$ μετατρέπεται εἰς τὸ $(26\times6):10$, τὸ δὲ πρόβλημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δεκαδ. κλάσματος μὲ δεκαδ. κλάσμα $0{,}26\times0{,}6$ μετατρέπεται εἰς τὸ $(0{,}26\times6):10$ ἢ εἰς τὸ $(26\times6):(100\times10)$. — Πρέπει ἐν τούτοις νὰ σημειωθῇ, ὅτι μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μὲ δεκαδ. κλάσμα δὲν ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐννοήσουν καθαρὰ τὴν φύσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ. Μὲ τὸ ὅτι ὁ ἀκέραιος 26 (ἢ τὸ δεκαδ. κλάσμα 0,26) πολλαπλασιάζεται πρῶτα μὲ τὸν 6 καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενόν των διαιρεῖται μὲ τὸν 10, δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐξηγήσουν τὸ $26\times0{,}6$ (ἢ τὸ $0{,}26\times0{,}6$). Τί θὰ εἰπῇ «ὁ 26 πολλαπλασιάζεται μὲ 0,6» ; Αὐτὸ θὰ ἠμπορέσουν νὰ τὸ ἐννοήσουν, μόνον ἂν ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτὸς στηριχθῇ ἐπάνω εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μὲ κοινὸν κλάσμα, ἤτοι ἐδῶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν $26\times\frac{6}{10}$ ἢ τὸν $\frac{26}{100}\times\frac{6}{10}$. Ὅ,τι θὰ εἰπῇ $26\times\frac{6}{10}$, τὸ ἴδιον θὰ εἰπῇ καὶ $26\times0{,}6$, θὰ εἰπῇ δηλαδή, ὅτι ὁ 26 λαμβάνεται μὲ τὸ δέκατον μέρος του 6 φορὰς (ἤτοι $=\frac{26}{10}\times6$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ $(26:10)\times6$ εἰς τὴν δευτέρην). Ἐπίσης ὅ,τι θὰ εἰπῇ $\frac{26}{100}\times\frac{6}{10}$, τὸ ἴδιον θὰ εἰπῇ καὶ $0{,}26\times0{,}6$, θὰ εἰπῇ δηλαδή, ὅτι τὸ $\frac{26}{100}$ ἢ τὸ 0,26 λαμβάνεται μὲ τὸ δέκατον μέρος του 6 φορὰς (ἤτοι $=\left(\frac{26}{100}:10\right)\times6$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ $(0{,}26:10)\times6$ εἰς τὴν δευτέρην). Ὅπως δὲ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀκεραίου 26 μὲ τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{6}{10}$ ἀπὸ τὴν διάταξιν τῆς ἐγγράφου λύσεως τῆς πράξεως $\frac{26\times6}{10}$ ἐξάγεται, ὅτι ἠμπορεῖ πρῶτα νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ κατόπιν τὸ γινόμενόν των νὰ διαιρεθῇ μὲ τὸν παρονομαστήν, ἔτσι καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀκεραίου 26 μὲ τὸ δεκαδ. κλάσμα 0,6 χάριν τῆς εὐκολίας πρῶτα πολλαπλασιάζεται ὁ ἀκέραιος μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δεκαδικοῦ πολλαπλασιαστοῦ, κατόπιν δὲ τὸ γινόμενόν των διαιρεῖται μὲ τὸ

10, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον γίνεται, ἂν ἀπὸ αὐτὸ ἀποχωρισθῇ ἕνα ψηφίον μὲ τὴν ὑποδιαστολήν. Μὲ ἀνάλογον τρόπον ἐφαρμόζεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δεκαδ. κλάσματος μὲ δεκαδ. κλάσμα ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κοινῶν κλασμάτων, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον κλάσμα πολλαπλασιάζεται μὲ κλάσμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἀριθμητὴς μὲ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς μὲ παρονομαστήν, διαιρεθῇ δὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν. Κατ' ἀρχὰς πολλαπλασιάζονται οἱ ἀριθμηταὶ τῶν δύο δεκαδ. κλασμάτων, ἀπὸ δὲ τὸ γινόμενόν των ἀποχωρίζονται τόσα δεκαδ. ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες.

Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου ἢ δεκαδ. κλάσματος μὲ δεκαδ. κλάσμα, εἶναι προφανές, ὅτι δὲν ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν εἰς αὐτὰς οἱ κανόνες τοῦ μερισμοῦ ἀκεραίου μὲ κοινὸν κλάσμα «ἀκέραιος μερίζεται μὲ κ. κλάσμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ μὲ αὐτὸ ἀντεστραμμένον» καὶ τοῦ μερισμοῦ κ. κλάσματος μὲ κοινὸν κλάσμα «κ. κλάσμα μερίζεται μὲ κ. κλάσμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ μὲ αὐτὸ ἀντεστραμμένον» (π. χ. εἰς τὴν διαίρεσιν 85 : 0,5 δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς κανόνας αὐτούς, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον : $85 : \frac{5}{10} = \frac{85\times10}{5} = \frac{850}{5}$ κ.τ.λ. καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν 0,85 : 0,5 δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ δεύτερος, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον $\frac{85}{100} : \frac{5}{10} = \frac{85\times10}{100\times5} = \frac{850}{500}$ κ.τ.λ.), ἠμποροῦν ὅμως καὶ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν οἱ κανόνες τῆς μετρήσεως ἀκεραίου μὲ κ. κλάσμα καὶ κ. κλάσματος μὲ ἄλλο (π.χ. ὅπως $\frac{80}{100} : \frac{4}{10} = \frac{80}{100} : \frac{40}{100} = 80 : 40 = 2$, ἔτσι καὶ $0{,}80 : 0{,}4 = 0{,}80 : 0{,}40 = 80 : 40 = 2$). — Ἐν τούτοις ἠμποροῦν αἱ διαιρέσεις αὐταὶ νὰ γίνουν καὶ μὲ τὴν τροπὴν τοῦ δεκαδικοῦ διαιρέτου εἰς ἀκέραιον, πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον γίνεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ αὐτὸν καὶ τὸν διαιρετέον μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου· ἔτσι θὰ ἔχωμεν 85 : 0,5 = 850 : 5 καὶ 0,85 : 0,5 = 8,5 : 5. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν φυσικὰ τὰ σχετικὰ προβλήματα ὑφίστανται μίαν ***μετατροπήν***· ἀπὸ προβλήματα διαιρέσεως μὲ δεκαδ. κλάσμα μετατρέπονται εἰς προβλήματα διαιρέσεως μὲ ἀκέραιον.

Ἂν ἀνασκοπήσωμεν ὅλα τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ὡς πρὸς τὴν ἀρίθμησιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἦτο πράγματι ὀρθὸς ὁ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ παρόντος κεφαλαίου γενόμενος χαρακτηρισμός της, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον ἡ ἀρίθμησις αὐτὴ εἶναι τόσον ἀρίθμησις κλασμάτων ὅσον καὶ ἀρίθμησις καθὼς ἡ τῶν ἀκεραίων. Ἀπὸ ὅλας τὰς ἀριθμ. πράξεις τῶν δεκαδ. κλασμάτων μόνον ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις μὲ δεκαδ. κλάσμα ἠμποροῦν νὰ γίνωνται ἢ ὅπως εἰς τοὺς ἀκεραίους, ἀφοῦ ὅμως τὰ σχετικὰ προβλήματα ὑποστοῦν κάποιαν μετατροπήν, ἢ ὅπως εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα, καλὸν ὅμως εἶναι ἐν πάσῃ περιπτώσει νὰ στηριχθοῦν αἱ πράξεις αὐταί, καὶ ἰδίως ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ δεκαδ. κλάσμα, εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων, ἂν πρόκειται ἡ φύσις των νὰ κατανοηθῇ καθαρὰ ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Φυσικὰ δέ, ἐφόσον ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ δεκαδ. κλάσμα θὰ στηρίζεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μὲ κ. κλάσμα, θὰ πρέπῃ ὁ ἀριθμῶν νὰ κατέχῃ μίαν πρᾶξιν τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως, ἡ ὁποία δὲν γίνεται ὅπως εἰς τοὺς ἀκεραίους, ἀλλὰ μὲ τρόπον προσιδιάζοντα μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν αὐτήν. Ὅλαι τώρα αἱ ἄλλαι ἀριθμητικαὶ πράξεις τῶν δεκαδ. κλασμάτων, ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις δ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον, γίνονται καθὼς εἰς τοὺς ἀκεραίους, πάντοτε ὅμως μὲ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι ὁ ἀριθμῶν κατέχει τὴν ἔννοιαν τῶν κλασμάτων (δευτέρων, τρίτων, τετάρτων κ.λ.π., δεκάτων, ἑκατοστῶν, χιλιοστῶν κ.λ.π.) καὶ γνωρίζει ὡρισμένας πράξεις τῆς κλασματ. ἀριθμήσεως, ὅπως τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων, τὸν πολλαπλασιασμὸν κλάσματος μὲ ἀκέραιον, τὴν διαίρεσιν κλάσματος μὲ ἀκέραιον τὴν γινομένην διὰ τοῦ μερισμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ του μὲ τὸν ἀκέραιον καὶ τὴν τροπὴν εἰς κλάσμα ἰσοδύναμον ἀνωτέρας ἢ κατωτέρας τάξεως.[1] Ἀλλ' ὅλαι αὐταὶ αἱ πράξεις τῆς κλασματ. ἀριθμήσεως εἶναι ἀπὸ ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας ἐργαζόμεθα μὲ τὰ κλάσματα καθὼς μὲ τοὺς ἀκεραίους, καὶ ὄχι ἀπὸ ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας

[1] Μόνον ὁ πολλαπλασιασμὸς δ. κλάσματος μὲ ἀκέραιον ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ μὲ τρόπον, μὴ προϋποθέτοντα γνώσεις ἀπὸ τὴν κλασματικὴν ἀρίθμησιν (ἴδ. ἀν. σ. 184).

ἐργαζόμεθα μὲ αὐτὰ κατὰ τρόπον προσιδιάζοντα μόνον εἰς τὴν κλασματ. ἀρίθμησιν.

---

7. Η ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΚΑΤΩΤΕΡΟΝ ΣΧΟΛΕΙΟΝ.

Μέχρι τῆς εἰσαγωγῆς τῶν δεκαδικῶν νομισμάτων, μέτρων καὶ σταθμῶν τὰ δεκαδ. κλάσματα σχεδὸν ἐφυτοζωοῦσαν εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον. Τὸ Πρωσσικὸν μάλιστα Διάταγμα τοῦ 1854 τὰ ἐθεωροῦσε ὡς περιττὰ καὶ δι᾽ αὐτὰ ἀκόμη τὰ Διδασκαλεῖα. Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν μνημονευθεῖσαν εἰσαγωγὴν ἄρχισαν τὰ δεκαδ. κλάσματα νὰ ὑπερτιμῶνται σημαντικώτατα. Ἐφάνηκε μάλιστα πρὸς στιγμήν, ὅτι ἔφθασεν ἡ τελευταία ὥρα τῶν κ. κλασμάτων. Ἔτσι ὁ *Rückbeil* ἔλεγε: «Τὰ κ. κλάσματα θὰ ἔχουν εἰς τὸ ἑξῆς τὴν μέχρι τοῦδε τύχην τῶν δεκαδικῶν». Ὁ δὲ *Zöllner* μάλιστα ὑπερθεματίζων ἔγραφε τὰ ἑξῆς: «Τὸ ὅτι ἡ ἁμαρτία τῶν γονέων, οἱ ὁποῖοι εἶχαν εἰσαγάγει τὰ κ. κλάσματα, παιδεύει ἀκόμη τὰ τέκνα, διότι ἀναγκάζονται ἀκόμη νὰ ταλαιπωροῦνται μὲ αὐτὸ τὸ ἄχρηστον καὶ δυσκίνητον φορτίον, εἶναι μία ἀνήκουστη ἀδικία, τῆς ὁποίας ἡ ἄρσις καὶ ὁ ἐξιλασμὸς εἶναι καθῆκον κάθε φιλανθρώπου». Ἡ μονομερὴς ὅμως αὐτὴ ἀντίληψις δὲν ηὗρε φυσικὰ παρὰ ἐλαχίστους ὀπαδούς. Ὅτι τὰ δεκαδ. κλάσματα εἶναι πολὺ χρησιμώτερα ἀπὸ τὰ κοινὰ καὶ διὰ τὸν πρακτικὸν βίον καὶ διὰ τὰ ἄλλα εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον διδασκόμενα μαθήματα, ὡς πρὸς αὐτὸ δὲν χωρεῖ βέβαια ἀμφιβολία. Ἀναμφίβολον ὅμως εἶναι ἐξ ἀντιθέτου, ὅτι καὶ τὰ κ. κλάσματα δὲν στεροῦνται ὅλως διόλου ἀξίας ἀπὸ τὴν μνημονευθεῖσαν ὑλικὴν ἄποψιν, ἐνῷ ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν εἰδολογικήν, ἤτοι τὴν καθαρῶς ἀριθμητικὴν ἄποψιν πλεονεκτοῦν ἀπὸ τὰ δεκαδικά.

Ὡς πρὸς τὴν τελευταίαν αὐτὴν ἄποψιν πρέπει ἰδίως νὰ τονισθοῦν τὰ ἀκόλουθα:

1. Ἐνῷ τὰ προβλήματα τῶν δεκαδ. κλασμάτων ὡς ἐκ τοῦ τρόπου τῆς παραστάσεως τῶν κλασμάτων αὐτῶν εἶναι κατάλληλα σχεδὸν μόνον διὰ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν, τὰ προβλήματα τῶν κοινῶν εἶναι κατάλληλα καὶ διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης, ἠμποροῦν δὲ δι᾽ αὐτὸ νὰ συντελέσουν καὶ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς δεξιότητος τῶν μαθητῶν εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ εἰς τὴν ἐνίσχυσιν τῆς μνήμης τῶν ἀριθμῶν.

2. Ἐνῷ τὰ προβλήματα τῶν κ. κλασμάτων εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον σύνθετα, ἤτοι ἀπαιτοῦν τὴν ἐκτέλεσιν περισσοτέρων τῆς μιᾶς πράξεων (πρβ. π. χ. τὸ σχετικῶς ἁπλούστερον πρόβημα $\frac{6}{8}$ πήχ. $\times$ 4, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις ἐν τούτοις ἀπαιτεῖ τὴν ἐκτέλεσιν πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως), δι᾽ αὐτὸ δὲ ἀναπτύσσουν ἰδιαζόντως τὴν δεξιότητα τῶν μαθητῶν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων. τὰ προβλήματα τῶν δεκαδ. κλασμάτων εἶναι ὀλιγώτερον κατάλληλα πρὸς ἀνάπτυξιν τῆς δεξιότητος αὐτῆς, διότι ἡ συστηματικὴ κατάταξις τῶν δεκαδ. ψηφίων κάμνει περιττὴν τὴν ἐκτέλεσιν ἀρκετῶν ἀριθμητ. πράξεων, αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων.

3. Ἐνῷ τὰ κ. κλάσματα ὡς ἐκ τῆς μεγίστης ποικιλίας τῶν παρονομαστῶν των δίδουν εὐκαιρίαν εἰς ἐκτέλεσιν πράξεων μὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς ἀριθμούς, τὰ δεκαδικά, ἐπειδὴ οἱ παρονομασταί των περιορίζονται μόνον εἰς τὰ δέκατα, ἑκατοστὰ κ.τ.λ., δὲν δίδουν εὐκαιρίαν εἰς ἐκτέλεσιν πράξεων μὲ ποικίλους ἀριθμούς.

4. Ἐνῷ ἡ ἀρίθμησις τῶν κ. κλασμάτων ἀποκλείει τὴν μηχανικὴν ἐργασίαν, διαρκῶς δὲ ἀπαιτεῖ καὶ διαρκῶς ἀναπτύσσει τὴν μετὰ κατανοήσεως ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητ. πράξεων, ἀπεναντίας ἡ ἀρίθμησις τῶν δεκαδ. κλασμάτων ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν κλασμάτων αὐτῶν συνεπάγεται τὴν μηχανικὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητ. πράξεων εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἀρίθμησις τῶν κοινῶν ἀπαιτεῖ τὴν κατανόησιν.

5. Ἡ γνῶσις τῶν κοινῶν κλασμάτων καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των εἶναι ἀπαραίτητη διὰ τὴν κατανόησιν ἄλλων ἀριθμῶν καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των. Ἡ κατανόησις αὐτῶν τῶν δεκαδ. κλασμάτων καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν κοινῶν καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των. Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα καὶ τὴν κλασματικὴν διάταξιν τῶν σχετικῶν πράξεων δὲν εἶναι δυνατὴ χωρὶς τὴν γνῶσιν τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν ὑλικὴν ἄποψιν παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ κοινὰ κλάσματα δὲν εἶναι ὅλως διόλου ἄχρηστα διὰ τὸν πρακτικὸν βίον καὶ τὰ ἄλλα μαθήματα τοῦ σχολείου. Ἐν πρώτοις χρησιμοποιοῦνται ἀκόμη καὶ ἀπὸ ἐμᾶς καὶ ἀπὸ ἄλλους μέτρα καὶ σταθμὰ μὴ ἔχοντα δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν, συχνὰ δὲ οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἀναφερόμενοι εἰς αὐτὰ παριστάνονται εὐκολώτερα μὲ κοινὰ κλάσματα (πρβ. $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας, $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως, $\frac{1}{2}$ τοῦ στατῆρος, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς, 1 βαθμὸς Κελσίου $= \frac{4}{5}$ βαθμ. Ῥεωμύρου, ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι $3\frac{1}{7}$ φορ. μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν διάμετρον κ.τ.λ.), τὰ δὲ σχετικὰ προβλήματα λύονται ἁπλούστερα μὲ τὴν κλασματικὴν ἀρίθμησιν. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰ νομίσματα, τὰ μέτρα καὶ τὰ σταθμά, τὰ ἔχοντα δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν ἠμποροῦμεν κάποτε νὰ ἐφαρμόζωμεν ἐπωφελέστερα τὴν ἀρίθμησιν τῶν κοινῶν παρὰ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων· ἔτσι ἀντὶ νὰ κάμωμεν τοὺς πολλαπλασιασμοὺς 0,25 δρ. $\times$16 καὶ 0,75 μ. $\times$16, προτιμότερον εἶναι νὰ κάμωμεν τοὺς πολλαπλασιασμοὺς $\frac{1}{4}$ δρ. $\times$ 16 καὶ $\frac{3}{4}$ μ. $\times$ 16. Ἐπίσης εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λαμβάνεται συνηθέστατα ὡς ἐπιτόκιον τὸ $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{4}$ κ. τ. λ. τοῖς %. Ἄλλωστε ὅλα τὰ τόσον χρήσιμα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύονται εὐκολώτερα καὶ ἁπλούστερα μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα καὶ τὴν κλασματικὴν διάταξιν τῶν σχετικῶν πράξεων.

Ἀποβλέποντες λοιπὸν τόσον εἰς τὴν εἰδολογικὴν ὅσον καὶ εἰς τὴν ὑλικὴν σημασίαν τῆς ἀριθμήσεως τῶν κ. κλασμάτων κατανοοῦμεν, πόσον ἀναγκαία εἶναι ἡ διδασκαλία της καὶ εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον. Ἠμπορεῖ δὲ καὶ πρέπει ἡ διδασκαλία αὐτὴ νὰ ἀρχίσῃ νὰ γίνεται καὶ κατ' αὐτὴν ἀκόμη τὴν διδασκαλίαν τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων, εἰς τὴν ὁποίαν πολὺ συχνὰ παρουσιάζονται περιπτώσεις ὁδηγοῦσαι φυσικὰ καὶ ἀβίαστα εἰς τὴν μετάδοσιν θεμελιωδῶν καὶ ἁπλῶν γνώσεων σχετικῶν μὲ τὰ κ. κλάσματα καὶ τὴν ἀρίθμησίν των. Ὡς πρὸς τὸ ζήτημα αὐτὸ εἴμεθα

σύμφωνοι μὲ τοὺς περισσοτέρους Μεθοδικούς, οἱ ὁποῖοι ἀρχίζουν νὰ μεταδίδουν τέτοιας κλασματικὰς γνώσεις εἰς τοὺς μαθητὰς ἀκόμη ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου σχολικοῦ ἔτους. Ἐννοεῖται ὅμως, ὅτι δὲν ἀρκεῖ μόνον αὐτὴ ἡ σποραδικὴ καὶ ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῆς ἄλλης ἀριθμητικῆς ὕλης γινομένη διδασκαλία τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως, ἡ ὁποία ἄλλωστε, ὅπως εἶναι εὐνόητον, θὰ περιορίζεται εἰς ἐκείνας μόνον τὰς περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας τὰ κλάσματα ἀριθμοῦνται ὅπως οἱ ἀκέραιοι, δὲν θὰ ἐκτείνεται δὲ εἰς ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας ἐφαρμόζονται οἱ ἰδιαίτεροι νόμοι τῆς κλασματ. ἀριθμήσεως. Πρέπει φυσικὰ νὰ ἐπακολουθήσῃ καὶ ἰδιαίτερη καὶ συστηματικὴ διδασκαλία τῶν κ. κλασμάτων, μὲ τὴν ὁποίαν οἱ μαθηταὶ θὰ εἰσαχθοῦν καὶ εἰς τοὺς ἰδιαιτέρους νόμους τῆς κλασματ. ἀριθμήσεως. Ἐν τούτοις εἶναι προφανές, ὅτι ἡ συστηματικὴ διδασκαλία των πρέπει νὰ περιορισθῇ εἰς τὰ πρέποντα ὅρια, διὰ νὰ ἀφεθῇ ἔτσι περισσότερος χρόνος καὶ δοθῇ μεγαλύτερη ἔκτασις εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι πράγματι πολὺ χρησιμώτερα ἀπὸ τῆς ὑλικῆς ἀπόψεως. Πρὸς τοῦτο φυσικὰ πρέπει νὰ ἐκλέγωνται πρὸς διδασκαλίαν ἐκεῖναι μόνον αἱ κλασματικαὶ ὕλαι, ὅσαι ὄντως συντελοῦν πρὸς ἐκπλήρωσιν καὶ τοῦ εἰδολογικοῦ καὶ τοῦ ὑλικοῦ σκοποῦ τῆς διδασκαλίας.

---

8. Η ΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ.

Ὡς πρὸς τὸ ζήτημα τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχουν εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ δημοτ. σχολείου τὰ κοινὰ καὶ τὰ δεκαδ. κλάσματα, ὡς πρὸς τὸ ζήτημα δηλ., ἂν ἡ ἀριθμ. διδασκαλία πρέπει νὰ ἀρχίζῃ μὲ τὰ κοινὰ ἢ μὲ τὰ δεκαδ. κλάσματα, δὲν ὑπάρχει ὁμοφωνία μεταξὺ τῶν Μεθοδικῶν.

Εἶναι ἑπόμενον, ὅτι οἱ Μεθοδικοὶ οἱ φρονοῦντες, ὅτι δὲν ὑπάρχουν δεκαδ. κλάσματα, ἀλλὰ μόνον δεκαδ. ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι καὶ εἶναι συνέχεια τῶν ἀκεραίων κάτω ἀπὸ τὴν μονάδα, καὶ ὅτι ἡ ἀρίθμησις τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν εἶναι ὅμοια μὲ τὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀκεραίων, δι' αὐτὸ δὲ καὶ εὐκολώτερη ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων, τῆς ὁποίας ἡ γνῶσις εἶναι ὅλως διόλου περιττὴ διὰ τὴν κατανόησίν της, ὑποστηρίζουν τὴν γνώμην, ὅτι ἡ ἐξέτασις τῶν δεκαδ. ἀριθμῶν πρέπει νὰ συνδέεται μὲ τὴν ἐξέτασιν τῶν ἀκεραίων καὶ ὅτι ἑπομένως ἡ διδασκαλία των πρέπει νὰ γίνῃ πρὸ τῆς συστηματικῆς διδασκαλίας τῶν κ. κλασμάτων. Ὑπὲρ τῆς γνώμης των δὲ αὐτῆς συνηγορεῖ, καθὰ παρατηροῦν, καὶ τὸ γεγονός, ὅτι ἡ ἀρίθμησις τῶν δεκαδ. κλασμάτων εἶναι εἰς ἀσύγκριτον βαθμὸν χρησιμώτερη καὶ σπουδαιότερη ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων διὰ τὸν πρακτικὸν βίον καὶ διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἄλλων μαθημάτων· καὶ δι' αὐτὸν ἑπομένως τὸν λόγον πρέπει οἱ μαθηταὶ νὰ εἰσαχθοῦν εἰς αὐτὴν ἐνωρίτερα παρὰ εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων. Ἐκτὸς τῶν εἰς τὴν σελίδα 155 μνημονευθέντων Μεθοδικῶν ὀπαδοὶ τῆς γνώμης αὐτῆς εἶναι καὶ οἱ *Sachse, Kallius, Tanck, Knoche, Backhaus, Heinze* καὶ *Hübner, Rein* καὶ *Pickel, Königbauer, Brenner* κ.τ.λ. Καὶ ἄλλοι μὲν ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς αὐτοὺς διδάσκουν τοὺς δεκαδ. ἀριθμοὺς μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς διδασκαλίας τῶν ἀκεραίων, ἄλλοι δὲ κατ' αὐτὴν τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀκεραίων καὶ ὡρισμένως κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν συμμιγῶν ἀκεραίων τῶν ἐχόντων δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, ἤτοι τῶν δεκαδικῶν νομισμάτων, μέτρων καὶ σταθμῶν, τὰ ὁποῖα καὶ ἐπροκάλεσαν τὴν εἰς τὸ δημ. σχολεῖον εἰσαγωγὴν τῶν δεκαδ. ἀριθμῶν.

Κατόπιν ἀπὸ ὅσα εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα περὶ τῆς φύσεως τῶν δεκαδ. κλασμάτων καὶ τῆς σχέσεως τῆς ἀριθμήσεώς των μὲ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κ. κλασμάτων, εἶναι καταφανὴς ἡ ἀτοπία τῆς γνώμης, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ δὲν εἶναι κλάσματα καὶ ὅτι ἡ διδασκαλία των δὲν προϋποθέτει καμίαν κλασματικὴν γνῶσιν. Ἀπεναντίας τὸ μόνον ὀρθὸν εἶναι, ὅτι οἱ λεγόμενοι δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι κλάσματα καὶ ἡ ἀρίθμησίς των, ὅσον καὶ ἂν ὁμοιάζῃ μὲ τὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀκεραίων, εἶναι πάντοτε κλασματικὴ ἀρίθμησις. Δι' αὐτὸ δὲ καὶ ἡ κατανόησις τῆς ἐννοίας τῶν λεγομένων δεκαδ. ἀριθμῶν δὲν εἶναι δυνατὴ χωρὶς τὴν γνῶσιν τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος, ἐπίσης δὲ καὶ ἡ κατανόησις τῆς ἀριθμήσεως τῶν δεκαδικῶν δὲν εἶναι δυνατὴ χωρὶς τὴν γνῶσιν ὡρισμένων στοιχείων τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως. Κανεὶς βέβαια δὲν

ἀρνεῖται, ὅτι ἡ ἀρίθμησις τῶν δεκαδ. κλασμάτων ἀπὸ ὑλικῆς ἀπόψεως ἔχει πολὺ μεγαλύτερην σπουδαιότητα ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κοινῶν καὶ ὅτι ἐν συνόλῳ λαμβανομένη εἶναι εὐκολώτερη ἀπὸ τὴν τελευταίαν, διότι προσεγγίζει περισσότερον ἀπὸ αὐτὴν εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀκεραίων. Ἀπὸ αὐτὰ ὅμως δὲν πρέπει καὶ νὰ ἐξαχθῇ, ὅτι ἠμποροῦν νὰ διδαχθοῦν τὰ δεκαδ. κλάσματα καὶ ἡ ἀρίθμησίς των χωρὶς τὴν προδιδασκαλίαν ὡρισμένων στοιχείων τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τοὺς Μεθοδικοὺς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἀντιπροσωπεύουν τὴν ὀρθὴν γνώμην, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν τὰ δεκαδ. κλάσματα εἶναι ἕνα εἶδος τῶν κλασμάτων (ἢ ὀλιγώτερον ὀρθά: τῶν κ. κλασμάτων), παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅ,τι κατὰ πρῶτον καὶ κυρίως τονίζουν οἱ Μεθοδικοὶ αὐτοί, εἶναι ὅτι τὰ δεκαδ. κλάσματα δὲν πρέπει νὰ συνδέωνται μὲ τοὺς ἀκεραίους καὶ νὰ διδάσκωνται ὡς ἀκέραιοι, ἀλλὰ νὰ παρουσιάζωνται καὶ νὰ διδάσκωνται ὡς κλάσματα, ἡ δὲ ἀρίθμησίς των πρέπει νὰ διδάσκεται ὡς κλασματικὴ ἀρίθμησις, ὁσασδήποτε καὶ ἂν ἔχῃ ὁμοιότητας μὲ τὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀκεραίων. Ὡς πρὸς τὸ ζήτημα τώρα, ἂν ἡ διδασκαλία τῆς κλασματ. ἀριθμήσεως πρέπει νὰ ἀρχίσῃ μὲ τὰ κοινὰ ἢ μὲ τὰ δεκαδ. κλάσματα, οἱ περισσότεροι ἀπὸ αὐτοὺς καταλήγουν εἰς τὴν γνώμην, ὅτι ἡ διδασκαλία τῶν κ. κλασμάτων πρέπει νὰ προταχθῇ ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν. Τάσσονται δὲ μὲ τὴν γνώμην αὐτήν, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν κυρίως τὰ ἑξῆς: 1) ὅτι τὰ δεύτερα, τὰ τρίτα, τέταρτα κ.τ λ. εἶναι οἰκειότερα εἰς τοὺς μαθητὰς καὶ ἠμποροῦν νὰ αἰσθητοποιηθοῦν εἰς αὐτοὺς εὐκολώτερα ἀπὸ τὰ δέκατα, τὰ ἑκατοστά, τὰ χιλιοστὰ κ.τ.λ. καὶ ὅτι δι' αὐτὸ οἱ μαθηταὶ ἠμποροῦν νὰ εἰσαχθοῦν εἰς τὰ κλάσματα καὶ τὴν κλασματ. ἀρίθμησιν καλύτερα μὲ τὰ δεύτερα, τρίτα, τέταρτα κ.τ λ., ἤτοι μὲ τὰ κοινὰ κλάσματα, παρὰ μὲ τὰ δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστὰ κ. τ. λ., ἤτοι μὲ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, καὶ 2) ὅτι ἡ ἀρίθμησις τῶν κ. κλασμάτων προπαρασκευάζει τὴν ἀρίθμησιν τῶν δεκαδικῶν πολὺ καλύτερα παρὰ ἡ τελευταία τὴν πρώτην. Μεταξὺ τῶν Μεθοδικῶν αὐτῶν ἄξιοι σημειώσεως εἶναι ἰδίως οἱ *Hentschel* καὶ *Költzsch, Kaselitz, Thieme* καὶ *Schlosser, Mittenzwey, Elsner* καὶ *Sendler, Klauke* καὶ *Klein, Braune* καὶ *Grossmann*. Ἀπὸ αὐτοὺς πάλιν ἄλλοι μὲν περατώνουν πρῶτα τὴν ἐξέτασιν τῶν κοινῶν κλασμάτων καὶ κατόπιν ἀρχίζουν τὴν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν, ἄλλοι δὲ εἰς τὴν διδασκαλίαν κάθε πράξεως τῶν κοινῶν κλασμάτων ἐπιτάσσουν τὴν διδασκαλίαν τῆς ἴδιας πράξεως εἰς τὰ δεκαδικά.

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἀρκετοὶ Μεθοδικοὶ τῆς μερίδος αὐτῆς, μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μνημονευθῇ ἰδιαιτέρως ὁ *Räther*, οἱ ὁποῖοι δὲν καταλήγουν εἰς τὴν ἴδιαν γνώμην ὡς τὸ προκείμενον ζήτημα, διότι συλλογίζονται ὡς ἀκολούθως. Ἡ διδασκαλία τῶν δεκαδ. κλασμάτων καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των προϋποθέτει βέβαια ὡρισμένας κλασματικὰς γνώσεις καὶ αὐταὶ πρέπει νὰ ἔχουν μεταδοθῇ εἰς τοὺς μαθητὰς ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δευτέρων, τῶν τρίτων, τῶν τετάρτων κ.τ.λ., ἤτοι ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κοινῶν κλασμάτων. Ἀπὸ αὐτὸ ὅμως δὲν ἕπεται, ὅτι ἡ ὅλη διδασκαλία τῶν δεκαδ. κλασμάτων δὲν πρέπει νὰ γίνῃ παρὰ μετὰ τὴν συστηματικὴν διδασκαλίαν τῶν κοινῶν. Αἱ εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα ἀναφερόμεναι γνώσεις, τὰς ὁποίας προϋποθέτει ἡ διδασκαλία ***τοῦ μεγαλυτέρου μέρους*** τῆς ἀριθμήσεως τῶν δεκαδ. κλασμάτων εἶναι, καθὼς γνωρίζομεν (ἴδ. ἀνωτ., σελ.189), ὀλίγαι καὶ ὡς ἄσχεται μὲ τοὺς ἰδιαιτέρους νόμους τῆς κλασμ. ἀριθμήσεως πολὺ εὔληπται, εἶναι δηλ. ἀκριβῶς ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων ἡ διδασκαλία ἠμπορεῖ καὶ πρέπει νὰ ἀρχίσῃ, καθὼς εἴδαμεν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ἀπὸ αὐτὴν ἀκόμη τὴν ἔναρξιν τοῦ δευτέρου σχολικοῦ ἔτους. Ἂν ἐπομένως ἰσχυροὶ διδακτικοὶ λόγοι ἐπιβάλλουν, ὅπως ἡ διδασκαλία τῶν δεκαδ. κλασμάτων ἀρχίζῃ ἐνωρὶς καὶ ὡρισμένως ἐνωρίτερα ἀπὸ τὴν συστηματικὴν διδασκαλίαν τῶν κοινῶν, ἠμπορεῖ ἀξιόλογα τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀριθμήσεως τῶν δεκαδ. κλασμάτων νὰ διδαχθῇ πρὸ τῆς συστηματικῆς διδασκαλίας τῶν κοινῶν, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἔχῃ ληφθῇ μέριμνα, ὅπως πρὸ τῆς διδασκαλίας του ἔχουν μεταδοθῇ εἰς τοὺς μαθητὰς αἱ εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα ἀναφερόμεναι ὀλίγαι καὶ εὔληπται ἐκεῖναι γνώσις, αἱ ἀπαραίτηται πρὸς κατανόησίν του. Πράγματι δὲ ὑπάρχουν ἰσχυροὶ διδακτικοὶ λόγοι, διὰ τοὺς ὁποίους ἐπιβάλλεται νὰ εἰσαχθοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τὰ δεκαδ. κλάσματα καὶ τὴν ἀρίθμησίν των ἐνωρίτερα ἀπὸ τὸν χρόνον τῆς συστηματικῆς διδασκαλίας τῶν κοινῶν κλασμάτων. Ὁ πρῶτος λόγος εἶναι τὸ γεγονός, ὅτι πράγματι ἡ ἀρίθμησις τῶν

δεκαδ. κλασμάτων ἐν τῷ συνόλῳ της εἶναι εὐκολώτερη ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κοινῶν, διότι ἔχει πολὺ περισσότερα ἀπὸ αὐτὴν σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀκεραίων. Ὁ δεύτερος λόγος εἶναι, ὅτι ἡ ἀρίθμησις τῶν δεκαδ. κλασμάτων εἶναι ὄντως ἀσυγκρίτως ἀναγκαιότερη ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κοινῶν καὶ διὰ τὸν πρακτικὸν βίον καὶ διὰ τὰ ἄλλα μαθήματα τοῦ σχολείου καὶ ὅτι ἀκριβῶς αἱ ἀνάγκαι τῶν δύο αὐτῶν παραγόντων καθορίζουν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν καὶ τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐπιληφθῇ τῆς ἐξετάσεως τοῦ μεγαλυτέρου μέρους τῆς ἀριθμήσεως τῶν κλασμάτων αὐτῶν καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι προγενέστερος ἀπὸ τὸν χρόνον τῆς συστηματικῆς διδασκαλίας τῶν κοινῶν κλασμάτων. Εἶναι δὲ ὁ χρόνος αὐτὸς ὁ χρόνος τῆς διδασκαλίας τοῦ τελευταίου κεφαλαίου τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἤτοι τοῦ κεφαλαίου τῶν συμμιγῶν ἀκεραίων. Ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς αὐτοὺς οἱ ἔχοντες δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν (ἤτοι τὰ δεκαδ. νομίσματα, μέτρα καὶ σταθμὰ) γράφονται καὶ ἀριθμοῦνται γραπτῶς εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ τὰ ἄλλα μαθήματα τοῦ σχολείου ὡς δεκαδικὰ κλάσματα. Φυσικὰ ἡ διδασκαλία εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ ἐξηγήσῃ εἰς τοὺς μαθητὰς τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς γραφῆς καὶ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως τῶν συμμιγῶν αὐτῶν. Ἀλλ' ἡ ἐξήγησις αὐτὴ δὲν θὰ εἶναι δυνατή, ἂν οἱ μαθηταὶ δὲν γνωρίζουν τοὐλάχιστον ἐκεῖνο τὸ μέρος τῶν δεκαδ. κλασμάτων καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των, τοῦ ὁποίου ἡ κατανόησις δὲν προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν ἰδιαζόντων νόμων τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως. Αἱ ἀνωτέρω λοιπὸν σκέψεις ὁδηγοῦν τοὺς περὶ ὧν ὁ λόγος Μεθοδικοὺς εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἐπάναγκες εἶναι ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως νὰ διδαχθῇ εἰς τοὺς μαθητὰς ἐκεῖνο τὸ μέρος τῆς ἀριθμήσεως τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, τὸ ὁποῖον δὲν προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν ἰδιαιτέρων νόμων τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως καὶ τὸ ὁποῖον ἐξαρκεῖ διὰ τὴν κατανόησιν τῆς γραφῆς καὶ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος συμμιγῶν, ὅτι δὲ ἡ συμπλήρωσις τῆς διδασκαλίας τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ μετὰ τὴν συστηματικὴν διδασκαλίαν τῆς ἀριθμήσεως τῶν κοινῶν κλασμάτων, τῆς ὁποίας οἱ ἰδιαίτεροι νόμοι πρέπει νὰ εἶναι γνωστοὶ εἰς τοὺς μαθητάς, ἂν πρόκειται νὰ ἐννοήσουν κατὰ βάθος τὸ ὑπολειπόμενον μέρος τῆς ἀριθμήσεως τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. Ἔτσι οἱ Μεθοδικοὶ αὐτοὶ κάμνουν κάτι ἀνάλογον μὲ τοὺς Μεθοδικοὺς ἐκείνους τῆς ἄλλης μερίδος—τῆς φρονούσης δηλ., ὅτι οἱ δεκαδικοὶ δὲν εἶναι κλάσματα—, οἱ ὁποῖοι διδάσκουν τοὺς δεκαδικοὺς ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως. Ὑπάρχει ὅμως μεταξὺ ἐκείνων καὶ αὐτῶν ἡ ῥιζικὴ διαφορά, ὅτι ἐκεῖνοι μὲν διδάσκουν τοὺς δεκαδικοὺς ὡς ἀκεραίους, αὐτοὶ δὲ ὡς κλάσματα καὶ ὅτι δι' αὐτὸ ἐκεῖνοι μὲν διδάσκουν μὲ τὴν εὐκαιρίαν τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως ὅλους τοὺς δεκαδικούς, αὐτοὶ δὲ μόνον ἐκεῖνο τὸ μέρος των, τοῦ ὁποίου ἡ κατανόησις δὲν προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν ἰδιαιτέρων νόμων τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως.

Εἴμεθα ἐντελῶς σύμφωνοι μὲ τὴν γνώμην τῶν τελευταίων αὐτῶν Μεθοδικῶν, ἡ ὁποία μᾶς φαίνεται ὡς ἡ περισσότερον ὀρθὴ ἀπὸ κάθε ἄποψιν, παραπέμπομεν δὲ τὸν ἀναγνώστην ὡς πρὸς τὴν ἐφαρμογήν της εἰς τὸ οἰκεῖον κεφάλαιον περὶ τῆς κατανομῆς τῆς διδακτέας ὕλης εἰς τὰ σχολικὰ ἔτη τοῦ δημοτ. σχολείου. Ὅ,τι μόνον ἔχομεν νὰ τονίσωμεν, πρᾶγμα ἄλλωστε τὸ ὁποῖον τονίζουν καὶ οἱ Μεθοδικοὶ αὐτοί, εἶναι, ὅτι οἱ μαθηταί, πρὶν εἰσαχθοῦν εἰς τὰ δεκαδ. κλάσματα κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν συμμιγῶν, ἡ ὁποία, καθὼς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος, θὰ γίνεται κατὰ τὸ 4ον σχολ. ἔτος, πρέπει νὰ κατέχουν τὰς ἀναγκαίας διὰ τὴν κατανόησιν τῶν δεκαδ. κλασμάτων στοιχειώδεις κλασματ. γνώσεις, θὰ τὰς κατέχουν δέ, ἄν, ὅπως κατ' ἐπανάληψιν μέχρι τοῦδε εἴπαμεν, ἀρχίσουν νὰ τὰς προσλαμβάνουν ἀπὸ αὐτὴν ἀκόμη τὴν ἔναρξιν τοῦ δευτέρου σχολικοῦ ἔτους.

Μερικοὶ τώρα Μεθοδικοὶ τῆς ἰδίας μερίδος εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως καλὸν εἶναι νὰ διδαχθῇ μόνον ἡ δεκαδικὴ γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ἡ ὁποία δὲν παρουσιάζει κατὰ τὴν γνώμην των ἰδιαζούσας δυσκολίας εἰς τοὺς μαθητάς, ὅτι δὲ ἡ ἀρίθμησις τῶν δεκαδικῶν πρέπει νὰ διδαχθῇ μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν κοινῶν κλασμάτων. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀρίθμησις τῶν δεκαδικῶν, ἐφόσον περιορίζεται εἰς τὰ ἀνωτέρω διαγραφέντα ὅρια, παρουσιάζει εἰς τοὺς μαθητὰς πολὺ ὀλιγωτέρας δυσκολίας ἀπὸ τὴν γραφὴν καὶ τὴν ἀπαγγελίαν των.

Ἄλλοι τέλος Μεθοδικοὶ τῆς ἰδίας μερίδος λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι οἱ μὲν κλασματικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὴν γνῶσιν προϋποθέτει ἡ διδασκαλία τῶν δεκαδικῶν, παρουσιάζονται εἰς τοὺς μαθητὰς ἀπὸ τὸ δεύτερον ἀκόμη σχολικὸν ἔτος, οἱ δὲ συμμιγεῖς, ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν ὁποίων πρέπει νὰ διδαχθοῦν οἱ δεκαδικοί, προσφέρονται εἰς τοὺς μαθητὰς ἀκόμη ἐνωρίτερα, καταλήγουν εἰς τὴν γνώμην, ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ ἐνωρίτερα ἀπὸ τὸ τέταρτον σχολικὸν ἔτος. Τοιουτοτρόπως π.χ. ὁ Steuer ὑποστηρίζει, ὅτι μὲ εὐμενεῖς σχολικὰς συνθήκας ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ εἰσαχθοῦν εἰς τὰ δεκαδ. κλάσματα ἀπὸ τὸ δεύτερον σχολικὸν ἔτος καὶ ὡρισμένως κατόπιν τῆς ἐξετάσεως τῆς σειρᾶς 1—100. Ἐφόσον οἱ μαθηταὶ μανθάνουν εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν δραχμὴν καὶ λεπτά, μέτρον καὶ ἑκατοστόμετρα, ἠμποροῦν κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Steuer νὰ διδαχθοῦν καὶ τὴν δεκαδικὴν γραφήν των καὶ τὴν γραπτὴν ἐκτέλεσιν ἁπλῶν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων τέτοιων δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Εἰς δὲ τὸ τρίτον σχολικὸν ἔτος, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ διδάσκεται ἡ σειρὰ 1—1000, πρέπει νὰ ἐξακολουθῇ καὶ ἡ διδασκαλία τῶν δεκαδικῶν μὲ 2 δεκαδ. ψηφία, ἐπεκτεινομένη μάλιστα καὶ εἰς τὸν ἔγγραφον πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν γραπτὴν διαίρεσιν δεκαδικῶν μὲ ἀκεραίους. Εἰς δὲ τὸ 4 πλέον σχολικὸν ἔτος θὰ διδάσκωνται καὶ δεκαδικοὶ μὲ 3 δεκαδ. ψηφία. Ὁ δὲ Klaussen (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σελ. 155 κ. ἀκ.) ἀρχίζει τὴν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν ἐπάνω εἰς αὐτὴν τὴν ἐξέτασιν τῆς σειρᾶς 1—100, περιοριζόμενος ὅμως μόνον εἰς τὰ δέκατα (τῆς δραχμῆς, τοῦ μέτρου κ.τ.λ.), τὸ δὲ τρίτον σχολικὸν ἔτος διδάσκει καὶ τὰ ἑκατοστά. Ἀλλά, ὅπως πολὺ ὀρθὰ παρατηρεῖ ὁ Räther (αὐτ.), ἡ τόσον πρώϊμη εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὰ δεκαδ. κλάσματα δὲν εἶναι ὀρθή, ἀφ' ἑνὸς μὲν καὶ κυριώτερον, διότι οἱ μαθηταὶ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου σχολικοῦ ἔτους δὲν ἔχουν τὰς πνευματικὰς ἐν γένει καὶ τὰς ἀριθμητικὰς ἰδιαιτέρως δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν κατανόησίν των, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι μὲ τὴν εἰσαγωγὴν αὐτὴν θὰ ἐζητοῦντο ἀπὸ τοὺς μαθητὰς τῶν ἐτῶν αὐτῶν πάρα πολλὰ πράγματα μαζὶ (ἡ γνῶσις τῶν νέων ἀκεραίων καὶ τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς συμμιγεῖς καὶ τοὺς κλασματικοὺς καὶ ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς δεκαδικούς), ἔπειτα δὲ διότι διὰ τὸν ἴδιον λόγον θὰ ἐπήρχετο ὑπερβολικὴ διάσπασις τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, τέλος δὲ διότι κανεὶς λόγος ὁποιασδήποτε φύσεως δὲν ἐπιβάλλει τὴν τόσον πρώϊμην διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν, ὅπως π. χ. ἐπιβάλλει τὴν διδασκαλίαν των κατὰ τὸ 4 σχολικὸν ἔτος ὁ πρακτικὸς λόγος, ὅτι οἱ κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ ***συστηματικὰ*** πλέον διδασκόμενοι συμμιγεῖς τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως γράφονται καὶ ἀριθμοῦνται ἐγγράφως εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ τὰ ἄλλα μαθήματα ὡς δεκαδικοί].

IX. ΟΙ ΑΦΗΡΗΜΕΝΟΙ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΑΥΤΟΥΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

[Ὅλοι οἱ ὡρισμένοι ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους ἕως τώρα ἐγνωρίσαμεν, ἤτοι οἱ ἀκέραιοι, τὰ κοινὰ κλάσματα καὶ τὰ δεκαδικά, ἢ λαμβάνονται καθ' ἑαυτούς, χωρὶς δηλ. νὰ ἀναφέρωνται εἰς κάποιον εἶδος συγκεκριμένων πραγμάτων (π.χ. 25, $\frac{1}{4}$, 0,5) ἢ νοοῦνται ὡς παριστάνοντες ὁμοειδῆ συγκεκριμένα πράγματα ἢ ὁμοειδῆ μέρη ἑνὸς συγκεκριμένου πράγματος (π. χ. 25 δρ., $\frac{1}{4}$ πήχ., 0,5 μέτρ.). Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγονται ***ἀφηρημένοι*** ἀριθμοί, εἰς τὴν δευτέραν ***συγκεκριμένοι***.

Οἱ συγκεκριμένοι πάλιν ἀριθμοὶ ἢ εἶναι ***ἁπλοῖ*** ἢ ***συμμιγεῖς***. Οἱ πρῶτοι παριστάνουν μονάδας μιᾶς μόνον τάξεως ἑνὸς εἴδους συγκεκριμένων πραγμάτων (π χ. 8 δρ.), οἱ δεύτεροι παριστάνουν μονάδας περισσοτέρων τῆς μιᾶς τάξεων ἑνὸς εἴδους συγκεκριμένων πραγμάτων (π.χ. 8 δρ. 75 λεπτ.).

Ἡ ἐκτέλεσις τώρα ὁποιασδήποτε ἀριθμητικῆς πράξεως ἐπάνω εἰς ὁποιουσδήποτε εἴτε ἀφηρημένους, εἴτε συγκεκριμένους ἀριθμοὺς λαμβάνει τὴν μορφὴν ἑνὸς ***προβλήματος***, εἰς τὸ ὁποῖον διακρίνομεν τοὺς ***δοθέντας*** ἀριθμοὺς καὶ ***τὸν ζητούμενον***]. Φυσικὰ δέ, ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἢ ἀφηρημένοι ἢ συγκεκριμένοι,

ἔχομεν προβλήματα μὲ ἀφηρημένους ἀριθμοὺς καὶ προβλήματα μὲ συγκεκριμένους. Προβλήματα μὲ ἀφηρημένους ἀριθμοὺς εἶναι π.χ. τὰ ἑξῆς: 25 + 13 = ; 50 — 30 + 10 = ; — Προβλήματα μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς εἶναι π.χ. τὰ ἀκόλουθα: α) 25 δρ. + 13 δρ. = ; 50 λεπτ. — 30 λεπτ. + 10 λεπτ. = ; β) Ὁ Παῦλος εἶχε 26 δρ. καὶ ἐπῆρε σήμερα ἀπὸ τὸν θεῖόν του ἄλλας 13 δρ. Πόσας δραχμὰς ἔχει τώρα ; — Ὁ Πέτρος ἀγόρασε ἕνα μολύβι 30 λεπτὰ καὶ ἕνα πενάκι 20 λεπτά. Ἔδωκε εἰς τὸν χαρτοπώλην ἕνα πενηνταράκι. Πόσα λεπτὰ ἐπῆρε πίσω ;

Εἰς τὴν πραγματικὴν ζωὴν δὲν παρουσιάζονται προβλήματα μὲ ἀφηρημένους ἀριθμούς, ἀλλὰ μόνον μὲ συγκεκριμένους. Τὰ τελευταῖα τώρα αὐτὰ προβλήματα, ὅπως δεικνύουν τὰ ἀνωτέρω παραδείγματά των, εἶναι δύο εἰδῶν. [Τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους, ὅπως εἶναι τὰ ὑπὸ στοιχ. α), μολονότι οἱ ἀριθμοί των παριστάνουν συγκεκριμένα πράγματα, ἐν τούτοις δὲν ἀναφέρονται εἰς ὡρισμένας σχέσεις τῆς πραγματικῆς ζωῆς. Ἀπεναντίας τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους, ὅπως εἶναι τὰ ὑπὸ στοιχ. β), ἐφαρμόζονται ἐπάνω εἰς τέτοιας σχέσεις. Ἀποτέλεσμα δὲ ἀκριβῶς τῆς διαφορᾶς αὐτῆς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο εἰδῶν τῶν μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς προβλημάτων, εἶναι ὅτι εἰς μὲν τὰ πρῶτα δίδεται πάντοτε καὶ ὁ τρόπος τῆς λύσεως, καθορίζονται δηλ. ἀπὸ πρὶν αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθοῦν πρὸς λύσιν των, εἰς δὲ τὰ δεύτερα δὲν δίδεται ὁ τρόπος τῆς λύσεως, ἀλλὰ πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὰς ἀναφερομένας σχέσεις τῆς πραγματικῆς ζωῆς, ἀπὸ τὰς ὁποίας καὶ μόνον ἐξαρτᾶται. Τὰ πρῶτα θεωροῦνται ὡς ***τὰ κυρίως προβλήματα μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς*** καὶ ἔτσι καὶ ὀνομάζονται συνήθως, τὰ δεύτερα καλοῦνται ***ἐφηρμοσμένα***. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τρόπος τῆς λύσεως δίδεται καὶ εἰς τὰ μὲ ἀφηρημένους ἀριθμοὺς προβλήματα, ἐννοεῖται, ὅτι ἀπὸ τὴν ἄποψιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει καμία διαφορὰ μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῶν μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς προβλημάτων], τὰ ὁποῖα ἔτσι ἀποτελοῦν τὴν μετάβασιν ἀπὸ τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα εἰς τὰ μὲ ἀφηρημένους ἀριθμούς.

Μολονότι τὰ μὲ ἀφηρημένους ἀριθμοὺς προβλήματα δὲν παρουσιάζονται εἰς τὴν πραγματικὴν ζωήν, ἐν τούτοις δὲν πρέπει νὰ παραμελοῦνται εἰς τὸ σχολεῖον, διότι μὲ τὴν συντομίαν των συντελοῦν ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς τὴν ἐξοικονόμησιν πολλοῦ χρόνου, [ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς τὴν ἐλευθερώτερην λειτουργίαν τῆς νοήσεως. Δὲν πρέπει ὅμως νὰ λησμονῆται, ὅτι τὰ προβλήματα αὐτά, καθόσον οἱ ἀριθμοί των δὲν ἀναφέρονται εἰς συγκεκριμένα πράγματα, δὲν ἠμποροῦν νὰ κινήσουν εὔκολα τὸ ἀριθμητικὸν διαφέρον τῶν μαθητῶν, συνάμα δὲ παρέχουν εἰς αὐτούς, καὶ μάλιστα τοὺς μικροτέρους, πολλὰς δυσκολίας, διότι τὸ ἀφηρημένον ἀκριβῶς τῶν ἀριθμῶν των συντελεῖ εἰς τὸ νὰ μὴ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐννοοῦν οὔτε ποία πρᾶξις χρειάζεται πρὸς λύσιν των, οὔτε πρὸς ποῖον σκοπὸν ζητεῖται ἡ ἐκτέλεσίς της. Δι' αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς καὶ δὲν πρέπει νὰ εἰσάγωνται οἱ μαθηταὶ μὲ τέτοια προβλήματα εἰς καμίαν νέαν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν]. Πρέπει νὰ εἶναι μόνον προβλήματα ἀσκήσεώς των εἰς ἐντελῶς γνωστὰς ἀριθμητικὰς πράξεις καὶ νὰ τοὺς ἀπασχολοῦν δι' αὐτὸ εἰς τὸ διδακτικὸν στάδιον τῆς ἀσκήσεως. Εὐνόητον δὲ εἶναι, ὅτι, ἐφόσον δίδονται, διὰ νὰ λυθοῦν ἀπὸ μνήμης, δὲν πρέπει νὰ ἔχουν πολυψηφίους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἄλλωστε δὲν ἔχουν καμίαν σημασίαν διὰ τὴν πραγματικὴν ζωὴν τῶν περισσοτέρων ἀνθρώπων.

[Τὰ μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς προβλήματα δὲν κινοῦν μὲν τόσον τὸ ἀριθμητ. διαφέρον ὅσον τὰ ἐφηρμοσμένα, πάντως ὅμως τὸ κινοῦν ἀσύγκριτα περισσότερον παρὰ τὰ μὲ ἀφηρημένους ἀριθμούς, διότι ἀκριβῶς δὲν ἔχουν τὸ μειονέκτημα ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον, καθὼς εἴδαμεν, κάμνει τὰ μὲ ἀφηρημ. ἀριθμοὺς προβλήματα νὰ μὴ ἐξεγείρουν τόσον εὔκολα τὸ ἀριθμ. διαφέρον τῶν μαθητῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἄλλου εἶναι εὐκολώτερα ἀπὸ τὰ ἐφηρμοσμένα, διότι δὲν ζητεῖται εἰς αὐτά, ὅπως εἰς ἐκεῖνα, καὶ ὁ τρόπος τῆς λύσεως, εἶναι κατάλληλα τόσον διὰ νὰ εἰσάγουν τοὺς μαθητὰς καὶ μάλιστα τῶν κατωτάτων τάξεων εἰς κάθε νέαν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν, ὅσον καὶ διὰ νὰ τοὺς ἀσκοῦν εἰς τὰς γνωστάς. Εἰς τὴν τελευταίαν δὲ αὐτὴν περίπτωσιν σκόπιμον εἶναι νὰ προηγοῦνται ἀπὸ τὰ μὲ ἀφηρημένους ἀριθμοὺς προβλήματα, διότι ὡς ἀναφερόμενα εἰς συγκεκριμένα πράγματα εἶναι εὐκολώτερα ἀπὸ αὐτὰ καὶ ἀποτελοῦν τὴν καλύτερην γέφυραν μεταβάσεως ἀπὸ τὰ ἐφηρμοσμένα εἰς τὰ μὲ ἀφηρημ. ἀριθμούς.

Τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα εἶναι δυσκολώτερα βέβαια ἀπὸ τὰ μὲ συγκεκριμ. ἀριθμούς, διότι δὲν δίδεται εἰς αὐτά, ὅπως εἰς

ἐκεῖνα, ὁ τρόπος τῆς λύσεως, ἀλλὰ πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τοὺς μαθητὰς ἀπὸ τὰς πραγματικὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς αὐτά. Ἔτσι ἡ λύσις κάθε ἐφηρμοσμένου προβλήματος συνίσταται ἀπὸ δύο ἐνεργείας, τὴν εὕρεσιν τοῦ τρόπου τῆς λύσεως, ἤτοι τὸν καθορισμὸν τῆς πράξεως ἢ τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθοῦν, καὶ τὴν ἐκτέλεσίν των (ἴδ. καὶ *Büttner*, ὅπ. ἀν., σ. 28)]. Ἡ δεύτερη ἀπὸ τὰς ἐργασίας αὐτὰς δὲν παρέχει συνήθως πολλὰς δυσκολίας εἰς τοὺς μαθητάς. Δύσκολη εἶναι κατὰ κανόνα ἡ πρώτη ἐργασία, διότι εἰς αὐτὴν πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἐξαιρετικὴν κίνησιν ἡ κριτικὴ καὶ συλλογιστικὴ δύναμις τῶν μαθητῶν, οἱ ὁποῖοι πρέπει μὲ καταλλήλους κρίσεις καὶ συλλογισμοὺς νὰ ἀνεύρουν ἀπὸ τὰς δοθείσας πραγματικὰς σχέσεις τὸν ἀριθμητικὸν πυρῆνα, ἤτοι τὰς ἀριθμητικὰς σχέσεις, καὶ ἔτσι νὰ καθορίσουν, ποῖαι ἀριθμητικαὶ πράξεις καὶ εἰς ποίαν διαδοχικὴν σειρὰν πρέπει νὰ ἐκτελεσθοῦν [(ἴδ. καὶ *Büttner*, ὅπ. ἀν. σελ. 28)]. Προφανὲς δὲ εἶναι, ὅτι ἡ ἀνωτέρω δυσκολία, τὴν ὁποίαν παρουσιάζουν τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα, δὲν πρέπει νὰ ἐπαυξάνεται οὔτε μὲ τὴν γλωσσικήν των διατύπωσιν, ἡ ὁποία πρέπει νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον εὔληπτη καὶ σύντομη, οὔτε μὲ τὸν τρόπον τῆς θέσεώς των, διὰ τὸν ὁποῖον θὰ λεχθοῦν τὰ δέοντα εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος.

[Ἀλλ' ἂν τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα παρουσιάζουν τὴν ἀνωτέρω μνημονευθεῖσαν δυσκολίαν, πρέπει ἐξ ἄλλου νὰ τονισθῇ, ὅτι κινοῦν περισσότερον ἀπὸ κάθε ἄλλο εἶδος προβλημάτων τὸ ἀριθμητικὸν διαφέρον τῶν μαθητῶν, ἐφόσον φυσικὰ ἀναφέρονται εἰς πραγματικὰς σχέσεις γνωστὰς καὶ οἰκείας εἰς τοὺς μαθητάς. Τὸ διαφέρον, τὸ ὁποῖον αἰσθάνονται διὰ τὰς πραγματικὰς αὐτὰς σχέσεις, ἐκτείνεται καὶ εἰς τὰς ἀριθμητικάς, τὰς ὁποίας ἐκεῖναι παρουσιάζουν. Μὲ τὰ προβλήματα αὐτὰ κυρίως ἀντιλαμβάνονται οἱ μαθηταί, διατί μανθάνουν νὰ ἀριθμοῦν, μὲ αὐτὰ κυρίως βλέπουν, ὅτι μανθάνουν κάτι, ποὺ γίνεται καὶ εἰς τὴν πραγματικὴν ζωήν, τέλος μὲ αὐτὰ ἀναπτύσσεται περισσότερον καὶ τὸ ὑπάρχον διαφέρον των πρὸς τὰς πραγματικὰς σχέσεις, διότι χάρις εἰς αὐτὰ βλέπουν τὰς σχέσεις αὐτὰς καὶ ἀπὸ μίαν ἄλλην ὄψιν, τὴν ἀριθμητικήν, καὶ ἔτσι τὰς κατανοοῦν καλύτερα. Ἀκριβῶς δὲ διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα, καὶ προπάντων τὰ σχετικῶς εὐκολώτερα, εἶναι καταλληλότατα διὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν μαθητῶν—καὶ μάλιστα τῶν μεσαίων καὶ τῶν ἀνωτέρων τάξεων—εἰς κάθε νέαν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν, ἐνῷ ἐξ ἄλλου δὲν παύουν νὰ εἶναι καὶ καταλληλότατον ὑλικὸν διὰ τὴν ἄσκησίν των εἰς τὰς γνωστάς].

Τὸ ὑλικὸν τώρα τῶν ἐφηρμοσμένων προβλημάτων θὰ λαμβάνεται α) ἀπὸ τὰ λοιπὰ εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον διδασκόμενα πραγματικὰ μαθήματα καὶ β) ἀπὸ τὰς πραγματικὰς καὶ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον γνωστὰς εἰς τοὺς παῖδας σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου [Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι ἡ ἀσχολία μὲ τὰ ἐφηρμ. προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους, ἤτοι τὰ λαμβανόμενα ἀπὸ τὸν πρακτικὸν βίον, ἐκτὸς τοῦ ὅτι θὰ ἀναπτύσσῃ τὸ ἀριθμητικὸν διαφέρον τῶν μαθητῶν, θὰ κινῇ καὶ τὸ πρακτικὸν διαφέρον των καὶ θὰ τοὺς προπαρασκευάζῃ μαζὶ καὶ διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου]. Ποῖα τώρα θὰ εἶναι τὰ προβλήματα τὰ λαμβανόμενα ἀπὸ τὰ πραγματικὰ μαθήματα καὶ ποῖα τὰ λαμβανόμενα ἀπὸ τὸν πρακτικὸν βίον, θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ οἰκεῖα κεφάλαια.

[Σημειωτέον τέλος, ὅτι θὰ εἶναι σκοπιμώτατον νὰ προκαλοῦνται οἱ μαθηταὶ ὅσον τὸ δυνατὸν συχνότερα ἀπὸ τὸν διδάσκαλον νὰ σχηματίζουν καὶ μόνοι των τόσον τὰ διὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ νέου, ὅσον ἰδίως τὰ διὰ τὴν εἰς τὸ γνωστὸν ἄσκησιν χρειαζόμενα προβλήματα, εἴτε εἶναι προβλήματα μὲ συγκεκριμένους ἢ ἀφῃρημένους ἀριθμούς, εἴτε εἶναι ἐφηρμοσμένα. Ἡ ἐργασία αὐτή, ὡς ἀναπτύσσουσα τὴν ἅμιλλαν καὶ τὴν αὐτενέργειάν των, θὰ κινῇ ἐξαιρετικὰ τὸ διαφέρον των. Ἐφόσον δὲ θὰ αἰσθάνωνται διαφέρον, ὅπως σχηματίζουν μόνοι των τὰ ἀναγκαιοῦντα προβλήματα, θὰ αἰσθάνωνται καὶ διαφέρον, ὅπως τὰ λύσουν μόνοι των, ἔτσι δὲ θὰ ἐπιδίδωνται μὲ ὄρεξιν καὶ μὲ χαρὰν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ἡ ὁποία εἰς ἄλλην περίπτωσιν θὰ ἐγίνετο μὲ δυσφορίαν καὶ δι' αὐτὸ μὲ ὀλίγας ἐλπίδας ἐπιτυχίας. Ἰδιαιτέρως δὲ ὁ σχηματισμὸς ἐφηρμοσμένων προβλημάτων ἀπὸ τοὺς ἰδίους τοὺς μαθητὰς θὰ ἔχῃ καὶ τὰ ἑξῆς δύο καλὰ ἐπακολουθήματα, πρῶτον μὲν ὅτι οἱ μαθηταί, καθόσον θὰ σχηματίζουν τέτοια προβλήματα, θὰ ἀντιλαμβάνωνται, ὅτι αἱ ἀριθμητικαὶ σχέσεις των ἐξαρτῶνται ὅλως διόλου ἀπὸ τὰς πραγματικὰς καὶ ὅτι εἰς τὰς δεῖνα πραγματικὰς ἀντιστοιχοῦν αἱ τάδε ἀριθμητικαί,

δι' αὐτὸ δὲ θὰ εἶναι εἰς θέσιν, καὶ ὅταν θὰ δίδωνται εἰς αὐτοὺς πρὸς λύσιν τέτοια προβλήματα ἀπὸ τὸν διδάσκαλον, νὰ ἀνατρέχουν ἀμέσως εἰς τὰς πραγματικάς των σχέσεις, διὰ νὰ ἀνευρίσκουν ἀπὸ αὐτὰς τὰς ἀριθμητικὰς (ἴδ. καὶ *Büttner*, ὅπ. ἀν., σ. 29), δεύτερον δὲ ὅτι, ἐπειδὴ θὰ ἠξεύρουν, ὅτι θὰ προκαλοῦνται καὶ αὐτοὶ ἀπὸ τὸν διδάσκαλον εἰς τὸν σχηματισμὸν ἐφηρμοσμένων προβλημάτων, θὰ ἀναγκάζωνται νὰ προσέχουν περισσότερον τόσον εἰς τὰς πραγματικὰς σχέσεις τῆς ζωῆς, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζουν ἀριθμητικὰς ἐξεταζομένας εἰς τὸ σχολεῖον, ὅσον καὶ εἰς τὰς ἀριθμητικὰς τὰς ἀντιστοιχούσας μὲ τὰς πραγματικὰς ἐκείνας σχέσεις].

X. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

Ἀπὸ τὰ εἰσαγωγικὰ ἀκόμη κεφάλαια γνωρίζομεν, ὅτι πρῶτος ὁ Unger, κατόπιν δὲ καὶ ἄλλοι Μεθοδικοὶ ἐτόνισαν, ὅτι εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον ἠμποροῦν νὰ διδάσκωνται καὶ προβλήματα τῆς Ἀλγέβρας ἢ ἀλγεβρικά.

Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ἕνας κλάδος τῆς Ἀριθμητικῆς, ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει τὴν διδασκαλίαν περὶ τῶν ἐξισώσεων. Ἡ λέξις παράγεται ἀπὸ τὴν Ἀραβικὴν λέξιν al jebr ἢ aldjchebr, ἡ ὁποία εἰς τὴν μαθηματικήν της ἔννοιαν σημαίνει κυρίως μὲν τὴν μετάθεσιν κάποιου ὅρου μιᾶς ἐξισώσεως ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος της εἰς τὸ ἄλλο, ἔπειτα δὲ ἐν γένει τὴν περὶ τῶν ἐξισώσεων διδασκαλίαν. Ἡ ἐπιστημονικὴ Ἄλγεβρα ἀνήκει προφανῶς εἰς τὰ ἀνώτερα σχολεῖα καὶ ὄχι εἰς τὰ δημοτικά.

Τὸ δημοτ. σχολεῖον ἀσχολεῖται μὲ τέτοια μόνον ἀλγεβρικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ λυθοῦν μὲ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι διδάσκονται εἰς αὐτό. [Τὰ προβλήματα αὐτά, τὰ ὁποῖα ἠμπορεῖ νὰ εἶναι εἴτε μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμούς, εἴτε μὲ συγκεκριμένους, εἴτε καὶ ἐφηρμοσμένα, διαφέρουν κατὰ τοῦτο κυρίως ἀπὸ τὰ συνήθη, ὅτι τὸ ζητούμενον καὶ ἐξαγόμενον εἰς τὰ συνήθη προβλήματα δίδεται ὡς ὅρος εἰς αὐτά, τὸ ζητούμενον δὲ καὶ ἐξαγόμενον εἰς αὐτὰ εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς ὅρους τῶν συνήθων καὶ ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τοὺς ἄλλους ὅρους καὶ τὸ δοθὲν ἐξαγόμενον. Ἔτσι κάθε πρόβλημα ἀπὸ τὰ συνήθη, καὶ τὸ ἁπλούστατον ἀκόμη, ἠμπορεῖ εὐκολώτατα νὰ μεταβληθῇ εἰς ἀλγεβρικόν. Τὰ προβλήματα π. χ. α) 3+5=; β) 8—3=; γ) 3×3=; δ) 12 : 3=; ε) 3×4—10= ; ς) Ὁ Πέτρος ἐπῆρε ἀπὸ τὸν πατέρα του 5 λεπτά, ἀπὸ τὴν μητέρα του ἄλλα 5 καὶ ἀπὸ τὸν θεῖόν του ἄλλα 10. Μὲ τὰ λεπτὰ αὐτὰ ἀγόρασε ἕνα μολύβι. Πόσον ἐστοίχισε τὸ μολύβι αὐτό ; κ. τ. λ. ἠμποροῦν νὰ μεταβληθοῦν εἰς τὰ ἑξῆς ἀλγεβρικά : α) Εἰς ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ βάλω ἀκόμη 3, διὰ νὰ ἔχω 8 ; ἢ : Ἔχω εἰς τὸν νοῦν μου ἕνα ἀριθμόν· ἂν εἰς αὐτὸν βάλω ἄλλα 3, θὰ ἔχω 8· ποῖος ἀριθμὸς εἶναι αὐτός ; ἢ : Ἔχω εἰς τὸν νοῦν μου ἕνα ἀριθμόν· ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν 8 κατὰ 3. Ποῖος εἶναι ; κ. τ. λ. β) Ἀπὸ ποῖον ἀριθμὸν ἠμπορῶ νὰ βγάλω 3 καὶ ὅμως νὰ ἔχω ἀκόμη 5 ; ἢ : Ἔχω εἰς τὸν νοῦν μου ἕνα ἀριθμόν· ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν βγάζω 3 καὶ μοῦ μένουν ἀκόμη 5. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι αὐτός ; ἢ : Ἔχω εἰς τὸν νοῦν μου ἕνα ἀριθμόν. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 3 κατὰ 5. Ποῖος εἶναι ; κ. τ. λ. γ) Ἔχω εἰς τὸν νοῦν μου ἕνα ἀριθμόν· τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τὸν παίρνω 3 φορὰς καὶ ἔχω 9. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι αὐτός ; κ. τ. λ. δ) Ἔχω εἰς τὸν νοῦν μου ἕνα ἀριθμόν. Τὸν μοιράζω εἰς 3 μέρη καὶ τὸ κάθε μέρος του εἶναι 4. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι αὐτός ; κ. τ. λ. ε) Ἔχω εἰς τὸν νοῦν μου ἕνα ἀριθμόν· τὸν πολλαπλασιάζω μὲ τὸ 4, ἀπὸ τὸ γινόμενον βγάζω 10 καὶ μοῦ μένουν ἀκόμη 2. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι αὐτός ; 5) Ὁ Πέτρος ἐπῆρε ἀπὸ τὸν θεῖόν του μερικὰ λεπτά· δὲν σᾶς λέγω, πόσα. Ἐπῆρε ἀκόμη καὶ ἀπὸ τὸν πατέρα του 5 λεπτὰ καὶ ἀπὸ τὴν μητέρα του ἄλλα 5. Τώρα ἠμπορεῖ νὰ ἀγοράσῃ ἕνα μολύβι 20 λεπτῶν. Πόσα λεπτὰ ἐπῆρε ἀπὸ τὸν θεῖόν του ; κ.τ.λ. Μερικὰ ἀπὸ τὰ στοιχειώδη αὐτὰ ἀλγεβρικὰ προβλήματα ἔχουν γίνει λαϊκὰ καὶ κληροδοτοῦνται ἀπὸ γενεᾶς εἰς γενεάν.

Τὴν ἀξίαν τῶν ἀλγεβρικῶν προβλημάτων ἐτόνισε ἀπὸ τοὺς πρώτους καὶ ὁ *Diesterweg*, ὁ ὁποῖος λέγει σχετικὰ τὰ ἑξῆς : «Δὲν πρέπει νὰ καταφρονοῦμεν τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἀπευθύνονται εἰς τὴν ὀξύνοιαν. Ἐννοῶ μὲ αὐτὰ τὰ ὀνομαζόμενα ἀλγεβρικὰ προβλήματα. Ἀφοῦ διδαχθοῦν οἱ μαθηταὶ τὸ ἀπολύτως ἀναγκαιοῦν, ἠμπορεῖ νὰ τοὺς δίδῃ ὁ διδάσκαλος καὶ προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀπαιτεῖ καὶ κάποιαν ὀξύνοιαν. Ἀκριβῶς μὲ αὐτὰ προξενοῦμεν χαρὰν εἰς τοὺς μαθητάς, διότι τοὺς ἀναγκάζουν εἰς τὴν ἐλεύθερην ἔρευναν καὶ εὕρεσιν» (ἴδ. *Büttner*, ὅπ. ἀν., σελ. 44 κ. ἀκ.)]. Ἐκεῖνος ὅμως, ὁ ὁποῖος ἐντελῶς ἰδιαιτέρως ὑπεστήριξε τὴν εἰσαγωγὴν τῶν προβλημάτων αὐτῶν εἰς τὸ δημοτικὸν σχολεῖον εἶναι ὁ *Hentschel*. Ὡς πρὸς τὴν ἀξίαν τῶν ἀλγεβρικῶν προβλημάτων παρατηρεῖ ὁ Μεθοδικὸς αὐτὸς τὰ ἀκόλουθα : «Ἡ ἀξία τῶν ἀλγεβρ. προβλημάτων καὶ διὰ τὸ δημοτ. σχολεῖον ἔγκειται εἰς τὰ ἑξῆς : 1) Ἐπειδὴ ἀσκοῦν τὴν σκέψιν, εἶναι ἰδιαιτέρως κατάλληλα διὰ τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ εἰδολογικοῦ σκοποῦ τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας. 2) Ἡ αἰνιγματώδης μορφή, μὲ τὴν ὁποίαν συνήθως παρουσιάζονται, ἑλκύει εἰς μέγαν βαθμὸν τοὺς παῖδας, δι' αὐτὸ δὲ τὰ προβλήματα αὐτὰ γίνονται τὸ ἰδιαίτερον ἄρτυμα τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν ἐξασθενίζει, ἀλλὰ τονώνει τὸν στόμαχον».

Τὰ ἀλγεβρικὰ προβλήματα εἶναι κυρίως κατάλληλα διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν. Ὁ διδάσκαλος θὰ δίδῃ τέτοια προβλήματα εἰς τοὺς μαθητάς, διὰ νὰ τὰ λύουν εἴτε ἀμέσως ἐνώπιόν του εἴτε κατ' οἶκον. Ἐπίσης θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐπασχολοῦνται σιωπηρῶς μὲ τὴν λύσιν ἀλγεβρ. προβλημάτων κατὰ τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον ὁ διδάσκαλός των θὰ διδάσκῃ ἄλλην τάξιν. Δὲν εἶναι δὲ φυσικὰ ὀρθὸν νὰ λύωνται τὰ ἀλγεβρ. προβλήματα σύμφωνα μὲ κανόνας, ἤτοι μηχανικά.

Ἀναμφίβολον βέβαια εἶναι, ὅτι τὰ ἀλγεβρ. προβλήματα δὲν ἔχουν ἄμεσην ἀξίαν διὰ τὸν πρακτικὸν βίον, ἀφοῦ δὲν παρουσιάζονται εἰς αὐτόν, δι' αὐτὸ δὲ δὲν ἀνήκουν εἰς τὰς ἀναγκαίας ὕλας τοῦ δημοτ. σχολείου. Ἐν τούτοις συνιστῶμεν τὴν διδασκαλίαν των εἰς ὅλα τὰ σχολεῖα, ὅσα δὲν λειτουργοῦν μὲ παραπολὺ δυσμενεῖς συνθήκας, διότι, καθὼς διδάσκει ἡ πεῖρα, προξενοῦν πολλὴν εὐχαρίστησιν εἰς τοὺς μαθητάς, ἐπειδὴ τοὺς φαίνονται ὡς ἕνα εἶδος ἀριθμητικῶν αἰνιγμάτων. Ἐννοεῖται ὅμως, ὅτι οἱ μαθηταὶ πρέπει καὶ νὰ ἠμποροῦν νὰ διατυπώνουν τὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας ἔκαμαν πρὸς λύσιν των, καὶ νὰ κάμνουν καὶ τὴν δοκιμήν, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἀποδεικνύεται ἡ ὀρθότης τῆς λύσεως αὐτῆς.

Μερικοὶ εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι τὰ ἀλγεβρ. προβλήματα λύονται μὲ μίαν ἰδιαίτερην ἀριθμητ. μέθοδον, ἡ ὁποία ἕνεκα τῆς δυσκολίας της ἀνήκει εἰς τὴν διδακτέαν ὕλην τῆς ἀνωτέρας μόνον βαθμίδος τοῦ δημοτ. σχολείου. Ἀλλὰ ἡ γνώμη αὐτὴ εἶναι ὅλως διόλου λανθασμένη. Ἡ θεωρουμένη ὡς ἰδιαίτερη μέθοδος δὲν εἶναι παρὰ μία ἰδιαίτερη μορφή, μὲ τὴν ὁποίαν ἠμποροῦν νὰ παρουσιάζωνται ὅλαι αἱ ἀριθμητ. πράξεις ὅλων τῶν διδακτικῶν βαθμίδων τοῦ δημοτ. σχολείου ἀπὸ τὴν κατώτατην ἕως τὴν ἀνώτατην. Εἴδαμεν ἄλλωστε προηγουμένως, πῶς καὶ τὰ ἁπλούστατα προβλήματα, τὰ διδασκόμενα εἰς τὴν κατώτατην τάξιν τοῦ δημοτ. σχολείου, ἠμποροῦν νὰ παρουσιασθοῦν ὡς ἀλγεβρικά. Τὰ ἀλγεβρ. λοιπὸν προβλήματα ἠμποροῦν νὰ δίδωνται εἰς ὅλας τὰς τάξεις τοῦ δημοτ. σχολείου. Ὁ *Zeissig* (ἴδ. τὸ ἄρθρον Algebraische Aufgaben mit elementaren Lösungen in der Volksschule εἰς τὴν Encyklopädie τοῦ Rein) συνιστᾷ νὰ δίδωνται τὰ προβλήματα αὐτὰ εἰς τὸ στάδιον τῆς ἐφαρμογῆς καὶ κατὰ τὰς ἐπαναλήψεις. Μὲ τὴν γνώμην αὐτὴν εἴμεθα σύμφωνοι. Ὡς μέσα ἀσκήσεως καὶ ἐπαναλήψεως γνωστῆς ὕλης μὲ νέαν μορφὴν τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν ἐλαττώνουν, ἀλλὰ αὐξάνουν τὸ διαφέρον.

Τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀλγεβρ. προβλημάτων εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον συνιστοῦν ἐκτὸς τῶν Unger, Diesterweg καὶ Hentschel καὶ οἱ *Stubba, Kaselitz, Steuer, Büttner, Zeissig, Brenner* κ. ἄ. Αἱ σημεριναὶ συλλογαί, σχεδὸν ὅλαι, περιέχουν καὶ ἀλγεβρ. προβλήματα διαφόρων εἰδῶν. Παραπέμπομεν ἐπίσης εἰς τὰς συλλογὰς ἀλγεβρ. προβλημάτων τῶν Stubba, Mittenzwey, Schlotterbeck καὶ Zeissig.

XI. Η ΑΠΟ ΜΝΗΜΗΣ ΚΑΙ Η ΕΓΓΡΑΦΟΣ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ.

1. ΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΟΝΟΜΑΤΑ ΤΩΝ.

Ἕως τώρα ὡμιλούσαμεν περὶ τῆς ἀριθμήσεως ὅλως διόλου γενικά, χωρὶς δηλ. νὰ λαμβάνωμεν ἰδιαιτέρως ὑπ' ὄψιν τὰ εἴδη της, τὰ ὁποῖα καλλιεργοῦνται εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον. Εἰς τὸ σχολεῖον τώρα αὐτό, καθὼς εἶναι γνωστόν, καλλιεργοῦνται δύο εἴδη ἀριθμήσεως ***ἡ ἀπὸ μνήμης*** καὶ ***ἡ ἔγγραφος*** ἢ ***γραπτή***. Ἡ ἀπὸ μνήμης λέγεται καὶ ἀρίθμησις ***μὲ τὸν νοῦν («κατὰ νοῦν»)*** ἢ

μὲ τοὺς ἀριθμούς, καθὼς καὶ ***προφορικὴ*** ἢ ***ἀπὸ στόματος*** ἀρίθμησις. Ἡ γραπτὴ πάλιν ὀνομάζεται καὶ ἀρίθμησις ***εἰς τὸν πίνακα ἢ μὲ τὰ ψηφία*** ἢ ***μὲ κανόνας*** ἢ καὶ μὲ ***διάταξιν*** (κατάστρωσιν). Καιρὸς εἶναι νὰ ἐξετάσωμεν τὰ δύο αὐτὰ εἴδη τῆς ἀριθμήσεως.

---

2. ΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΙ.

[Πολλοὶ νομίζουν, ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἀνωτέρω εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως ὑπάρχουσα διαφορὰ ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι ἡ μὲν ἀπὸ μνήμης περιορίζεται εἰς τοὺς μικροτέρους ἀριθμοὺς καὶ τὰ ἁπλούστερα προβλήματα, διότι οἱ μεγάλοι ἀριθμοὶ καὶ τὰ σύνθετα προβλήματα δὲν ἠμποροῦν νὰ συγκρατηθοῦν εὔκολα εἰς τὴν μνήμην, ἡ δὲ γραπτὴ ἀσχολεῖται μὲ τοὺς μεγαλύτερους ἀριθμοὺς καὶ τὰ συνθετώτερα προβλήματα. Μολονότι ἡ διαφορὰ αὐτὴ ὑφίσταται πράγματι συνηθέστατα εἰς τὴν πρᾶξιν μεταξὺ τῶν δύο εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως, ἐν τούτοις δὲν εἶναι καὶ ἡ οὐσιώδης διαφορά των, διότι, ὅπως εἶναι γνωστόν, καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις ἠμπορεῖ νὰ ἀσχολῆται μὲ μικροὺς ἀριθμοὺς καὶ ἁπλᾶ προβλήματα καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἠμποροῦν μετὰ προηγουμένην ἄσκησιν νὰ συγκρατηθοῦν σχετικῶς μεγάλοι καὶ πολλοὶ ἀριθμοὶ (ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 14).

Ἄλλοι πάλιν φρονοῦν, ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν δύο εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως ὑπάρχουσα διαφορὰ συνίσταται εἰς τὸ ὅτι εἰς μὲν τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν εἶναι ἀπαραίτητη ἡ γραφή, (πρᾶγμα διὰ τὸ ὁποῖον καὶ ἔχει ἐπικρατήσει ἡ ὀνομασία της «ἔγγραφος» ἢ «γραπτὴ» ἀρίθμησις ἢ ἀρίθμησις «εἰς τὸν πίνακα»), εἰς δὲ τὴν ἀπὸ μνήμης ἡ μὲν γραφὴ δὲν ἠμπορεῖ νὰ προσφέρῃ καμίαν ὑπηρεσίαν, εἶναι δὲ ἀπαραίτητη ἡ μνήμη, (ἕνεκα τοῦ ὁποίου καὶ ἔχει ἐπικρατήσει ἡ ὀνομασία της ἀρίθμησις «ἀπὸ μνήμης»), ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ὡς βοηθὸν καὶ τὸν προφορικὸν λόγον, (ὁπόθεν προέρχεται καὶ ἡ ὀνομασία της «προφορικὴ» ἢ «ἀπὸ στόματος» ἀρίθμησις). Βέβαια καὶ ἡ διαφορὰ αὐτὴ ὑφίσταται κατὰ κανόνα εἰς τὴν πρᾶξιν. Ἐν τούτοις καὶ αὐτὴ δὲν πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς οὐσιώδης, διότι καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ χρῆσις τῆς γραφῆς καὶ ἀπὸ μνήμης καὶ χωρὶς τὴν βοήθειαν τῆς γραφῆς ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ λύσῃ προβλήματα μὲ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον λύονται εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν.

Ἡ οὐσιώδης διαφορά, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ἀπὸ μνήμης καὶ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως, δὲν ἔγκειται οὔτε εἰς τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὴν σύνθεσιν τῶν προβλημάτων οὔτε εἰς τὰ μέσα τῆς ἀριθμήσεως, ἀλλὰ ***εἰς τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον λύονται τὰ προβλήματα εἰς τὴν καθεμίαν ἀπὸ αὐτάς.***] Ἐλάχιστα παραδείγματα ἠμποροῦν νὰ καταδείξουν τὸ πρᾶγμα. Ἄς λάβωμεν τὰ προβλήματα 268+157 καὶ 15×225. Πῶς λύονται τὰ προβλήματα αὐτὰ μὲ τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ δύο εἴδη τῆς ἀριθμήσεως ;

Λύσις μὲ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν :	*Λύσις μὲ τὴν γραπτὴν* ἀρίθμησιν :
268+100=368	268
368+ 50=418	+127
418+ 7=425	425
	225
15×225	× 15
15×200=3000	1125
15× 25= 375	225
15×225=3375	3375

Ποία εἶναι ἡ ***οὐσιώδης*** διαφορά, ἡ ὑπάρχουσα μεταξὺ τῶν δύο ἀνωτέρω τρόπων τῆς λύσεως, ἑπομένως καὶ μεταξὺ τῶν δύο προκειμένων εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως; Προφανῶς ἡ ἑξῆς. [Ἐνῷ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν λαμβάνεται ὑπ᾽ ὄψιν μόνον ***ἡ πλήρης ἀξία*** τόσον τῶν ἀρχικῶς δοθέντων ἀριθμῶν, ὅσον καὶ τῶν ὀλίγων ἀριθμῶν, εἰς τοὺς ὁποίους ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ κάποιος ἀπὸ τοὺς δοθέντας, δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ ὁ ἀριθμῶν φθάνει εἰς τὸ ἐξαγόμενον ***ἐργαζόμενος,*** ἤτοι ἀνερχόμενος ἢ κατερχόμενος, ***εἰς αὐτὴν τὴν ἀριθμητικὴν σειράν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί,*** εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν λαμβάνεται κυρίως ὑπ᾽ ὄψει ***ἡ σχετικὴ*** ἤτοι ***ἡ ὡς ἐκ τῆς θέσεώς των ἀξία τῶν καθ᾽ ἕκαστον ψηφίων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν,*** δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ ὁ ἀριθμῶν φθάνει εἰς τὸ ἐξαγόμενον ὄχι ἐργαζόμενος εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειράν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἀλλὰ ***ἐργαζόμενος*** χωριστὰ καὶ διαδοχικὰ ***εἰς*** καθεμίαν ἀπὸ ***τὰς μερικὰς σειράς, εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκουν οἱ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους παριστάνουν τὰ ψηφία τῆς κάθε θέσεως.*** Εἰς τὸ ἀνωτέρω π. χ. παρατεθὲν παράδειγμα τῆς προσθέσεως διὰ τὸν ἀριθμοῦντα ἀπὸ μνήμης ἀπὸ τοὺς δύο προσθετέους ὁ μὲν 268 ὑφίσταται διαρκῶς ὡς 268, ὁ δὲ 157 ὡς 157, ἂν δὲ ἀναγκάζεται ὁ ἀριθμῶν, διὰ νὰ κάμῃ εὐκολώτερα τὴν πρᾶξιν, νὰ ἀναλύσῃ τὸν 157 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 100, 50 καὶ 7 καὶ νὰ δημιουργήσῃ ἔτσι μὲ τὴν ἀνάλυσιν αὐτὴν μερικὰ προβλήματα, λαμβάνει ἐν τούτοις καὶ τοὺς νέους αὐτοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὴν πλήρη των ἀξίαν, δὲν λησμονεῖ δέ, ὅτι καὶ οἱ 3 μαζὶ ἀντιπροσωπεύουν τὸν ἀριθμὸν 157. Καθόσον δὲ ἔτσι ἔχει ὑπ᾽ ὄψιν του τὴν πλήρη ἀξίαν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, φθάνει εἰς τὸ ἐξαγόμενον ἐργαζόμενος ἀμέσως εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 1—1000, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν, ἤτοι ἀνερχόμενος ἀπὸ τὸν 268 κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ὁ ἀριθμὸς 157, ἢ ἀναλυτικώτερα πρῶτα κατὰ 100, ἔπειτα κατὰ 50 καὶ ἔπειτα κατὰ 7. Διὰ τὸν ἀριθμοῦντα τώρα γραπτῶς ὁ μὲν προσθετέος 268 δὲν ὑφίσταται ὡς 268, ἀλλὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ 8 μονάδας 6 δεκάδας καὶ 2 ἑκατοντάδας, ἤτοι ἀπὸ 3 μονοψηφίους ἀριθμοὺς διαφόρων τάξεων, ὁ δὲ 157 δὲν ὑφίσταται ὡς 157, ἀλλ᾽ ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 μονάδας, 5 δεκάδας καὶ 1 ἑκατοντάδα, ἤτοι πάλιν ἀπὸ 3 μονοψηφίους διαφόρον τάξεων. Δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ ὁ ἀριθμῶν φθάνει εἰς τὸ ἐξαγόμενον ὄχι ἐργαζόμενος εἰς τὴν σειρὰν 1—1000, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν οἱ δύο προσθετέοι, ἀλλὰ ἐργαζόμενος διαδοχικὰ πρῶτα εἰς τὴν σειρὰν τῶν μονάδων, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν οἱ δύο μονοψήφιοι ἀριθμοὶ οἱ κατέχοντες τὴν πρώτην ἐκ δεξιῶν θέσιν εἰς τοὺς δοθέντας προσθετέους, ἔπειτα εἰς τὴν σειρὰν τῶν δεκάδων, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν οἱ δύο μονοψήφιοι ἀριθμοὶ οἱ κατέχοντες τὴν δεύτερην θέσιν εἰς τοὺς ἴδιους προσθετέους, τέλος εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἑκατοντάδων, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν οἱ δύο μονοψήφιοι ἀριθμοὶ τῆς τρίτης θέσεως τῶν δοθέντων προσθετέων. Φυσικὰ δὲ διὰ νὰ γίνῃ ἔτσι ἡ ἐργασία, διατάσσει, καταστρώνει ὁ ἀριθμῶν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα

κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον σύμφωνα μὲ τὴν σχετικὴν ἀξίαν τῶν ψηφίων
των, διαιρεῖ τὸ πρόβλημα εἰς τόσα μερικὰ προβλήματα, ὅσαι
εἶναι αἱ θέσεις τῶν ψηφίων, κατὰ δὲ τὴν λύσιν κάθε μερικοῦ προ-
βλήματος ἐκτελεῖ τὴν σχετικὴν πρᾶξιν λαμβάνων ὑπ' ὄψιν του ὄχι
μόνον τὴν ἀπόλυτην ἀξίαν τῶν ἀριθμουμένων ψηφίων, ἀλλὰ καὶ
τὴν σχετικήν, ἡ ὁποία δεικνύεται ἀπὸ τὴν θέσιν των. Κατόπιν
τώρα ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω εἶναι φανερόν, ὅτι ἀπὸ ὅλας τὰς ὀνομα-
σίας τῶν δύο προκειμένων εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι
τὰ χαρακτηρίζουν ἀκριβέστερα, εἶναι αἱ ὀνομασίαι «***ἀρίθμησις***
μὲ τοὺς ἀριθμοὺς» καὶ «***ἀρίθμησις μὲ τὰ ψηφία*** (ἤτοι μὲ τὴν
σχετικὴν ἀξίαν τῶν ψηφίων)» ἢ «***ἀρίθμησις μὲ διάταξιν*** (ἴδ.
καὶ *Büttner*, ὅπ. ἀν., σελ. 14 κ. ἀκ. καὶ *Räther*, ὅπ. ἀν., μέρ.
2, σ. 5 κ. ἀκ.)].

Ὑπάρχουν ἀκόμη καὶ αἱ ἑξῆς διαφοραὶ μεταξὺ τῶν δύο εἰδῶν
τῆς ἀριθμήσεως, αἱ ὁποῖαι ὅμως εἶναι ἐπακολουθήματα τῆς ἀνω-
τέρω μνημονευθείσης οὐσιώδους διαφορᾶς:

1. Εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν οἱ ἀριθμοῦντες ἔχουν ***με-***
γάλην ἐλευθερίαν εἰς τὴν ἐκλογὴν τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον
ἠμποροῦν νὰ λύσουν τὸ κάθε πρόβλημα. [Ὁ λόγος δὲ τοῦ πρά-
γματος εἶναι, ὅτι εἰς τὴν ἀρίθμησιν αὐτήν, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει εἰς
αὐτὴν ἀριθμητικὸς νόμος, ἀριθμητικὸς κανὼν ἐπιβάλλων ὡρισμέ-
νην ἀκολουθίαν εἰς τὰ μερικὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ-
ται τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα, δι' αὐτὸ ἡ ἀκολουθία αὐτὴ δὲν εἶναι ἡ
ἴδια εἰς ὅλα τὰ ὁμοειδῆ προβλήματα, ἀλλὰ διαφορετική, ἐξαρτω-
μένη κάθε φορὰν μόνον ἀπὸ τὴν ἄποψιν, πῶς θὰ σχηματισθοῦν
μερικὰ προβλήματα ὅσον τὸ δυνατὸν ***ὀλιγώτερα*** καὶ περιέχοντα
ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἠμποροῦν ***νὰ συγκρατηθοῦν εὐκολώ-***
τερα ἀπὸ τὴν μνήμην. Ἐὰν εἰς τὴν λύσιν εἴτε τοῦ ἀρχικοῦ
προβλήματος εἴτε κάποιου ἀπὸ τὰ μερικὰ ἠμπορῇ νὰ ἐφαρμοσθῇ
καμία εὐκολία, ἐπιταχύνουσα τὴν λύσιν, ἀφήνεται κατὰ μέρος
ὁ ὡς κανονικὸς θεωρούμενος τρόπος τῆς λύσεως καὶ γίνεται
ἐφαρμογὴ τῆς εὐκολίας. Ἔτσι εἰς τὸ ἀνωτέρω παρατεθὲν παρά-
δειγμα τῆς προσθέσεως ἡ μερικὴ πρόσθεσις $368+57$ δὲν εἶναι
ἀνάγκη νὰ γίνῃ μὲ τὸν συνήθη τρόπον $368+50+7$, ἀλλὰ μὲ τὴν
εὐκολίαν $368+60=428, -3=425$. Ἀπεναντίας εἰς τὴν γρα-
πτὴν ἀρίθμησιν, ἐπειδὴ εἰς αὐτὴν λαμβάνεται ὑπ' ὄψει καὶ ἡ σχε-

τικὴ ἀξία τῶν ψηφίων, ***εἶναι δεσμευμένοι*** οἱ ἀριθμοῦντες μὲ ὡρισμένους τρόπους λύσεως, ***μὲ ὡρισμένους νόμους ἢ κανόνας***. Δι' αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς καὶ ἡ ἀρίθμησις αὐτὴ λέγεται καὶ «***ἀρίθμησις μὲ κανόνας***» (πρβ. καὶ *Büttner*, ὅπ. ἀν., σ. 15)]. Ἂν τώρα, διὰ νὰ γίνῃ ἀντιδιαστολὴ μὲ τὴν ἀρίθμησιν αὐτήν, λέγεται ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ «***ἀρίθμησις μὲ τὸν νοῦν***», αὐτὸ σημαίνει κυρίως, ὅτι ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις δὲν δεσμέυεται μὲ κανόνας. Διότι προφανῶς καὶ εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν αἱ καθαυτὸ ἀριθμητικαὶ ἐργασίαι γίνονται μὲ τὸν νοῦν. Κάθε μορφωτικὴ ἀρίθμησις εἶναι ἀρίθμησις μὲ τὸν νοῦν.

2. Ἀπὸ τὴν οὐσιώδη ἐπίσης διαφοράν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως, ἀπορρέει καὶ ἡ ἑξῆς. Ἐνῷ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν ἀρχίζομεν πάντοτε ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως, εἰς τὴν γραπτὴν ἀρχίζομεν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς κατωτάτης, ἐξαίρεσιν κάμνοντες μόνον εἰς τὴν διαίρεσιν.

---

3. Η ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΚΑΘΕΜΙΑΣ.

Ὅτι καὶ ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις ἔχουν τὰ πλεονεκτήματά των, εἶναι προφανὲς κατόπιν ἀπὸ ὅσα εἴδαμεν ἐξετάζοντες τὴν φύσιν τῆς καθεμιᾶς.

[Ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις ἠμπορεῖ περισσότερον ἀπὸ τὴν γραπτὴν νὰ κάμῃ τοὺς μαθητὰς ἱκανοὺς νὰ ἐργάζωνται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς κάθε διδασκομένης σειρᾶς, διότι εἰς αὐτὴν λαμβάνονται οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ μὲ τὴν πλήρη των ἀξίαν, ἐνῷ εἰς τὴν γραπτὴν ἡ ἐργασία γίνεται μὲ τὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν. Διὰ τὸν ἴδιον δὲ λόγον ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις συντελεῖ ἀσυγκρίτως περισσότερον ἀπὸ τὴν γραπτὴν εἰς τὴν διασάφησιν τῆς ἐννοίας τοῦ κάθε ἀριθμοῦ. Ἐφόσον δὲ κάμνει τὰς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν σαφεῖς, προετοιμάζει τὸ ὑλικόν, μὲ τὸ ὁποῖον θὰ ἐργασθῇ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις. καὶ ἔτσι προπαρασκευάζει τὸ ἔργον της, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν ἠμπορεῖ νὰ κάμῃ καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης (ἴδ. *Räther*, ὅπ. ἀν., μέρος 2, σελ. 7)]. Ἔπειτα ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις ἐξαναγκάζει καὶ εἰς μεγαλύτερην προσοχήν, [διότι ὁ ἀπὸ μνήμης ἀριθμῶν ἠξεύρει πολὺ καλά, ὅτι, ἂν δὲν προσέξῃ, δὲν θὰ εὕρῃ κανὲν βοηθητικὸν μέσον, διὰ νὰ ἐπανορθώσῃ τὰ κακὰ ἐπακολουθήματα τῆς ἀπροσεξίας του. Ὡσαύτως ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις ἐξαναγκάζει εἰς ταχεῖαν καὶ ἀσφαλῆ ἐντύπωσιν τῶν ἀριθμῶν τῶν προβλημάτων] καὶ [δι' αὐτὸ] ἐνισχύει καὶ τὴν μνήμην τῶν ἀριθμῶν. Ἀλλ' ἐπίσης ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθησις ἐνισχύει περισσότερον ἀπὸ τὴν γραπτὴν καὶ τὰς νοητικὰς δυνάμεις, [διότι ὡς ἐκ τῆς φύσεώς της ἀποκλείει κάθε μηχανικὴν ἐργασίαν καὶ ἀπαιτεῖ διαρκῶς τὴν νοητικὴν αὐτενέργειαν τοῦ ἀριθμοῦντος, ὁ ὁποῖος εἶναι ὑποχρεωμένος μόνος του καὶ ὅσον τὸ δυνατὸν γρηγορώτερα νὰ παραστήσῃ μὲν τὴν πλήρη ἀξίαν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, νὰ σκεφθῇ δὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος, νὰ ἐκλέξῃ δὲ τὸν καταλληλότερον καὶ νὰ τὸν ἐφαρμόσῃ ἐπιτυχῶς, ἐνῷ εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν, μολονότι, ὅπως εἴδαμεν, δὲν παύει καὶ αὐτὴ ποτὲ νὰ εἶναι ἔλλογος ἀρίθμησις, ἡ συστηματικὴ διάταξις τῶν ἀριθμῶν καὶ οἱ σχετικοὶ μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν κανόνες ἀπαλλάσσουν τὸν ἀριθμοῦντα ἀπὸ ἀρκετὴν ἐργασίαν. Ἀκριβῶς δὲ διὰ τοὺς ἀνωτέρω λόγους ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις δεικνύει καλύτερα ἀπὸ τὴν γραπτὴν τὰς ἀριθμητικὰς δυνάμεις τῶν μαθητῶν. Ὅλα τώρα τὰ μνημονευθέντα αὐτὰ πλεονεκτήματα τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως εἶναι πλεονεκτήματα **εἰδολογικῆς** φύσεως, καταδεικνύουν δὲ τὴν μεγάλην εἰδολογικήν της ἀξίαν, καθὼς καὶ τὴν ὑπεροχήν της ὡς πρὸς αὐτὴν ἀπὸ τὴν γραπτήν]. Εἰς τὴν ὑπεροχὴν δὲ αὐτὴν ὀφείλεται καὶ τὸ γεγονός, ὅτι οἱ δεξιοὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν ἔχουν κατὰ κανόνα δεξιότητα καὶ εἰς τὴν γραπτήν, ἐνῷ οἱ δεξιοὶ εἰς τὴν γραπτὴν δὲν εἶναι πάντοτε εὐκίνητοι καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης. [Ἐν τούτοις ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις δὲν στερεῖται καὶ **ὑλικῆς** ἀξίας, διότι ὡς μὴ ἔχουσα ἀνάγκην ἀπὸ ἐξωτερικὰ βοηθητικὰ μέσα ἠμπορεῖ νὰ ἀσκῆται παντοῦ καὶ πάντοτε. Ἀκριβῶς δὲ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν γίνεται καὶ πολὺ μεγαλύτερη χρῆσίς της ἀπὸ τὴν γραπτὴν εἰς τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον, ἐφόσον τοὐλάχιστον πρόκειται διὰ προβλήματα μὲ μικροὺς καὶ ὀλίγους ἀριθμούς].

Ἀλλὰ καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις ἔχει τὰ πλεονεκτήματά της, [τὰ ὁποῖα, ὅπως ὀρθὰ παρατηρεῖ ὁ *Räther* (ὅπ. ἀν.), εἶναι κυρίως πλεονεκτήματα **ὑλικῆς** φύσεως]. Τὰ ἀποτελέσματά της εἶναι πολὺ

ἀσφαλέστερα ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως, [ἡ δὲ ἀκρίβειά των ἠμπορεῖ νὰ ἐξελέγχεται εὐκολώτερα καὶ γρηγορώτερα τόσον ἀπὸ τὸν ἀριθμοῦντα, ὅσον καὶ ἀπὸ κάθε ἄλλον]. Ἐξ ἄλλου ἡ χρῆσίς της ὡς ἐκ τῆς φύσεώς της εἶναι ἀπεριόριστη· ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμόζεται εἰς ὁποιαδήποτε προβλήματα καὶ ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς, ἐνῷ ἡ ἀπὸ μνήμης περιορίζεται εἰς τοὺς μικροτέρους ἀριθμοὺς καὶ τὰ ἁπλούστερα προβλήματα. [Ἀκριβῶς δὲ διὰ τὰ πλεονεκτήματά της αὐτὰ γίνεται ἀποκλειστικὴ σχεδὸν χρῆσίς της εἰς τὸν ἀνώτερον πρακτικὸν βίον, ἀρκετὴ δὲ καὶ εἰς τὸν συνήθη, ἐφόσον φυσικὰ πρόκειται νὰ λυθοῦν εἰς αὐτὸν προβλήματα μὲ μεγάλους καὶ δυσκόλους ἀριθμοὺς καὶ ἐν γένει συνθετώτερα].

---

4. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ.

Μέχρι τοῦ τέλους περίπου τοῦ 17ου αἰῶνος ἡ ἀρίθμησις ἐγίνετο μόνον γραπτῶς. Ἀργότερα ἄρχισε νὰ καλλιεργῆται καὶ ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις, ὅπως π. χ. ἀπὸ τὸν *Rochow* καὶ τὸν *Peter Villaume*. Ὁ Rochow ἀφιέρωνε εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν τὸ ἥμισυ περίπου τοῦ χρόνου τοῦ προσδιωρισμένου διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς Ἀριθμητικῆς, ἐδίδασκε δὲ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν ὡς ἀναγκαίαν ἐπέκτασιν τῆς ἀπὸ μνήμης. Ὁ ***Πεσταλότσης***, ὁ ὁποῖος, καθὼς ἠξεύρομεν, ἐθεωροῦσε ὡς ἀποκλειστικὸν σκοπὸν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας τὴν εἰδολογικὴν μόρφωσιν τῶν μαθητῶν, ἐθεράπευε σχεδὸν μόνον τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, παραμελοῦσε δὲ πολὺ τὴν γραπτήν. Ἡ ἀποκατάστασις τῆς ὀρθῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν δύο εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως ἔγινε ἀπὸ τὸν *Diesterweg*, τὸν *Unger*, τὸν *Hentschel* καὶ ἄλλους. Ἐξ ἄλλου οἱ Ἑλβετοὶ Μεθοδικοὶ *Hug*, *Egger* καὶ *Rueg* καταπολεμοῦν τὴν κατ' ἀρχὴν ἀντιδιαστολὴν τῆς ἀπὸ μνήμης καὶ τῆς ἐγγράφου ἀριθμήσεως. Ἐκτὸς δὲ τῶν ἀνωτέρω ἔχουν ἀσχοληθῆ διεξοδικὰ μὲ τὰ προκείμενα δύο εἴδη τῆς ἀριθμήσεως καὶ ὁ ἐκ Βάδης Μεθοδικὸς τῆς Ἀριθμητικῆς *Scherer* (Andeutungen zur Erteilung des Rechenunterrichts in der Volksschule, Karlsτuhe, Lanz), ὁ *Hartmann* (ὅπ. ἀνωτ., σελ. 409—460), ὁ *Büttner* (ὅπ. ἀνωτ., σελ. 14 κ.ἀκ.), ὁ *Scheller* (Methodisch geordnete Materialien κ. τ. λ., Münster, 1875), ὁ *Linke* (Rechenbuch für Volksschulen, Jena, 1884) καὶ ὁ *Schlott* (Das vereinigte Kopf—und Tafelrechnen, Braunschweig).

5. Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΙΔΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ.

[Ἀπὸ ὅσα εἴπαμεν εἰς τὰ προηγούμενα διὰ τὰ πλεονεκτήματα τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ δύο εἴδη τῆς ἀριθμήσεως, ἠμποροῦμεν εὔκολα νὰ συμπεράνωμεν, τί πρέπει **ἐν γένει** νὰ ἰσχύῃ εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον τόσον ὡς πρὸς **τὴν ἔκτασιν** τῆς διδασκαλίας των ὅσον καὶ ὡς πρὸς **τὴν θέσιν**, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς αὐτὴν τὸ καθέν. Προφανὲς εἶναι βέβαια, ὅτι κανὲν ἀπὸ τὰ δύο εἴδη τῆς ἀριθμήσεως δὲν πρέπει νὰ παραμελῆται καὶ ὅτι ἡ μὲν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις πρέπει νὰ ἀσκῆται ἰδίως εἰς τὰ ἁπλούστερα προβλήματα, ἤτοι τὰ ἔχοντα μικροτέρους καὶ ὀλιγωτέρους ἀριθμούς, ἡ δὲ γραπτὴ εἰς τὰ ἔχοντα μεγαλυτέρους καὶ περισσοτέρους ἀριθμούς, ἤτοι τὰ συνθετώτερα. Φανερὸν ὅμως εἶναι ἐπίσης, ὅτι ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις, ἐπειδὴ ἔχει καὶ ἀσυγκρίτως μεγαλυτέραν εἰδολογικὴν ἀξίαν ἀπὸ τὴν γραπτήν, τῆς ὁποίας δι' αὐτὸ καὶ προπαρασκευάζει τὸ ἔργον, καὶ μεγάλην σπουδαιότητα διὰ τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον, πρέπει νὰ καλλιεργῆται περισσότερον ἀπὸ τὴν γραπτήν, ἡ ὁποία κυρίως πρέπει νὰ περιορίζεται εἰς καθετί, ποὺ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀριθμηθῇ εὔκολα ἀπὸ μνήμης, προσέτι δὲ νὰ προτάσσεται ἀπὸ αὐτὴν κατὰ κανόνα ἐκεῖ, ὅπου πρόκειται νὰ διδαχθοῦν καὶ αἱ δύο.

Ἂν τώρα αὐτὰ πρέπῃ νὰ ἰσχύουν ἐν γένει εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον, εἶναι ἐν τούτοις προφανές, ὅτι] εἰς τὰ **πρῶτα σχολικά του ἔτη**, [εἰς τὰ ὁποῖα θέτονται αἱ βάσεις τῆς ὅλης ἀριθμητικῆς διδασκαλίας καὶ εἰς τὰ ὁποῖα δι' αὐτὸ πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν ἀσυγκρίτως περισσότερον τὰ εἰδολογικά της στοιχεῖα παρὰ αἱ ὑλικαί της ἀπόψεις], **πρέπει νὰ καλλιεργῆται ἀποκλειστικὰ ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις**, [ἡ ὁποία μόνον ἠμπορεῖ

ἕνεκα τῶν εἰδολογικῶν της πλεονεκτημάτων νὰ συντελέσῃ εἰς τὴν καλυτέραν ἐκπλήρωσιν τοῦ ἔργου ἐκείνου]. Εἰς τὸ ζήτημα αὐτὸ εἶναι σύμφωνοι ὅλοι οἱ Μεθοδικοί. Διαφωνία μεταξύ των παρατηρεῖται μόνον ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἐκταθῇ ὁ περιορισμὸς αὐτὸς εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν.

[Ἔτσι ὁ *P. Tschirsch* εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις πρέπει νὰ διδάσκεται μόνον εἰς τὴν ἀνωτέραν βαθμίδα τοῦ κατωτέρου σχολείου. Ὅτι ὅμως ἔτσι θὰ εἰσάγωνται οἱ μαθηταὶ παραπολὺ ἀργὰ εἰς τὴν ἔγγραφον ἀρίθμησιν, εἶναι προφανές].

Οἱ *Grube*, *Böhme*, *Kaselitz*, *Rein* καὶ *Pickel* ὑποστηρίζουν, ὅτι οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ περιορίζωνται εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, ἐφόσον διδάσκονται τοὺς μέχρι τοῦ 1000 ἀριθμούς.

Τέλος οἱ *Hentschel*, *Steuer*, *Büttner*, *Schröter*, *Hartmann*, *Räther*, *Beetz* κ. ἄλλ. φρονοῦν, ὅτι ἡ διδασκαλία τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως πρέπει νὰ ἀρχίσῃ εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 καὶ ὅτι ἑπομένως ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις πρέπει νὰ καλλιεργῆται ἀποκλειστικὰ μόνον κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—100.

Νομίζομεν, ὅτι ἡ τελευταία αὐτὴ γνώμη εἶναι ἡ περισσότερον ὀρθή. [Οἱ λόγοι δὲ τοῦ πράγματος, ὅπως τοὺς διατυπώνει σύντομα, ἀλλὰ εὔστοχα ὁ *Räther* (ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σελ. 12), εἶναι οἱ ἑξῆς. Ἐν πρώτοις εἶναι σκοπιμώτερον νὰ ἀσκοῦμεν τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν κατ' ἀρχὰς ἐπάνω εἰς μικροτέρους ἀριθμούς, πρᾶγμα ἄλλωστε, τὸ ὁποῖον κάμνουν καὶ οἱ εἰσάγοντες αὐτὴν κατὰ πρῶτον εἰς τὴν σειρὰν 1— τῶν ἑκατομμυρ., διότι καὶ αὐτοὶ ἀναγκάζονται νὰ τὴν ἐφαρμόσουν κατ' ἀρχὰς εἰς ἀριθμοὺς μικροτέρους ἀπὸ τὸν 1000. Ἔπειτα οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ γίνουν τελείως δεξιοὶ εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀκεραίων, ἐπειδὴ δὲ πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται μακρὰ ἄσκησις, καλὸν εἶναι νὰ ἀρχίσῃ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—1000 (ἤτοι ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου σχολικοῦ ἔτους, εἰς τὸ ὁποῖον, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος, πρέπει νὰ διδάσκεται ἡ σειρὰ αὐτή). Τέλος εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 ὑπάρχει ἀρκετὸς ἀριθμὸς προβλημάτων (π. χ. προσθέσεων μὲ πολλοὺς προσθετέους, συνδυασμῶν πράξεων κ. τ. λ.), τὰ ὁποῖα δὲν ἠμποροῦν νὰ λυθοῦν εὔκολα μὲ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, καὶ εἰς τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ ἀντιληφθοῦν οἱ μαθηταὶ τὰ ἀνωτέρω μνημονευθέντα πλεονεκτήματα τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως].

Ἀλλ' ἂν ἀποκλείεται ἡ ἔγγραφος ἀρίθμησις κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—100, δὲν πρέπει ὅμως νὰ ἀποκλείεται κατ' αὐτὴν καὶ κάθε **ἔγγραφος ἀριθμητικὴ ἐπασχόλησις τῶν μαθητῶν** εἴτε εἰς τὸ σχολεῖον εἴτε κατ' οἶκον, ἐφόσον φυσικὰ δὲν τοὺς ἀπομακρύνει ἀπὸ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν. Θὰ εἶναι δὲ τέτοια ἡ ἔγγραφος ἐπασχόλησίς των, ἂν συνίσταται εἰς τὴν καταγραφὴν τῶν ἀριθμουμένων ἀπὸ μνήμης μὲ τὸν τρόπον τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεώς των, [ἂν δηλ. κατ' αὐτὴν καταγράφουν οἱ μαθηταὶ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ κάθε προβλήματος μὲ τὸ σημεῖον τῆς πράξεως καὶ κοντὰ εἰς αὐτοὺς μὲ τὴν μορφὴν τῆς ἐξισώσεως τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως, ὅπως τὸ ηὗραν ἀριθμοῦντες ἀπὸ μνήμης (τ. χ. $7+1=8$, $25+15=40$ καὶ ὄχι $\begin{array}{r}7\\+1\\\hline 8\end{array}$ καὶ $\begin{array}{r}25\\+15\\\hline 40\end{array}$, $42-5=37$ καὶ ὄχι $\begin{array}{r}42\\-5\\\hline 37\end{array}$ κ.τ.λ.). Προφανῶς τὸ εἶδος αὐτὸ τῆς ἐγγράφου ἀριθμήσεως δὲν ἀκολουθεῖ πορείαν διαφορετικὴν ἀπὸ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, διαφέρει δὲ ἀπὸ αὐτὴν μόνον ὡς πρὸς τὸ ἐπουσιῶδες στοιχεῖον, ὅτι, ἐνῷ εἰς ἐκείνην οἱ ἀριθμοὶ κρατοῦνται εἰς τὴν μνήμην, εἰς αὐτὴν καταγράφονται (πρβ. καὶ *Räther*, ὅπ. ἀν., μέρ. 1, σελ. 64). Ἡ ἔγγραφος δὲ αὐτὴ ἐπασχόλησις τῶν μαθητῶν ἐπιβάλλεται διὰ τοὺς ἀκολούθους λόγους (ἴδ. *Räther*, ὅπ. ἀν.). Ἐν πρώτοις εἶναι ἀπαραίτητον νὰ μάθουν οἱ μαθηταὶ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμητικῶν ψηφίων, τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ νὰ ἀσκηθοῦν τελείως εἰς αὐτήν, διότι θὰ τοὺς χρησιμεύσῃ διὰ τὴν καθαυτὸ γραπτὴν ἀρίθμησιν. Δεύτερον πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει, ὅτι οἱ μικροὶ μαθηταὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ παρακολουθοῦν ἐπὶ μίαν ὥραν συνεχῶς διδασκαλίαν καὶ προφορικὴν ἄσκησιν, διὰ νὰ ἀποφευχθῇ δὲ ἡ σχετικὴ μονοτονία καὶ ἡ συναφὴς μὲ αὐτὴν κόπωσις, σκόπιμον εἶναι νὰ δίδεται εἰς αὐτοὺς ἐπὶ ἀρκετὸν μέρος τῆς διδακτικῆς ὥρας ἕνα νέον εἶδος ἐργασίας, ὁποῖον εἶναι ἡ ἔγγραφος ἐπασχόλησις. Ἔπειτα

ἡ ἔγγραφος ἐπασχόλησις εἶναι τὸ μόνον μέσον, μὲ τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ ἀνατίθεται εἰς τοὺς μαθητὰς καὶ κατ' οἶκον ἐργασία σχετικὴ μὲ τὰ ἀριθμηθέντα ἀπὸ μνήμης εἰς τὸ σχολεῖον. Κατόπιν δὲν πρέπει νὰ λησμονῆται, ὅτι τὸ νέον αὐτὸ εἶδος τῆς ἐργασίας προκαλεῖ καὶ ἀναπτύσσει καὶ τὴν πνευματικὴν καὶ τὴν σωματικὴν αὐτενέργειαν τῶν μαθητῶν, προσλαμβάνει δὲ δι' αὐτοὺς γρήγορα μεγάλην σπουδαιότητα, διότι τοὺς κάμνει ἱκανοὺς νὰ παριστάνουν ἔτσι τὰ νοήματά των, ὥστε ἡ παράστασίς των νὰ μὴ χάνεται, ὅπως χάνονται αἱ λέξεις, ἀλλὰ νὰ διατηρῆται καὶ δι' αὐτὸ νὰ ἠμπορῇ νά γίνῃ ἀντιληπτὴ καὶ ἀπὸ τὸν διδάσκαλον καὶ ἀπὸ τοὺς συμμαθητάς των καὶ ἀπὸ τοὺς γονεῖς των ἀκόμη. Ἐξ ἄλλου ἡ ἔγγραφος ἐπασχόλησις εἶναι ἀπαραίτητη εἰς τὰ ὀλιγοτάξια σχολεῖα, διότι μὲ αὐτὴν ἠμποροῦν νὰ ἐπασχολοῦνται ὅσαι τάξεις δὲν διδάσκονται ἀπὸ τὸν διδάσκαλον. Τέλος πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν καὶ τῶν προκειμένων τάξεων, μολονότι τὰ προβλήματά της ἔχουν ἀριθμοὺς μικροὺς καὶ κατὰ κανόνα ὀλίγους, ἐν τούτοις δὲν θὰ λείπουν αἱ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας θὰ εἶναι ἀπαραίτητον νὰ βοηθῆται ἡ μνήμη ἀπὸ τὴν γραφήν. Δι' ὅλους λοιπὸν αὐτοὺς τοὺς λόγους ἐπιβάλλεται ἡ ἔγγραφος ἐπασχόλησις τῶν μαθητῶν κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1 100]. Οἱ μαθηταὶ θὰ καταγράφουν τὰ ἀπὸ μνήμης ἀριθμούμενα καὶ εἰς τὰ ἀβάκια καί, ἐφόσον τὰ μέσα τῶν γονέων ἐπιτρέπουν, καὶ εἰς ἰδιαίτερα τετράδια, θὰ λαμβάνῃ δὲ μέριμναν ὁ διδάσκαλος, ὅπως τὰ γραφόμενα εἶναι εὐσύνοπτα καὶ ὄχι μόνον εὐκρινῆ, ἀλλὰ καὶ ὡραῖα.

[Φυσικὰ ὅ,τι πρῶτον πρέπει νὰ ἠξεύρουν νὰ γράφουν οἱ μαθηταί, διὰ νὰ ἠμποροῦν νὰ ἐπασχολοῦνται ἐγγράφως, εἶναι τὰ ψηφία τῶν 10 θεμελιωδῶν ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν ἀριθμῶν 1—10, τὸ 0 καὶ τὰ σημεῖα τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος. Σχετικὰ τώρα μὲ τὴν γραφὴν τῶν ψηφίων 1—10 ὀρθὸν εἶναι ἡ διδασκαλία τῆς γραφῆς τοῦ κάθε ψηφίου νὰ συνδέεται μὲ τὴν διδασκαλίαν τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον παριστάνει. Πρέπει ὅμως κατὰ τὴν διδασκαλίαν αὐτὴν νὰ μὴ λησμονοῦμεν, ὅπως ὀρθὰ παρατηρεῖ ὁ *Räther* (ὅπ. ἀν., μέρ. 1, σ. 64 κ. ἀκ.), ὅτι τὸ ψηφίον εἶναι τὸ σύμβολον, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς εἶναι τὸ πρᾶγμα, καὶ ὅτι μόνον, ἐφόσον τὸ πρᾶγμα εἶναι γνωστόν, ἔχει νόημα καὶ ἀξίαν τὸ σύμβολόν του. Εἰς τὴν προκειμένην μάλιστα περίπτωσιν τὸ σύμβολον, τὸ ψηφίον, παρουσιάζεται ὡς ἑνότης, ἐνῷ τὸ πρᾶγμα, ὁ ἀριθμός, εἶναι πληθύς. Καὶ δι' αὐτὸν ἑπομένως ἀκόμη τὸν λόγον πρέπει οἱ μαθηταί, πρὶν διδαχθοῦν τὸ σύμβολον, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται ὡς ἑνότης, νὰ γνωρίσουν τὸν ἀριθμὸν ὡς πληθύν. Κατόπιν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω εἶναι προφανές, ὅτι διδάσκοντες ἕνα νέον ἀριθμόν, π.χ. τὸν 4 (ἢ ἀκριβέστερα, καθὼς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον, τὴν νέαν ἀριθμητικὴν σειρὰν 1—4, τὴν σειρὰν δηλαδή, τῆς ὁποίας ὁ νέος ἀριθμὸς ἀποτελεῖ τὸ ***τελευταῖον*** μέλος) δὲν πρέπει νὰ δίδωμεν ἀμέσως τὸ ψηφίον του, ἀλλὰ μόνον ἀφοῦ γνωρίσουν οἱ μαθηταὶ ὁπωσδήποτε ἐπαρκῶς τὸ περιεχόμενόν του, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον θὰ συμβαίνῃ, ἀφοῦ μάθουν ***τοὐλάχιστον*** μὲ τὴν βοήθειαν τῶν μέσων τῆς ἐποπτείας νὰ σχηματίζουν τὸν νέον ἀριθμὸν διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ προηγουμένου του καὶ τῆς μονάδος (3+1=4). Μόνον ἀφοῦ σχηματίσουν ἔτσι τὸν νέον ἀριθμόν, θὰ ἠμπορῇ εἰς τὸ ἐπακολουθοῦν τὸν σχηματισμὸν αὐτὸν διδακτικὸν στάδιον τῆς ἀσκήσεως νὰ δοθῇ εἰς αὐτοὺς τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον τὸν παριστάνει. Φυσικὰ δέ, ἀφοῦ ἀσκηθοῦν ἐπαρκῶς οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν γραφήν του, θὰ ἠμποροῦν νὰ παραστήσουν γραπτῶς εἰς τὸ ἴδιον διδακτικὸν στάδιον καὶ τὴν πρόσθεσιν 3+1=4, μὲ τὴν ὁποίαν ἐσχηματίσθηκε ὁ νέος ἀριθμός, ὅπως ἐπίσης, ἀφοῦ μάθουν καὶ τὰς ἄλλας προσθέσεις καὶ τὰς ἀφαιρέσεις καὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς διαιρέσεις, τῶν ὁποίων ἐξαγόμενον ἢ ἀφετηρία εἶναι ὁ νέος ἀριθμὸς 4. θὰ ἠμποροῦν νὰ ἀσκοῦνται εἰς τὴν ἔγγραφον παράστασιν καὶ τῶν πράξεων αὐτῶν. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ συνηθίσουν οἱ μαθηταὶ νὰ παριστάνουν ἐγγράφως καθετί, τὸ ὁποῖον ἔχουν λογαριάσει ἀπὸ μνήμης.

Ἀρκετοὶ τώρα Μεθοδικοί, φρονοῦντες, ὅτι ἡ γραφὴ μερικῶν ἀπὸ τὰ πρῶτα ἀριθμητικὰ ψηφία, καὶ ὡρισμένως τοῦ 2 καὶ τοῦ 3, παρουσιάζει ἀρκετὰς δυσκολίας, εἰς τοὺς μαθητάς, πρῶτον διδάσκουν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 (ἢ καὶ μέγα μέρος των) καὶ κατόπιν προσφέρουν τὰ ψηφία των μὲ τὴν σειρὰν τῆς εὐκολίας των, ἤτοι (, ἂν ἔχουν διδάξει ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς 1—10,) πρῶτα τὰ ψηφία 1, 4, 7, ἔπειτα τὰ 0, 6 καὶ 9 καὶ τέλος τὰ 2, 3, 5 καὶ 8. Εἶναι ὅμως προφανές, ὅτι πολὺ προτιμότερον εἶναι νὰ

διδάσκεται τὸ κάθε ψηφίον εὐθὺς μετὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον παριστάνει, πρῶτον μέν, διότι ἔτσι γίνεται ἐπίκαιρα καὶ δι' αὐτὸ εὐκολώτερα καὶ ἀσφαλέστερα ἡ συγχώνευσις τῆς εἰκόνος τοῦ ψηφίου μὲ τὴν παράστασιν τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ἔπειτα δὲ διότι ἔτσι εἰσάγονται οἱ μαθηταὶ ὀλίγον κατ' ὀλίγον εἰς τὰ ψηφία καὶ δίδεται καιρὸς διὰ τὴν στερεὰν ἐντύπωσιν τοῦ καθενός, τέλος δὲ διότι μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἠμπορεῖ νὰ ἀρχίσῃ ἐνωρίτατα ἡ γραπτὴ ἐπασχόλησις τῶν μαθητῶν μὲ τὰ ἀπὸ μνήμης ἀριθμούμενα. Ὁ προβαλλόμενος τώρα λόγος τῆς δυσκολίας τῆς γραφῆς τῶν ψηφίων 2 καὶ 3 δὲν πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς σπουδαῖος, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψει, πρῶτον μὲν ὅτι οἱ μαθηταὶ θὰ ἔχουν πλέον ἀσκηθῇ εἰς τὴν γραφὴν μερικῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ὅταν θὰ διδάσκωνται τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμητικῶν ψηφίων, ἡ ὁποία δι' αὐτὸ δὲν θὰ τοὺς παρουσιάσῃ ἰδιαιτέρας δυσκολίας, ἔπειτα δὲ ὅτι τὰ ἀριθμητικὰ ψηφία θὰ παρουσιάζωνται μὲ ὅσον τὸ δυνατὸν ἁπλουστέρας μορφάς. Σκόπιμον δὲ εἶναι, διὰ νὰ διευκολύνωνται οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν γραφὴν τῶν πρώτων ψηφίων (π.χ. τῶν πέντε πρώτων), νὰ προκαλοῦνται νὰ τὰ γράφουν μὲ ρυθμόν· ἂν πρόκειται π.χ. νὰ γράψουν τὸ ψηφίον 2, μὲ τὸ ἕνα γράφουν τὴν καμπύλην του γραμμήν, μὲ τὸ δύο τὴν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν κ.τ.λ. (ἴδ. καὶ *Räther*, ὅπ. ἀν., σελ. 65 κ. ἀκ.).

Σχετικὰ τώρα μὲ τὴν γραφὴν τῶν σημείων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων σκόπιμον εἶναι, διὰ νὰ μὴ ἀπαιτοῦμεν ἀπὸ τοὺς μικροὺς μαθητὰς εὐθὺς ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τὴν χρῆσιν τῶν σημείων ὅλων τῶν ἀριθμ. πράξεων, κατὰ μὲν τὴν διδασκαλίαν τῶν 5 πρώτων ἀριθμῶν ἢ ἀκριβέστερα τῶν ἀριθμητικῶν σειρῶν 1 2, 1—3, 1—4 καὶ 1—5 (, κατὰ τὴν ὁποίαν φυσικὰ θὰ γίνεται καὶ ἡ διδασκαλία τοῦ Ο καὶ τοῦ =,) νὰ διδάσκωμεν μόνον τὴν ἔγγραφον πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν καὶ εἰς προσθετέους ἀνάλυσιν, κατὰ δὲ τὴν διδασκαλίαν τοῦ ἀριθμοῦ 6, ἤτοι τῆς σειρᾶς 1—6, νὰ ἀρχίζωμεν καὶ τὴν διδασκαλίαν τοῦ ἐγγράφου πολλαπλασιασμοῦ, ἀπὸ δὲ τὴν διδασκαλίαν τοῦ ἀριθμοῦ 8, ἤτοι τῆς σειρᾶς 1 - 8, νὰ ἀρχίζωμεν καὶ τὴν διδασκαλίαν τῆς ἐγγράφου διαιρέσεως (ἴδ. κ. *Räther*, ὅπ. ἀν.).

Ὅ,τι ἀκόμη πρέπει νὰ προστεθῇ σχετικὸν μὲ τὴν γραφὴν τῶν πρώτων θεμελιωδῶν ἀριθμῶν (τῶν 1—4 ἢ 1—5) καὶ ἐν γένει μὲ τὴν ἔγγραφον ἐπασχόλησιν τῶν μαθητῶν κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, εἶναι τὸ ἑξῆς. Ἐπειδή, καθὼς εἴδαμεν καὶ προηγουμένως, οἱ μὲν ἀριθμοὶ φανερώνουν πληθύν, τὰ δὲ ψηφία παρουσιάζουν ἑνότητα, σκόπιμον εἶναι, διὰ νὰ μὴ γίνεται ἀπότομα ἡ μετάβασις ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὰ ψηφία, εἰς τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς πρώτους αὐτοὺς ἀριθμούς, πρὶν δοθῇ εἰς τοὺς μαθητὰς τὸ ψηφίον του, νὰ δίδεται ἄλλη εἰκών του καταλληλότερη, ἤτοι παριστάνουσα καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων, τὸ ὁποῖον φανερώνει ὁ ἀριθμός, καὶ ὁμοιάζουσα κάπως καὶ μὲ τὰ μέσα τῆς ἐποπτείας, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων ἔχει σχηματισθῆ ὁ ἀριθμός, μόνον δὲ μετὰ τοῦτο νὰ δίδεται τὸ πραγματικὸν ψηφίον. Τέτοιαι εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἠμποροῦν νὰ σχηματισθοῦν ἀπὸ στιγμὰς ἢ κουλουράκια, τὰ ὁποῖα καὶ τὰ δύο ὁμοιάζουν μὲ τὰς σφαίρας τοῦ Ῥωσσικοῦ ἀριθμητηρίου, ἀπὸ μικρὰς καθέτους γραμμάς, αἱ ὁποῖαι ὁμοιάζουν μὲ τὰ ξυλάρια καὶ τὰ δάκτυλα, ἀπὸ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ὁμοιάζουν μὲ τοὺς κύβους τοῦ Tillich, κ.τ.λ. Σκόπιμον δὲ ἐπίσης εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτὰ τῶν εἰκόνων νὰ διατάσσωνται κατὰ πρῶτον μὲν λόγον εἰς μίαν σειρὰν (π.χ. • • ἢ ○ ○ ἢ | | ἢ □ □ = 2), διότι ἔτσι διαταγμένους ἀντιλαμβάνονται οἱ μαθηταὶ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ μὲ τὸ ἐσωτερικόν των ὄμμα, ἔπειτα δὲ καὶ εἰς δύο σειράς, (π.χ. $\begin{matrix}\bullet\\\bullet\end{matrix}$ ἢ $\begin{matrix}\circ\\\circ\end{matrix}$ ἢ $\begin{matrix}|\\|\end{matrix}$ ἢ $\begin{matrix}\square\\\square\end{matrix}$ = 2), διότι καὶ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν δὲν ἀπομακρύνονται πολὺ ἀπὸ τὴν εἰς μίαν σειρὰν διάταξιν. Ἠμποροῦν δὲ οἱ μαθηταὶ μὲ τὰς εἰκόνας αὐτὰς νὰ παριστάνουν καὶ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις τὰς γινομένας ἐπάνω εἰς τοὺς σχετικοὺς ἀριθμούς· ἔτσι π.χ. ἡ πρόσθεσις 2+2=4 ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ μὲ τὰς εἰκόνας ὡς ἑξῆς: $\begin{matrix}| & |\\| & |\end{matrix}$ ἢ $\begin{matrix}\circ & \circ\\\circ & \circ\end{matrix}$ κ.τ.λ.]

Ἂν τώρα ***ἡ ἔγγραφος ἐπασχόλησις*** τῶν μαθητῶν μὲ τὰ ἀπὸ μνήμης ἀριθμούμενα πρέπῃ, δι' ὅσους λόγους εἴδαμεν προηγουμένως, νὰ ἀσκῆται εἰς τὰς δύο κατωτέρας τάξεις τοῦ δημοτ. σχολείου, εἰς τὰς ὁποίας διδάσκονται οἱ ἀριθμοὶ 1—100, δὲν πρέπει νὰ παύσῃ νὰ καλλιεργῆται καὶ μετὰ τὴν ἔναρξιν τῆς καθαυτὸ γραπτῆς ἀριθμήσεως, πρέπει μὲ ἄλλους λόγους νὰ καλλιεργῆται καὶ νὰ συνοδεύῃ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν καὶ εἰς τὰς ὑπολοίπους τάξεις τοῦ δημοτικοῦ σχολείου, εἰς τὰς ὁποίας θὰ διδάσκωνται πλέον ἐκ παραλλήλου ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ καθαυτὸ γραπτὴ ἀρίθμησις. Οἱ δὲ λόγοι τοῦ πράγματος αὐτοῦ εἶναι οἱ ἀκόλουθοι. Ἐν πρώτοις κατ' αὐτὴν τὴν διδασκαλίαν τῆς ἀπὸ μνήμης ἐκτελέσεως τῶν διαφόρων πράξεων θὰ παρουσιάζωνται καὶ προβλήματα μὲ πολλοὺς ἢ μεγάλους καὶ δυσκόλους ἀριθμούς, τὰ ὁποῖα θὰ πρέπει νὰ ἀναλυθοῦν εἰς πολλὰ μερικώτερα προβλήματα. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ βοηθῆται ἡ μνήμη ἀπὸ τὴν γραφήν. Θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ καταγράφουν οἱ μαθηταὶ εἰς τὸν πίνακα ἢ εἰς τὰ τετράδιά των τοὺς ἀριθμοὺς τῶν προβλημάτων, συχνὰ δὲ καὶ τὰ μερικὰ ἐξαγόμενά των, διότι μόνον ἔτσι δὲν θὰ ἔχουν ἀνάγκην νὰ καταβάλλουν προσπαθείας, ὅπως συγκρατοῦν ὅλους αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὴν μνήμην των, θὰ ἠμποροῦν δὲ νὰ στρέφουν ἀμέριστην τὴν προσοχήν των εἰς τὴν λύσιν τοῦ σχετικοῦ προβλήματος. [Ἔπειτα θὰ παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη πρὸς στερέωσιν τοῦ ἔργου τῆς διδασκαλίας νὰ ἀσκοῦνται οἱ μαθηταὶ καὶ μόνοι των εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν καὶ νὰ ἀναθέτωνται εἰς αὐτοὺς σχετικαὶ ἐργασίαι πρὸς αὐτοτελῆ κατ' οἶκον ἐκτέλεσιν, αἱ ὁποῖαι θὰ πρέπῃ νὰ ἐξελέγχωνται κατόπιν ἀπὸ τὸν διδάσκαλον. Φυσικὰ αἱ ἐργασίαι αὐταὶ δὲν θὰ ἠμποροῦν νὰ γίνουν κατ' ἄλλον τρόπον παρὰ μόνον γραπτῶς. Οἱ μαθηταὶ θὰ πρέπῃ νὰ καταγράφουν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν προβλημάτων καὶ τὰ ἀπὸ μνήμης εὑρισκόμενα ἐξαγόμενά των, συχνὰ δὲ μάλιστα καὶ τὰ μερικά]. Ἰδιαιτέρως δὲ εἶναι ἀπαραίτητη ἡ ἔγγραφος ἐπασχόλησις τῶν μαθητῶν εἰς τὰ ὀλιγοτάξια δημοτ. σχολεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα μόνον μὲ αὐτὴν θὰ ἠμποροῦν νὰ καταγίνωνται εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν οἱ μαθηταὶ τῶν τάξεων ἐκείνων, ὅσαι δὲν θὰ διδάσκωνται ἀπὸ τὸν διδάσκαλον. [Τέλος ἡ ἔγγραφος ἐπασχόλησις εἶναι τὸ καλύτερον μέσον, ἀπὸ ὅσα ἠμπορεῖ νὰ διαθέσῃ ὁ διδάσκαλος, ὅταν θέλῃ νὰ ***δοκιμάσῃ*** τὰς δυνάμεις ὅλων τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν.

Ἐρχόμενοι τώρα ἰδιαιτέρως εἰς ***τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 1—1000***, μὲ τὴν διδασκαλίαν τῆς ὁποίας θὰ ἀρχίζῃ, καθὼς εἴπαμεν προηγουμένως, καὶ ἡ διδασκαλία τῆς καθαυτὸ ἐγγράφου ἀριθμήσεως, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν θὰ διδάσκωνται μὲν ἐκ παραλλήλου καὶ ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ καθαυτὸ ἔγγραφος ἀρίθμησις, σύμφωνα ὅμως μὲ τὰ τονισθέντα εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ παρόντος κεφαλαίου θὰ προτάσσεται μὲν ἡ ἀπὸ μνήμης ἀπὸ τὴν γραπτήν, θὰ καλλιεργῆται δὲ ἡ πρώτη περισσότερον ἀπὸ τὴν δεύτερην τόσον μᾶλλον, καθόσον οἱ ἀριθμοὶ τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶναι ἀκόμη σχετικῶς μικροὶ καὶ εὐμνημόνευτοι. Σημειωτέον τώρα, ὅτι, ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις θὰ προτάσσεται ἀπὸ τὴν γραπτήν, δὲν ἐννοοῦμεν βέβαια, ὅτι, διὰ νὰ ἀρχίσῃ ἡ διδασκαλία τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως ἐπάνω εἰς μίαν νέαν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν, πρέπει νὰ ἔχῃ ἐντελῶς περατωθῆ ἡ διδασκαλία τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως εἰς τὴν πρᾶξιν αὐτήν, ἀλλὰ ὅτι πάντως πρέπει νὰ ἔχῃ προηγηθῆ ἡ διδασκαλία της εἰς τὴν προκειμένην πρᾶξιν καὶ νὰ ἔχῃ διανύσει τοὺς εὐκολωτέρους της σταθμούς, διὰ νὰ ἠμπορέσῃ νὰ ἀρχίσῃ καὶ ἡ διδασκαλία τῆς γραπτῆς, μετὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ὁποίας θὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ διδάσκεται ἐκ παραλλήλου καὶ ἡ ἀπὸ μνήμης, διὰ νὰ διανύσῃ πλέον καὶ τοὺς ὑπολοίπους καὶ δυσκολωτέρους της σταθμούς, ἤτοι διὰ νὰ ἀσχοληθῇ μὲ τὰς δυσκολωτέρας περιπτώσεις τῆς δικαιοδοσίας της (ἴδ. καὶ *Räther*, ὅπ. ἀν., μέρ. 2. σ. 12). Σημειωτέον δὲ ἐπίσης, ὅτι μερικοὶ Μεθοδικοὶ θέλοντες νὰ διευκολύνουν τὴν μετάβασιν τῶν μαθητῶν ἀπὸ τὴν ἀπὸ μνήμης εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν διδάσκουν τὴν γραπτὴν πρόσθεσιν μὲ τὸν ἑξῆς τρόπον:

$$\begin{array}{r} 142 \\ 354 \\ 263 \\ 179 \\ \hline 18 \\ 220 \\ 700 \\ \hline 938 \end{array}$$

Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἀρχίζει μὲν ἡ πρόσθεσις ἀπὸ τὰς μονάδας, γράφεται ὅμως ὁλόκληρον τὸ ἄθροισμά των (δεκάδες καὶ μονάδες). Τὸ ἴδιον γίνεται καὶ μὲ τὴν πρόσθεσιν τῶν δεκάδων. τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα γράφεται κάτω ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων, καὶ μὲ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἑκατ. κ.τ.λ. Εἰς τὸ τέλος ἀθροίζονται τὰ 3 μερικὰ ἀθροίσματα. Ἀλλ' ὅπως πολὺ ὀρθὰ παρατηρεῖ ὁ Räther, ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς μεταβάσεως ἀπὸ τὸ ἕνα εἶδος τῆς ἀριθμήσεως εἰς τὸ ἄλλο, μολονότι εἶναι ὀρθός, εἶναι περιττός, διότι ἡ ἀπ' εὐθείας μετάβασις δὲν παρουσιάζει καμίαν δυσκολίαν εἰς τοὺς μαθητάς.

Σχετικὰ τώρα μὲ ***τὴν σειρὰν 1—τῶν ἑκατομμυρ.*** ἔχομεν

νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι καὶ εἰς αὐτὴν θὰ προτάσσεται μὲ τὴν ἴδιαν ἔννοιαν ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις ἀπὸ τὴν γραπτήν, ὅτι ὅμως, ἐπειδὴ οἱ περισσότεροι ἀριθμοὶ τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶναι δυσμνημόνευτοι, κατ' ἀνάγκην θὰ καλλιεργῆται εἰς αὐτὴν ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις κάπως περισσότερον ἀπὸ τὴν προφορικήν, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ περιορίζεται εἰς τοὺς στρογγυλοὺς καὶ εὐμνημονεύτους ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς (ἴδ. καὶ *Räther*, ὅπ. ἀν).

Διὰ ***τοὺς συμμιγεῖς ἀκεραίους*** ἰσχύει, ὅ,τι καὶ διὰ τοὺς ἁπλοῦς. Διότι τὰ δύο εἴδη τῆς ἀριθμήσεως παρουσιάζουν καὶ εἰς αὐτοὺς τὰς ἴδιας διαφοράς, τὰς ὁποίας παρουσιάζουν εἰς τοὺς ἁπλοῦς ἀκεραίους. Ἐκτὸς δὲ τῶν διαφορῶν αὐτῶν παρουσιάζουν καὶ τὰς ἑξῆς ἀκόμη, ὀφειλομένας εἰς τὴν ἰδιάζουσαν φύσιν τῶν συμμιγῶν, ὅτι δηλ., ἐνῷ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως, τῆς ἀφαιρέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ ἀρχὴ τῆς ἀριθμήσεως γίνεται ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, εἰς τὴν γραπτὴν γίνεται ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς κατωτέρας καὶ ὅτι οἱ συμμιγεῖς τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως ἠμποροῦν νὰ ἀριθμοῦνται γραπτῶς καὶ ὡς δεκαδικὰ κλάσματα. Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τὰ ἀνωτέρω καὶ εἰς τοὺς συμμιγεῖς ἀκεραίους ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις θὰ προτάσσεται ἀπὸ τὴν γραπτὴν καὶ θὰ καλλιεργῆται περισσότερον ἀπὸ αὐτὴν τόσον μᾶλλον, καθόσον εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν συμμιγῶν παρουσιάζονται συνήθως ἀριθμοὶ μικροὶ καὶ ἀναφερόμενοι εἰς μονάδας ὀλίγων μόνον τάξεων.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς ***τὰ κοινὰ κλάσματα*** παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς αὐτὰ δὲν ὑπάρχει καμία ***οὐσιώδης*** διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως. Εἰς τὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὰς πράξεις των (πρβ. προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις ὁμωνύμων κλασμάτων, πολλαπλασιασμοὺς καὶ διαιρέσεις μὲ ἀκέραιον κ.τ.λ.) ἐργάζονται καὶ αἱ δύο μὲ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς ὀλίγας πράξεις, εἰς τὰς ὁποίας παρουσιάζεται κάποια διαφορὰ αναμεταξύ των, ἡ διαφορὰ αὐτὴ δὲν εἶναι οὐσιώδης (ἴδ. καὶ *Räther*, ὅπ. ἀν., μέρ. 3, σελ. 52 κ. ἀκ.). Δι' αὐτὸ θὰ ἠμποροῦσε κανεὶς ἐκ πρώτης ὄψεως νὰ παραδεχθῇ, ὅτι θὰ ἔπρεπε καὶ εἰς τὴν κλασματ. ἀρίθμησιν νὰ προτάσσεται ἡ ἀπὸ μνήμης ἀπὸ τὴν γραπτὴν καὶ νὰ καλλιεργῆται περισσότερον ἀπὸ αὐτήν. Προσεκτικὴ ἐν τούτοις ἐξέτασις τῆς φύσεως τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως πείθει, ὅτι δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ αὐτό. Αἱ περισσότεραι ἀπὸ τὰς πράξεις τῆς ἀριθμήσεως αὐτῆς δὲν εἶναι ἁπλαῖ, ἀλλὰ παρουσιάζονται συνδυασμέναι μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας ἄλλας πράξεις. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ προβλήματά των εἶναι κατὰ μέγιστον μέρος σύνθετα, ὡς σύνθετα δὲ δημιουργοῦν κατὰ τὴν λύσιν των ποσὸν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι, ἂν εἶναι ἀρκετοὶ καὶ εἰς αὐτὰ τὰ ἁπλούστερα, ἀποβαίνουν ὑπεραρκετοὶ καὶ δυσμνημόνευτοι εἰς τὰ συνθετώτερα. Ἀκριβῶς ὅμως διότι τὰ προβλήματα τῶν περισσοτέρων πράξεων τῆς κλασματ. ἀριθμήσεως εἶναι σύνθετα, ἡ λύσις των ἀποκλείει κάθε μηχανικὴν ἐνέργειαν καὶ ἀπαιτεῖ τὴν διαρκῆ καὶ σύντονην ἐργασίαν τῆς σκέψεως τοῦ ἀριθμοῦντος. Ἀλλὰ ἡ προσπάθεια πρὸς συγκράτησιν τῶν ἀριθμῶν ἑνὸς προβλήματος καὶ ἡ προσπάθεια πρὸς συγκέντρωσιν τῆς σκέψεως εἰς τὸν τρόπον τῆς λύσεώς του εἶναι, καθὼς ηὑρομεν, δύο ἐργασίαι, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἡ μία ἀποκλείει τὴν ἄλλην. Εἶναι δι' αὐτὸ προφανές, ὅτι, ἐνῷ ὁ ἀπὸ μνήμης ἀριθμῶν θὰ ἐργάζεται μὲ μεγάλην δυσκολίαν εἰς τὴν κλασματικὴν ἀρίθμησιν, διότι ζητοῦνται ἀπὸ αὐτὸν δύο ἐργασίαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἐμποδίζει τὴν ἄλλην, ἀπεναντίας ὁ ἀριθμῶν ἐγγράφως θὰ ἐργάζεται εὔκολα, διότι ἀπαλλάσσεται ὅλως διόλου ἀπὸ τὴν φροντίδα νὰ συγκρατῇ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ κάθε προβλήματος, ἠμπορεῖ δὲ ἔτσι νὰ προσηλώνῃ τὴν σκέψιν του μόνον εἰς τὸν τρόπον τῆς λύσεώς του, προσπαθῶν νὰ εὑρίσκῃ τὴν πρᾶξιν, τὴν ὁποίαν ἑκάστοτε πρέπει νὰ κάμῃ, καὶ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον θὰ τὴν κάμῃ. Ἀπὸ τὸ ὅτι τώρα ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις πλεονεκτεῖ τόσον σημαντικὰ τῆς ἀπὸ μνήμης εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα, ἐνῷ ἐξ ἄλλου δὲν διαφέρει ἀπὸ αὐτὴν κατ' οὐσίαν, ἐξάγονται δύο πορίσματα (ἴδ. *Räther*, ὅπ. ἀν.). Τὸ πρῶτον ἀπὸ αὐτά, εἰς τὸ ὁποῖον συμφωνοῦν ὅλοι οἱ Μεθοδικοί, εἶναι, ὅτι πεδίον τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως εἰς τὰ κ. κλάσματα θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην μόνον τὰ ἁπλούστερα προβλήματα κάθε πράξεως, τὰ ἀπαιτοῦντα δηλ. πρὸς λύσιν των ὀλιγωτέρας σχετικὰς πράξεις καὶ παρουσιάζοντα κλάσματα μὲ μικροτέρους ὅρους. Τὸ δεύτερον καὶ σπουδαιότερον εἶναι τὸ ἑξῆς. Ἐπειδὴ καὶ τὰ ἁπλούστερα προβλήματα τῶν περισσοτέρων πράξεων εἶναι σύνθετα καὶ δι' αὐτὸ πρέπει νὰ ἀφοσιώνεται ἀπερίσπαστη ἀπὸ ἄλλας φροντίδας ἡ σκέψις τῶν μαθητῶν εἰς τὸν τρόπον τῆς λύσεώς των, σκόπιμον εἶναι εἰς τὴν

διδασκαλίαν τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς πράξεις αὐτὰς νὰ ἐφαρμόζεται ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις—καὶ μάλιστα κατ' ἀρχὰς ἐπάνω εἰς εὔκολα καὶ σύντομα προβλήματα—, μόνον δὲ ἀφοῦ συνηθίσῃ ἡ σκέψις τῶν μαθητῶν μὲ τὴν ἀρίθμησιν αὐτὴν εἰς τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως, νὰ καλοῦνται καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν ἐπάνω εἰς αὐτήν, λύοντες, καθὼς εἴδαμεν ἀνωτέρω, σχετικῶς ἁπλᾶ προβλήματά της. Μὲ τὸ δεύτερον τώρα αὐτὸ πόρισμα δὲν συμφωνοῦν ἀρκετοὶ Μεθοδικοί, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς διατάξεως τῆς διδακτέας ὕλης.

Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὴν ἔκτασιν τῆς διδασκαλίας καὶ τὴν θέσιν τῶν δύο εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως ***εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα***, κρατεῖ διχογνωμία μεταξὺ τῶν Μεθοδικῶν. Ἀρκετοὶ ἀπὸ αὐτούς, μεταξὺ τῶν ὁποίων οἱ *Rein*, *Pickel* κ. τ. λ. (εἰς τὸ 5 Schuljahr τοῦ ἔργου των Theorie und Praxis κ.τ.λ.), ὁ *Büttner* (ὅπ. ἀν., σελ. 193 κ. ἀκ.), ὁ *Hartmann* (ὅπ. ἀν. σελ. 447 κ. ἀκ.), εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι καὶ εἰς τὰ κλάσματα αὐτὰ πρέπει νὰ δίδεται ἀρκετὴ θέσις εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, δι' αὐτὸ δὲ καὶ εἰς κάθε πρᾶξίν των προτάσσουν τῆς γραπτῆς ἐκτελέσεώς της σειρὰν ὁλόκληρον ἀσκήσεων τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως. Ἄλλοι πάλιν Μεθοδικοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ *Räther* (ὅπ. ἀν., μέρ. 3, σελ. 54), εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι εἰς τὰ δεκαδ. κλάσματα ἐνδεικνύεται ἐντελῶς ἰδιαιτέρως ἡ χρῆσις τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως, ἐλάχιστα δὲ ἡ χρῆσις τῆς ἀπὸ μνήμης. Πρέπει δὲ κατὰ τοὺς Μεθοδικοὺς αὐτοὺς αἱ ὀλίγαι ἀσκήσεις τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ γίνωνται εἰς τὰ κλάσματα αὐτά, νὰ ἀκολουθοῦν τὰς ἀντιστοίχους τῆς γραπτῆς, διότι καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης πρέπει νὰ παριστάνουν οἱ μαθηταὶ τοὺς διδομένους ἀριθμούς, ὡσὰν νὰ ἔχουν γραφῇ· ἀκριβῶς δὲ δι' αὐτὸ σκόπιμον εἶναι εἰς τὰς ἀσκήσεις αὐτὰς νὰ καθοδηγοῦνται πάντοτε ἀπὸ τὸν διδάσκαλον οἱ μαθηταί, ὅπως παριστάνουν τὰ ἀπαγγελλόμενα κλάσματα ὡς δεκαδικά. Νομίζομεν, ὅτι ἡ δεύτερη ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω γνώμας εἶναι ἡ ὀρθότερη, ἀφοῦ ἡ ἀρίθμησις τῶν δεκαδ. κλασμάτων βασίζεται εἰς τὴν ἀξίαν, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ κάθε ψηφίον των ὡς ἐκ τῆς θέσεώς του, κάθε δὲ ἀπόπειρα ἐφαρμογῆς τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως εἰς αὐτὰ καταλήγει εἰς ἀρίθμησιν μὲ κοινὰ κλάσματα ἢ μὲ συμμιγεῖς. Ἠμποροῦν δὲ κατὰ τὸν *Rä-*

ther (ὅπ. ἀν.) νὰ γίνωνται αἱ ἑξῆς ἀσκήσεις τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα : 1) Ἡ ἀπαγγελία τῶν τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος (π.χ. : Εἰπὲ ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα ! Μηδέν, ὑποδιαστολή, τρία (τρία δέκατα), ἕξι (ἕξι ἑκατοστά). Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ ποῖος ὁ παρονομαστής του ;), 2) ἡ προσθήκη καὶ ἡ ἀφαίρεσις μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος (π.χ. : Πρόσθεσε ἕνα μηδενικὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκαδ. κλ. 0,25 ! Πῶς θὰ τὸ ἀπαγγείλῃς τώρα ; Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ ποῖος ὁ παρονομαστής του ; Ἔγινε τὸ δεκαδ. κλάσμα μεγαλύτερον ἢ μικρότερον; κ.τ.λ.), 3) ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις τοῦ δεκαδ. κλ. μὲ 10, 100 κ.τ.λ. (π.χ. : Πολλαπλασίασε τὸ δεκ. αὐτὸ κλάσμα μὲ 10 ! Πολλαπλασίασε καὶ τὸ γινόμενον μὲ 10 ! Διαίρεσε τὸ νέον αὐτὸ δεκαδ. κλάσμα μὲ 10 ! Τρέψε τὸ πηλίκον εἰς κοινὸν κλάσμα ! κ.λ.π.), 4) ἡ τροπὴ τῶν συνηθεστέρων κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ (π.χ. : Τρέψε τὰ κ. κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$ κ.τ.λ. εἰς δεκαδικά ! Πῶς θὰ γράψωμεν τὰ $\frac{25}{10000}$ ὡς δεκαδ. κλάσμα ; κ.τ.λ.).

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς ***τὰ ἐφηρμοσμένα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον σύνθετα προβλήματα***, τὰ ὁποῖα θὰ διδάσκωνται, καθὼς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος, εἰς τὴν ἀνωτάτην τάξιν τοῦ δημοτ. σχολείου, ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι εἰς ἐκεῖνα ἀπὸ αὐτά, ὅσα λύονται μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ τὰ πλεῖστα, θὰ καλλιεργοῦνται καὶ τὰ δύο εἴδη τῆς ἀριθμήσεως, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἡ μὲν ἀπὸ μνήμης θὰ προηγῆται καὶ θὰ ἐνδιατρίβῃ εἰς τὰ ἁπλούστερα καὶ τὰ ἔχοντα μικροτέρους καὶ εὐκολωτέρους ἀριθμούς, ἡ δὲ γραπτὴ θὰ ἀκολουθῇ καὶ θὰ ἐνδιατρίβῃ εἰς τὰ συνθετώτερα καὶ τὰ ἔχοντα μεγαλυτέρους ἀριθμούς. Περὶ τοῦ εἴδους τώρα τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ καλλιεργῆται εἰς τὰ προβλήματα αὐτά, θὰ πραγματευθῶμεν εἰς τὸ μεθεπόμενον κεφάλαιον.

Ὀλίγα ἀκόμη ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν ὡς πρὸς ***τὸν τρόπον***, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀσκοῦνται τὰ δύο εἴδη τῆς ἀριθμήσεως εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον.

Ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις εἰς τὰς δύο κατωτάτας τάξεις τοῦ δημοτ. σχολείου σκόπιμον εἶναι, ὅπως ὀρθότατα διατυπώνει τὸ

πρᾶγμα ὁ *Räther* (ὅπ. ἀν., μέρ. 1, σ. 94 κ. ἀκ.) πρὸς τὸ συμφέρον τῶν ἀδυνάτων μαθητῶν νὰ διατρέχῃ εἰς κάθε μεθοδικὴν ἑνότητα μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν μαθητῶν εἰς τὴν κατανόησιν τῆς διδασκομένης πράξεως τὰς ἀκολούθους βαθμίδας, ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ μὲν τρεῖς πρῶται ἀνήκουν εἰς τὴν καθαυτὸ διδασκαλίαν, αἱ δὲ τρεῖς τελευταῖαι εἰς τὸ διδακτικὸν στάδιον τῆς ἀσκήσεως, :

1. Βαθμίς, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ μαθηταὶ μετὰ τὴν ἐξαγγελίαν τοῦ προβλήματος ἀπὸ τὸν διδάσκαλον θὰ λύουν αὐτὸ ἀπὸ μνήμης ἀργὰ καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μέσων τῆς ἐποπτείας.

2. Βαθμίς, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ μαθηταὶ μετὰ τὴν ἐξαγγελίαν τοῦ προβλήματος θὰ λύουν αὐτὸ ἀπὸ μνήμης ἀργὰ καὶ ἐπὶ τῇ βάσει ὄχι ἐποπτικοῦ μέσου, ἀλλὰ τῶν ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος, τοὺς ὁποίους θὰ γράφῃ ὁ διδάσκαλος εἰς τὸν πίνακα κατὰ τὴν ἐξαγγελίαν του.

3. Βαθμίς, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ μαθηταὶ μετὰ τὴν ἐξαγγελίαν τοῦ προβλήματος ἀπὸ τὸν διδάσκαλον θὰ λύουν αὐτὸ ἀργὰ ἀπὸ μνήμης.

4. Βαθμίς, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ λύουν οἱ μαθηταὶ ἀπὸ μνήμης τὸ ἐξαγγελθὲν πρόβλημα γρήγορα.

5. Βαθμίς, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ μαθηταὶ θὰ λύουν ἀπὸ μνήμης τὸ ἐξαγγελθὲν πρόβλημα ἁμιλλώμενοι ἀναμεταξύ των εἰς τὴν ταχύτητα τῆς λύσεως.

6. Βαθμίς, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ σχηματίζουν οἱ ἴδιοι οἱ μαθηταὶ τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα θὰ πρόκειται νὰ λύσουν ἀπὸ μνήμης.

Εἰς τὰς τρεῖς πρώτας βαθμίδας δὲν θὰ σπεύδῃ ὁ διδάσκαλος νὰ καλῇ τοὺς μαθητὰς εἰς ἀπόκρισιν, ἀλλὰ θὰ περιμένῃ μὲ ὑπομονήν, ἕως ὅτου πεισθῇ, ὅτι ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀποκριθοῦν. Εἰς τὴν ταχεῖαν ἀρίθμησιν θὰ καλῇ τοὺς μαθητὰς νὰ ἀποκριθοῦν, ἐφόσον οἱ ἡμίσεις τοὐλάχιστον ὑψώνουν τὸ δάκτυλόν των. Ἀπεναντίας εἰς τὴν ἁμιλλητικὴν ἀρίθμησιν, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ δίδωνται κάπως δυσκολώτερα προβλήματα, ἀκριβῶς διὰ νὰ φανῇ, ποῖοι πράγματι εἶναι οἱ ταχύτεροι εἰς τὴν ἀρίθμησιν, θὰ καλῇ ὁ διδάσκαλος τὸν πρῶτον ὑψώσαντα τὸ δάκτυλον (ἴδ. καὶ *Räther*, ὅπ. ἀν.).

Εἰς τὰς ἀνωτέρας τάξεις ἡ σειρὰ τῶν διαδοχικῶν βαθμίδων τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως θὰ εἶναι ἡ ἴδια μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι ἡ πρώτη βαθμὶς συνηθέστατα θὰ εἶναι περιττή, ἡ δὲ δευτέρη θὰ χρησιμοποιῆται σπανιώτερα καὶ κυρίως χάριν τῶν μαθητῶν τοῦ ὀπτικοῦ τύπου. Ἡ κανονικὴ χρησιμοποίησις τῆς βαθμίδος αὐτῆς θὰ ἐσυντελοῦσε, ὅπως εἶναι εὐνόητον, εἰς τὸ νὰ γίνουν οἱ μαθηταὶ ἀνίκανοι διὰ τὴν καθαρὰν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν. Ἐφόσον τώρα διανύεται ἡ βαθμὶς αὐτή, θὰ ἠμπορῇ φυσικὰ νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως πινάκων, περιεχόντων καταλλήλα διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν προβλήματα (ἴδ. ἀν., σ. 137 κ. ἀκ.). Ἐπίσης δὲ θὰ ἠμπορῇ νὰ ἀντικατασταθῇ καὶ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ βιβλίου τῆς συλλογῆς προβλημάτων· ἀντὶ νὰ λέγῃ ὁ διδάσκαλος τὸ πρόβλημα καὶ νὰ γράφῃ τοὺς ἀριθμούς του εἰς τὸν πίνακα ἢ νὰ τοὺς γράφουν οἱ μαθηταὶ εἴτε εἰς τὸν πίνακα εἴτε εἰς τὰ τετράδιά των, θὰ εἶναι δυνατὸν ἕνας μὲν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς νὰ τὸ ἀναγινώσκῃ μεγαλοφώνως ἀπὸ τὴν συλλογήν, οἱ δὲ ἄλλοι νὰ τὸ ἀναγινώσκουν μαζὶ σιγανά, νὰ κρατοῦν δὲ οἱ μαθηταὶ τὸ βιβλίον τῆς συλλογῆς καὶ νὰ ἠμποροῦν νὰ βλέπουν εἰς αὐτό, ἐφόσον λύουν ἀπὸ μνήμης τὸ πρόβλημα. Σημειωτέον ἐν τούτοις, ὅτι, καὶ ἐφόσον δὲν χρησιμοποιεῖται ἡ βαθμὶς αὐτὴ καὶ ἀρχίζει ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις μὲ τὴν τρίτην βαθμίδα, θὰ εἶναι, καθὼς εἴδαμεν καὶ εἰς τὰ προηγούμενα, ἀναγκαῖον, ἂν οἱ ἀριθμοὶ τοῦ διδομένου προβλήματος εἶναι πολλοὶ ἢ μεγάλοι, θὰ πρέπῃ δὲ νὰ ἀναλυθῇ εἰς πολλὰ μερικώτερα προβλήματα, νὰ γράφωνται οἱ ἀριθμοί του καὶ τὰ μερικὰ ἐξαγόμενά του].

Σχετικὰ τώρα μὲ τὴν ἐξαγγελίαν τῶν προβλημάτων ἀπὸ τὸν διδάσκαλον εἶναι προφανές, ὅτι δὲν πρέπει νὰ γίνεται γρήγορα καὶ μονότονα καὶ μάλιστα πάντοτε ἀπὸ μίαν μόνον φοράν, διότι ἔτσι οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς μαθητὰς δὲν θὰ ἀντιλαμβάνωνται ὀρθὰ τὰ προβλήματα ἢ δὲν θὰ τὰ ἐντυπώνουν εἰς τὴν μνήμην των. Ὁ *W. Feil* ἔκαμε λεπτομερεῖς ἐρεύνας ἐπάνω εἰς 52 μαθητὰς τοῦ 4 σχολικοῦ ἔτους, διὰ νὰ ἐξακριβώσῃ, τί πρέπει νὰ γίνεται, διὰ νὰ ἐντυπώνωνται τὰ προβλήματα καλὰ καὶ στερεὰ εἰς τὴν μνήμην. Τὰ πορίσματα τῶν ἐρευνῶν του ἐδημοσίευσε εἰς τὸ περιοδικὸν «Würtembergisches Schulwochenblatt» (1905, ἀριθμ. 48). Τὰ καλύτερα ἀποτελέσματα ἐπαρουσιάζοντο, ὅταν τὸ πρόβλημα ἐλέγετο μίαν φορὰν ἀπὸ τὸν διδάσκαλον καὶ ἐγράφοντο οἱ ἀριθμοί του εἰς τὸν πίνακα. Μετὰ τὸν τρόπον αὐτόν, τοῦ ὁποίου, καθὼς εἴπαμεν, δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ γίνεται κανονικὴ χρῆσις, τὰ σχετικῶς καλύτερα ἀποτελέσματα ἐπαρουσίαζε ἐκεῖνος, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ πρόβλημα ἐλέγετο δύο φορὰς ἀπὸ τὸν διδάσκαλον. Τὰ δυσμενέστερα ἀποτελέσματα ἐπαρατηροῦντο, ὅταν τὸ πρόβλημα ἐλέγετο μίαν μόνον φοράν, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ἠμποροῦσε νὰ ἐντυπωθῇ στερεὰ εἰς τὴν μνήμην τῶν μαθητῶν. Ὅμοια ἀποτελέσματα εἶχε καὶ ἡ ἐν χορῷ ἐπανάληψις τοῦ προβλήματος ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Κατὰ τὴν ἐπανάληψιν τοῦ προβλήματος ἀπὸ 2 μαζὶ μαθητὰς τὰ ἀποτελέσματα ἦσαν κατώτερα παρὰ κατὰ τὴν ἐπανάληψιν ἀπὸ 1 μόνον μαθητήν. Σύμφωνα μὲ τὴν ἰδικήν μας πεῖραν εἶναι ἀρκετὸν νὰ λέγῃ ὁ διδάσκαλος τὰ εὔληπτα προβλήματα μίαν μόνον φορὰν δυνατά, ἀργὰ καὶ καθαρά, ἀπεναντίας δὲ εἶναι σκόπιμον τὰ σύνθετα καὶ δύσκολα προβλήματα νὰ ἐπαναλαμβάνωνται μίαν ἀκόμη φορὰν ἀπὸ ἕνα ἀπὸ τοὺς [συνήθεις] μαθητάς. [Προφανὲς δὲ εἶναι, ὅτι, ἐφόσον ὁ διδάσκαλος ζητεῖ ἀπὸ τοὺς μαθητὰς νὰ συγκρατοῦν τὰ προβλήματα εἰς τὴν μνήμην των καὶ νὰ τὰ λύουν ἀπὸ μνήμης χωρὶς κανὲν βοήθημα, ὀφείλει καὶ αὐτὸς νὰ τὰ ἐξαγγέλλῃ καὶ νὰ τὰ λύῃ μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, χωρὶς νὰ κάμνῃ χρῆσιν ὁποιουδήποτε βοηθήματος. Εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν θὰ ἐλαττωθῇ, ὅπως εἶναι εὐνόητον, σημαντικώτατα ὁ ζῆλος τῶν μαθητῶν πρὸς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν. Εἶναι δὲ ἀφ' ἑαυτοῦ φανερόν, ὅτι, ὅσον περισσότερον ἀσκεῖται ὁ διδάσκαλος εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, τόσον δεξιώτερος θὰ ἀποβαίνῃ εἰς αὐτήν, ἔτσι δὲ εἰς τὸ τέλος θὰ ἐργάζεται εἰς αὐτὴν μὲ πλήρη ἀσφάλειαν, ἐφόσον τουλάχιστον πρόκειται διὰ τὰς ἀριθμητικὰς ὕλας, αἱ ὁποῖαι διδάσκονται συνήθως εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον. (Ἴδ. καὶ *Büttner*, ὅπ. ἀν., σελ. 15 κ. ἀκ.)].

Ὅ,τι ἀκόμη ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν εἶναι, ὅτι τόσον κατὰ τὴν ἐξαγγελίαν τῶν προβλημάτων ἀπὸ τὸν διδάσκαλον, ὅσον καὶ κατὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἐργασίαν τῶν μαθητῶν πρέπει νὰ κρατῇ ἄκρα ἡσυχία, νὰ ἀπαγορεύωνται δὲ οἱ προσψιθυρισμοί, ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν εἰς τὰ θρανία μὲ τὰ δάκτυλα καὶ τὰ παρόμοια. Ἐπειδὴ δέ, καθὼς εἴδαμεν ἀνωτέρω (ἴδ. ἀν. σελ. 222 κ. ἀκ.), ἐνδεχόμενον εἶναι νὰ παρουσιασθῇ καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν ἡ ἀνάγκη νὰ σημειώσουν οἱ μαθηταὶ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ μερικὰ ἐξαγόμενα κάποιων προβλημάτων, σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχουν πάντοτε καὶ κατ᾿ αὐτὴν πρόχειρα τὰ πρὸς γραφὴν χρειώδη.

Σημειωτέον ἀκόμη, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἕνα εἶδος τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως, κατὰ τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὑπ᾿ ὄψει καὶ ἡ σχετικὴ ἀξία τῶν ψηφίων τῶν ἀριθμῶν, ὅπως εἰς τὴν ἔγγραφον ἀρίθμησιν. Οἱ μαθηταὶ παριστάνουν εἰς τὸν νοῦν των τὸ πρόβλημα, ὡσὰν νὰ ἔχῃ γραφῇ καὶ τὸ λύουν μὲ τὸν τρόπον τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως. Τὸ εἶδος αὐτὸ τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως ἀπαντᾶται εἰς σχολεῖα, τῶν ὁποίων οἱ μαθηταὶ ἀσκοῦνται ἐλάχιστα εἰς τὴν πραγματικὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν. Ὁ *Diesterweg* εἰς τὸ ἔργον του «*Wegweiser* κ.τ.λ.» παρατηρεῖ, ὅτι τὸ εἶδος αὐτὸ τῆς ἀριθμήσεως «δὲν εἶναι ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις, ἀλλὰ παρῳδία καὶ διαστροφή της, κατάχρησις καὶ αὐτοδέσμευσις». Διάφορον γνώμην ἔχει ὡς πρὸς τὸ πρᾶγμα ὁ *Kallius* (Die vier Spezies in ganzen Zahlen, σ. 46), ὁ ὁποῖος παρατηρεῖ ὡς πρὸς τὴν διαίρεσιν τὰ ἀκόλουθα : «Εἰς πολλὰ βιβλία συλλογῶν συνιστᾶται νὰ ἀναλύεται ὁ διαιρετέος εἰς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι θὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ διαιρέτου (πρβ. 621 : 9 = 540 : 9 + 81 : 9). Ὁμολογῶ εἰλικρινῶς, ὅτι δὲν θεωρῶ πολὺ πρακτικὴν τὴν ἀνάλυσιν αὐτήν, διότι καὶ χρόνον πολὺν ἀπαιτεῖ καὶ εἰς τοὺς μαθητὰς ἐπιβάλλει τὴν συγκράτησιν πολλῶν ἀριθμῶν. Ἐὰν ὁ μαθητὴς ἔχῃ ἀποκτήσει κάποιαν δεξιότητα εἰς τὴν ἔγγραφον διαίρεσιν, τὴν ὁποίαν ἄλλωστε καὶ πρέπει νὰ ἔχῃ ἀποκτήσει, πρὶν ἀρχίσῃ νὰ κάμνῃ ἀπὸ μνήμης διαιρέσεις μὲ μεγάλους ἀριθμούς, τοὺς διαιρεῖ μόνος του ἀπὸ μνήμης μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον θὰ τοὺς ἐδιαιροῦσε, ἂν ἔκαμνε γραπτὴν διαίρεσιν, ἤτοι λέγει : 62 : 9=6, ὑπόλοιπον 8, 81 : 9=9, ποτέ του δὲ δὲν σκέπτεται νὰ κάμῃ ἀνάλυσιν τοῦ διαιρετέου. Καλὰ δὲ θὰ κάμῃ καὶ ὁ διδάσκαλος νὰ μὴ τὸν ἐνοχλῇ εἰς τὴν ἐργασίαν του αὐτήν». Σχετικὰ μὲ τὸ ζήτημα αὐτὸ συμμεριζόμεθα ἐν γένει τὴν γνώμην τοῦ Diesterweg, δεχόμεθα δὲ νὰ γίνεται ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις μὲ τὸν τρόπον τῆς γραπτῆς μόνον εἰς προβλήματα τοῦ τύπου : 3333+4444, 999—666 κ. τ. ὅμ.

[Ὡς πρὸς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν,

ὅτι ἡ μὲν εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὴν ἔγγραφον ἐκτέλεσιν κάθε νέας πράξεως πρέπει νὰ γίνεται πάντοτε ἀπὸ τὸν διδάσκαλον κατὰ τὴν ὥραν τῆς καθαυτὸ διδασκαλίας, ἡ δὲ ἄσκησις τῶν μαθητῶν εἰς αὐτὴν σκόπιμον εἶναι νὰ γίνεται εἰς μὲν τὰ πολυτάξια σχολεῖα ***κυρίως*** διὰ σχετικῶν ἐργασιῶν ἐκτελουμένων κατ᾿ οἶκον, εἰς δὲ τὰ ὀλιγοτάξια δι᾿ ὁμοίων ἐργασιῶν ἐκτελουμένων κατὰ τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον οἱ μαθηταὶ δὲν θὰ διδάσκωνται ἀπὸ τὸν διδάσκαλον, διὰ νὰ διαθέτεται ἔτσι ὅσον τὸν δυνατὸν περισσότερος χρόνος τῆς καθαυτὸ διδασκαλίας εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν]. Πρέπει δὲ νὰ συνηθίζουν οἱ μαθηταὶ νὰ γράφουν μόνον τὰ ἀναγκαιοῦντα. [Ἐπίσης δὲ ὀρθὸν εἶναι, ὅπως οἱ μαθηταὶ οἱ μὴ λύσαντες ὀρθὰ εἴτε κατ᾿ οἶκον εἴτε εἰς τὸ σχολεῖον τὰ ανατεθέντα προβλήματα, καλοῦνται εἰς τὴν διδασκαλίαν νὰ λύσουν αὐτὰ ἐκ νέου εἰς τὸν πίνακα, διὰ νὰ ἐννοοῦν τὰ λάθη των καὶ διδάσκωνται τὸν ὀρθὸν τρόπον τῆς λύσεως. Ἀλλὰ καὶ ἄλλοι μαθηταὶ πρέπει νὰ καλοῦνται κατὰ τὴν διδασκαλίαν, ὅπως ἀριθμοῦν ἐγγράφως καὶ διατυπώνουν καὶ προφορικὰ τὰς σχετικὰς σκέψεις των, διὰ νὰ συνηθίσῃ ἔτσι ἡ τάξις εἰς τὴν ὀρθὴν ἐκτέλεσιν τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως. Ἀπὸ καιρὸν δὲ εἰς καιρὸν πρέπει νὰ καλοῦνται καὶ ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως νὰ λύουν συγχρόνως τὰ ἴδια προβλήματα ἐγγράφως, διὰ ***νὰ δοκιμάζεται*** ἔτσι ἡ πρόοδος τοῦ καθενὸς εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν, ἀκριβῶς ὅπως θὰ καλοῦνται, καθὼς εἴδαμεν, εἰς σύγχρονον ἔγγραφον ἐπασχόλησιν, διὰ νὰ δοκιμάζεται ἡ πρόοδός των εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν.

Σημειωτέον ἐν τέλει, ὅτι, ὅπως ὑπάρχει εἶδος τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως ὁμοιάζον μὲ τὴν γραπτήν, ἔτσι ὑπάρχουν καὶ εἴδη τῆς γραπτῆς ὁμοιάζοντα μὲ τὴν ἀπὸ μνήμης. Τοιουτοτρόπως ὁ Tschirsch, ὁ ὁποῖος, καθὼς εἴδαμεν ἀνωτέρω (σελ.217), ἀναβάλλει τὴν διδασκαλίαν τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως εἰς τὴν ἀνωτέραν βαθμίδα τοῦ δ. σχ., τὴν διδάσκει εἰς τὴν μεσαίαν μὲ τὸν τρόπον τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως. Ἔτσι π.χ. διδάσκει τὴν γραπτὴν πρόσθεσιν εἰς τὴν βαθμίδα αὐτὴν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} 125 \\ 236 \\ 342 \\ \hline 600 \\ 90 \\ 13 \\ \hline 703 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34 \\ 43 \\ 62 \\ 56 \\ \hline 195 \end{array}$$

Ὅτι ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως, καὶ ἂν ἀκόμη θεωρηθῇ ὡς σταθμὸς μεταβάσεως ἀπὸ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν εἰς τὴν γραπτήν, εἶναι περιττός, φαίνεται ἀπὸ ὅσα εἴπαμεν ἀνωτέρω (σελ.224), ἐξετάζοντες ἕνα ἄλλον τρόπον τέτοιας μεταβάσεως. Ἐξ ἄλλου δὲν πρέπει νὰ λησμονηθῇ, ὅτι οἱ ἔμποροι προσθέτουν ἐγγράφως, γράφοντες μὲν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον, ἀλλ' ἀριθμοῦντες μὲ τὴν πλήρη ἀξίαν τῶν ἀριθμῶν καὶ δι' αὐτὸ ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως. Ἡ πρόσθεσις π.χ. γίνεται ἀπὸ αὐτοὺς ὡς ἑξῆς: 50, 110, 150, 180, 184, 187, 189, 195. Ὁ ἐμπορικὸς αὐτὸς τρόπος τῆς προσθέσεως ἠμπορεῖ νὰ διδαχθῇ καὶ εἰς τὸ σχολεῖον, ἀλλὰ ὡς τρόπος τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως, ὅταν οἱ μαθηταὶ ἔχουν ἐμπρός των γραμμένους τοὺς προσθετέους].

XII. Η ΔΙΑΔΟΧΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ.

Ὅ,τι ὀνομάζομεν διαδοχικὴν ἀρίθμησιν, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ μία ἰδιαίτερη μορφὴ τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως. Κατὰ τὴν μορφὴν αὐτὴν ἕνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ ἰδιαίτερα προβλήματα καὶ εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἐξαγόμενον τοῦ κάθε προηγουμένου ἰδιαιτέρου προβλήματος ἀποτελεῖ ὅρον τοῦ κάθε ἑπομένου (π. χ. $1+2+3:3\times 2$), οὔτε λέγεται ὅλον μαζὶ ἀπὸ τὸν διδάσκαλον, οὔτε λύεται διαμιᾶς ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Μετὰ τὴν ἐξαγγελίαν κάθε ἰδιαιτέρου προβλήματος (π.χ. $1+2=$;) ὁ διδάσκαλος κάμνει μίαν μικρὰν διακοπήν, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ μαθηταὶ λύουν ἀπὸ μνήμης τὸ ἐξαγγελθὲν πρόβλημα, χωρὶς νὰ λέγουν τὸ ἐξαγόμενον τῆς λύσεως, τὸ ὁποῖον, καθὼς εἴπαμεν, θὰ ἀποτελέσῃ ὅρον τοῦ ἀκολούθου ἰδιαιτέρου προβλήματος, τοῦ ὁποίου τὸν ἄλλον ὅρον θὰ εἴπῃ εὐθὺς κατόπιν ὁ διδάσκαλος, (ἤτοι τοῦ προβλήματος $(3)+3=$;). Ὅ,τι λέγουν οἱ μαθηταί, εἶναι μόνον τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον. Ἡ μετὰ τὴν ἐξαγγελίαν τοῦ κάθε ἰδιαιτέρου προβλήματος γινομένη διακοπὴ ἠμπορεῖ νὰ εἶναι μεγαλύτερη ἢ μικρότερη ἀναλόγως τῆς δυσκολίας του. Οἱ μα-

θηταὶ ἐννοοῦν, ὅτι τὸ ὅλον πρόβλημα ἐτελείωσε, ὅταν ὁ διδάσκαλος προσθέσῃ καὶ τὴν ἐρώτησιν «ἴσον ;» ἢ «κάμνει ;». Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅσοι μαθηταὶ ἔλυσαν ὁλόκληρον τὸ πρόβλημα, ἀνυψώνουν τὸ δάκτυλον. Ὁ διδάσκαλος ἐρωτᾷ ἕνα ἀπὸ αὐτούς, ὁ ὁποῖος καὶ λέγει τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον ηὗρε. Ἂν ἄλλος μαθητὴς ηὗρε διαφορετικὸν ἐξαγόμενον, ὑψώνει τὸ δάκτυλον καὶ τὸ λέγει. Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως εἶναι πολὺ μορφωτικὸς καὶ δι' αὐτὸ πρέπει νὰ καλλιεργῆται εἰς ὅλας τὰς τάξεις τοῦ δημοτ. σχολείου. Οἱ λόγοι δὲ τοῦ πράγματος εἶναι προφανεῖς. Οἱ μαθηταί, διὰ νὰ φθάσουν εἰς ὀρθὸν τελικὸν ἐξαγόμενον, ὀφείλουν νὰ κρατοῦν εἰς ἐξαιρετικὴν ἔντασιν καὶ τὴν προσοχὴν καὶ ἐν γένει τὴν διάνοιάν των, ἐπίσης δὲ νὰ μὴ χάνουν τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος παρέχεται εἰς αὐτούς. Δι' αὐτὸ δὲ καὶ ἡ συχνὴ διαδοχικὴ ἀρίθμησις, ἂν διεξάγεται καλά, ἔχει ἀσφαλῶς ἀγαθὰ ἀποτελέσματα. Εἶναι δὲ προφανές, ὅτι ἰδιαιτέρας ὑπηρεσίας προσφέρει κατὰ τὴν ἐπανάληψιν διδαχθεισῶν ὑλῶν. Μὲ τὴν διαδοχικὴν ἀρίθμησιν ἠμπορεῖ καὶ ὁ ἐπιθεωρητὴς νὰ ἐξακριβώνῃ εἰς ὀλίγον χρόνον τὰς προόδους μιᾶς ὁλοκλήρου τάξεως. Ἄλλωστε ἡ ἀρίθμησις αὐτὴ εἶναι καὶ ἀρεστὴ εἰς τοὺς παῖδας ἕνεκα τῆς ποικιλίας, τὴν ὁποίαν εἰσάγει εἰς τὴν διδασκαλίαν.

Εἰς τὴν διαδοχικὴν ἀρίθμησιν ἠμποροῦμεν νὰ ἐφαρμόζωμεν καὶ τὴν ἀρχὴν τῆς προόδου ἀπὸ τὰ εὐκολώτερα εἰς τὰ δυσκολώτερα, ἐφόσον θέτομεν ὁλονὲν δυσκολώτερα ἰδιαίτερα προβλήματα ἢ ἐλαττώνομεν τὸν χρόνον τῶν διακοπῶν ἢ κάμνομεν καὶ τὰ δύο αὐτά. Ἐν τούτοις δὲν πρέπει ὁ διδάσκαλος νὰ θέτῃ παραπολὺ δύσκολα προβλήματα ἢ νὰ κάμνῃ τὰς διακοπὰς παραπολὺ μικράς, διότι ἔτσι ἐλάχιστοι μόνον μαθηταὶ θὰ κατορθώνουν νὰ φθάνουν εἰς ὀρθὸν τελικὸν ἐξαγόμενον. Τὰ προβλήματα τῆς διαδοχικῆς ἀριθμήσεως δὲν ἔχουν θέσιν εἰς τὰ βιβλία τῶν συλλογῶν, διότι πρέπει νὰ δίδωνται μόνον ἀπὸ τὸν διδάσκαλον καὶ μάλιστα ἀπὸ μνήμης.

Ὁ *Hartmann* (ὅπ. ἀν., σ. 429) συνιστᾷ νὰ γίνωνται καὶ **δοκιμασίαι** τῶν μαθητῶν μὲ τὴν διαδοχικὴν ἀρίθμησιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ τελικὰ ἐξαγόμενα δὲν θὰ λέγωνται ἀπὸ τοὺς μαθητάς, ἀλλὰ θὰ καταγράφωνται εὐσύνοπτα μὲ ἀριθμητικὰ ψηφία. Ἀφοῦ τελειώσουν ὅλα τὰ προβλήματα, δίδουν οἱ μαθηταὶ τὰ τετράδιά των εἰς τὸν διδάσκαλον, ὁ ὁποῖος τὰ ἐξελέγχει εἴτε εἰς τὴν τάξιν εἴτε κατ᾽ οἶκον. Ἠμπορεῖ δὲ ἐπίσης ὁ διδάσκαλος νὰ ἀναθέτῃ καὶ εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν ἀμοιβαίαν ἐξέλεγξιν τῶν ἐξαγομένων των. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγει ὁ διδάσκαλος τὰ τελικὰ ἐξαγόμενα τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου, οἱ δὲ μαθηταὶ σημειώνουν κοντὰ μὲν εἰς κάθε σωστὸν ἐξαγόμενον τὸ γράμμα «σ», κοντὰ δὲ εἰς κάθε λανθασμένον τὸ γράμμα «λ» ἢ καὶ χαρακτηρίζουν μόνον τὰ λανθασμένα. Εἰς τὸ τέλος καταμετροῦνται τὰ σωστὰ ἐξαγόμενα τοῦ κάθε μαθητοῦ. Ἔτσι ἠμπορεῖ νὰ ἐξακριβωθῇ εἰς σχετικὰ ὀλίγον χρόνον ἡ πρόοδος τοῦ κάθε μαθητοῦ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν. Τοῦ εἴδους αὐτοῦ τῆς δοκιμασίας ἠμπορεῖ νὰ γίνεται χρῆσις καὶ κατὰ τὴν καθημερινὴν διδασκαλίαν, ὁσάκις θέλει ὁ διδάσκαλος νὰ ἐξακριβώσῃ τὴν ἐπίδοσιν ὅλων τῶν μαθητῶν του, καὶ κατὰ τὰς διαφόρους ἐξετάσεις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἐὰν ἐξάγεται ἀπὸ κάποιαν δοκιμασίαν, ὅτι μία ἀριθμητικὴ πρᾶξις γίνεται λανθασμένα ἀπὸ ἀρκετοὺς μαθητὰς τῆς τάξεως, πρέπει φυσικὰ ἡ τάξις νὰ ἀσκηθῇ εἰς τὰ ἀμέσως κατόπιν μαθήματα τῆς Ἀριθμητικῆς ἐντελῶς ἰδιαιτέρως εἰς τὴν πρᾶξιν αὐτήν. Τοῦ ἴδιου εἴδους τῆς δοκιμασίας ἠμπορεῖ νὰ κάμνῃ χρῆσιν καὶ ὁ ἐπιθεωρητὴς πρὸς ἐξακρίβωσιν τῆς προόδου τῶν μαθητῶν τῶν ἐπιθεωρουμένων τάξεων.

Προβλήματα διαδοχικῆς ἀριθμήσεως διὰ ***τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος*** εἶναι π.χ. τὰ ἀκόλουθα:

α) $4+3+2+5-8-3=;$

β) $7+8-3:4\times 3=;$

Διὰ δὲ ***τὴν ἀνώτερην βαθμίδα*** εἶναι τὰ ἑξῆς:

α) $\frac{3}{4}\times 2+4\frac{1}{2}\times 18:9\times 33\frac{1}{3}:25=;$

β) 1 στατ. 15 ὀκ. — 56 ὀκ. $\times 6-2$ ὀκ. $:8\times\frac{9}{10}=;$

Ἐκτὸς τοῦ Hartmann ἀσχολοῦνται διεξοδικὰ μὲ τὴν διαδοχικὴν ἀρίθμησιν καὶ οἱ *Klauke* καὶ *Klein* (Anleitung, σελ. 50 κ. ἀκ.).

XIII. Η ΕΓΓΡΑΦΟΣ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ.[1]

[Δὲν ἔχει ἀποκατασταθῆ ἀκόμη ὁμοφωνία μεταξὺ τῶν Μεθοδικῶν ὡς πρὸς τὸ ζήτημα τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ γίνεται ἡ ἔγγραφος ἀρίθμησις εἰς τὰ ποικίλα ἐφηρμοσμένα προβλήματα τὰ ἀνήκοντα εἰς τὴν καλουμένην μέθοδον τῶν τριῶν, ἀκριβέστερα δὲ εἰς ἐκεῖνα ἀπὸ αὐτά, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τρίτος ὅρος δὲν εἶναι οὔτε πολλαπλάσιον, οὔτε ποσοστὸν τοῦ πρώτου. Διότι ὡς πρὸς ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τρίτος ὅρος εἶναι πολλαπλάσιον ἢ ποσοστὸν τοῦ πρώτου, δὲν ἠμπορεῖ νὰ γεννηθῇ ζήτημα, ἀφοῦ λύονται ἢ δι᾽ ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ (π. χ. Τὰ 100 αὐγὰ στοιχίζουν 180 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 300; Ἀπόκρ. 180 δρ. $\times 3$.—12 ἐργάται ἔσκαψαν τὰ θεμέλια ἑνὸς σπιτιοῦ εἰς 6 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὰ ἔσκαπταν 4 ἐργάται; Ἀπόκρ. Εἰς 6 ἡμ. $\times 3$) ἢ δι᾽ ἑνὸς μερισμοῦ (π.χ. Τὰ 100 αὐγὰ στοιχίζουν 180 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 25; Ἀπόκρ. 180 δρ. : 4.—4 ἐργάται ἔσκαψαν κ.τ.λ. εἰς 18 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὰ ἔσκαπταν 12 ἐργάται; Ἀπόκρ. Εἰς 18 : 3), οἱ ὁποῖοι εἰς τὴν ἔγγραφον ἀρίθμησιν ἢ γίνονται καθὼς εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης (π. χ. $180\times 3=100\times 3+80\times 3$) ἢ ἐκτελοῦνται γραπτῶς $\left(\text{π.χ.} \times \frac{180}{3}\right)$. Σχετικὰ τώρα μὲ τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τρίτος ὅρος δὲν εἶναι οὔτε πολλαπλάσιον οὔτε ποσοστὸν τοῦ πρώτου (π. χ. ἕνα κομμάτι πανιοῦ μήκους 24 μ. στοιχίζει 120 δρ. Πόσον στοιχίζουν 7 μόνον μέτρα ἀπὸ αὐτό;), ἡ διαφωνία ὑπάρχει, καθὼς εἴπαμεν, κυρίως ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς ἐγγράφου λύσεώς των, διότι ἀπὸ μνήμης τὰ προβλήματα αὐτὰ λύονται ἢ μὲ τὴν ἀναλυτικὴν ἢ Ἰταλικὴν λεγομένην μέθοδον (ἤτοι: τὰ 24 μ. στοιχίζουν 120 δρ. Τὰ 6 μ. στοιχίζουν 30 δρ. Τὸ 1 μ. στοιχίζει 5 δρ. Ἑπομένως τὰ 7 μ. στοιχίζουν 30 δρ. + 5 δρ. = 35 δρ.) ἢ μὲ τὴν μέ

[1] Καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτὸ ἔχει διασκευασθῆ κυρίως σύμφωνα μὲ τὰ διδασκόμενα ἀπὸ τὸν Räther (ὅπ. ἀν., μέρ. 3, σελ. 141—191).

θοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα καὶ τῆς ἀμέσου εὑρέσεως τῆς τιμῆς της (ἤτοι : τὰ 24 μ. στοιχίζουν 120 δρ. Τὸ 1 μ. στοιχίζει 5 δρ. Ἄρα τὰ 7 μ. στοιχίζουν 35 δρ.). Προκειμένου ὅμως περὶ τῆς ἐγγράφου ἀριθμήσεως εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ ἄλλοι μὲν ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς ἐφαρμόζουν τὴν ἴδιαν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζουν καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης, ἤτοι ἢ τὴν ἀναλυτικὴν ἢ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα μὲ τὴν ἄμεσον εὕρεσιν τῆς τιμῆς της — μὲ τὴν διαφορὰν φυσικά, ὅτι αἱ σχετικαὶ πράξεις, ἤτοι οἱ σχετικοὶ πολλαπλασιασμοὶ καὶ διαιρέσεις, ἐφόσον πρόκειται περὶ ὁπωσδήποτε μεγάλων ἀριθμῶν, δὲν γίνονται ἀπὸ μνήμης, ἀλλὰ ἐγγράφως—, ἄλλοι δὲ ἐφαρμόζουν τὴν μέθοδον τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως τῶν προβλημάτων, ἄλλοι δὲ τέλος προτιμοῦν τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα μὲ κλασματικὴν διάταξιν τῶν σχετικῶν πράξεων, τὴν λεγομένην συντομώτερα μέθοδον τῆς κλασματικῆς διατάξεως. Διὰ νὰ ἀντιληφθῶμεν τώρα, ποία ἐκ τῶν γνωμῶν αὐτῶν εἶναι ἡ ὀρθότερη, ἀπαραίτητον εἶναι νὰ ἠξεύρωμεν τὰ πλεονεκτήματα καὶ τὰ μειονεκτήματα τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω μεθόδους, πρᾶγμα πάλιν, τὸ ὁποῖον θὰ κατορθώσωμεν, ἂν προηγουμένως ἐξετάσωμεν τὴν φύσιν τῆς καθεμιᾶς. Καὶ εἰς τὴν ἐξέτασιν αὐτὴν προβαίνομεν ἀμέσως.

1. ***Ἡ μέθοδος τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως.*** Ἡ μέθοδος αὐτὴ συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ἀπὸ κάθε πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν σχηματίζεται ***μία ἀναλογία,*** ἔτσι δὲ μὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου ὅρου τῆς ἀναλογίας εὑρίσκεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ὅρου τοῦ προβλήματος τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Φανερὸν τώρα εἶναι, ὅτι οἱ μαθηταί, διὰ νὰ ἠμποροῦν νὰ ἐφαρμόζουν τὴν μέθοδον αὐτὴν εἰς τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, πρέπει νὰ κατέχουν, ὅ,τι σχετικὸν μὲ τὴν ἀναλογίαν, ὡρισμένως δὲ πρέπει νὰ γνωρίζουν τὰ ἀκόλουθα :

α) ὅτι ***λόγος*** δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν (π. χ. δύο τεμαχίων τοῦ ἴδιου ὑφάσματος διαφόρου μήκους, π.χ. τοῦ ἑνὸς μήκους 8 μ. καὶ τοῦ ἄλλου 4 μ.) εἶναι ἡ σχέσις, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο, ἐὰν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδιαν μονάδα μετρήσεως (π.χ. τὸ 1 μέτρον) καὶ ὅτι ἡ σχέσις αὐτὴ εἶναι ἡ ἴδια μὲ τὴν σχέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται ὁ ἕνας πρὸς τὸν ἄλλον ***οἱ δύο***

ἀριθμοί, οἱ προκύπτοντες ἀπὸ τὴν μέτρησιν, δηλ. οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 4, καὶ τὴν ὁποίαν παριστάνομεν γραπτῶς ἔτσι : 8 : 4, (ὅπου αἱ δύο στιγμαί : σημαίνουν «πρὸς», «μὲ», δι' αὐτὸ δὲ 8 : 4 = ἡ σχέσις, ὁ λόγος τοῦ 8 ***πρός, μὲ*** τὸν 4),

β) ὅτι ἡ σχέσις, ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν (π.χ. τοῦ 8 μὲ τὸν 4, δηλ. ὁ λόγος 8 : 4) εἶναι ἴσος μὲ ***τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου μὲ τὸν δεύτερον*** (ἤτοι εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν 2, ἄρα 8 : 4 (ὁ λόγος τοῦ 8 πρὸς τὸν 4) = 2) καὶ ὅτι ἐπομένως αἱ δύο στιγμαί :, αἱ ὁποῖαι φανερώνουν τὸν λόγον, ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν καὶ ὡς σημεῖον τῆς διαιρέσεως,

γ) ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ κάθε λόγου δὲν μεταβάλλεται, ἂν οἱ δύο ***ὅροι*** του πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν (π. χ. 8 : 4 = 4 : 2 = 16 : 8 κ.τ.λ.),

δ) ὅτι ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρους λόγους ἠμπορεῖ νὰ σχηματισθῇ ἕνας ***σύνθετος*** λόγος, ἂν πολλαπλασιασθοῦν ὁ ἕνας μὲ τὸν ἄλλον ἀφ' ἑνὸς μὲν ***οἱ ἡγούμενοι*** (δηλ. οἱ πρῶτοι), ἀφ' ἑτέρου δὲ ***οἱ ἑπόμενοι*** (δηλ. οἱ δεύτεροι) ὅροι τῶν ἁπλῶν λόγων (π. χ.

$$\begin{array}{l} 2:3 \\ \underline{5:4} \\ 10:12=5:6 \end{array}$$

ἢ μετὰ προηγουμένην ἁπλοποίησιν τοῦ ὅρου 2 τοῦ πρώτου λόγου καὶ τοῦ ὅρου 4 τοῦ δευτέρου μὲ τὸν 2 : $\left.\begin{array}{l} 1:3 \\ \underline{5:2} \\ 5:6 \end{array}\right)$,

ε) ὅτι ἡ σύνδεσις δύο ἴσων λόγων μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος ἢ συντομώτερα ***ἡ ἰσότης δύο λόγων*** καλεῖται ***ἀναλογία*** (π.χ. 8 : 4 = 4 : 2),

ϛ) ὅτι εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων $\left(\begin{array}{l} 8:4=4:2 \\ 8\times 2=4\times 4 \end{array}\right)$,

ζ) ὅτι ἀπὸ 3 δοθέντας ὅρους μιᾶς ἀναλογίας εὑρίσκομεν τὸν ἄγνωστον τέταρτον, ἂν μὲν εἶναι ἄκρος, διαιροῦντές τὸ γινόμενον τῶν 2 μέσων μὲ τὸν δοθέντα ἄκρον, ἂν δὲ εἶναι μέσος, διαιροῦντες τὸ γινόμενον τῶν 2 ἄκρων μὲ τὸν δοθέντα μέσον (π. χ. $2:3=5:\times$, $\times=\frac{3\times 5}{2}=7\,\frac{1}{2}$, $2:3=\times:5$, $\times=\frac{2\times 5}{3}=3\,\frac{1}{3}$).

Ἐπίσης πρέπει νὰ ἠξεύρουν οἱ μαθηταὶ καὶ τὰ περὶ ἐξαρτήσεως τῶν ἀνομοειδῶν μεγεθῶν, νὰ γνωρίζουν δηλαδὴ 1) ὅτι δύο μὴ ὁμοειδῆ μεγέθη (π.χ. ἕνα ἐμπόρευμα καὶ ἡ ἀξία του, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος τῆς ἐργασίας) ἠμποροῦν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τέτοιαν ἐξάρτησιν τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο, ὥστε, ἂν πολλαπλασιάζεται (ἢ διαιρῆται) τὸ ἕνα μὲ ἕνα ἀριθμόν, νὰ πολλαπλασιάζεται (ἢ νὰ διαιρῆται) καὶ τὸ ἄλλο μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν (μεγέθη κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα) ἢ ἀντιστρόφως, ἂν πολλαπλασιάζεται (ἢ διαιρῆται) τὸ ἕνα μὲ ἕνα ἀριθμόν, νὰ διαιρῆται (ἢ νὰ πολλαπλασιάζεται) τὸ ἄλλο μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν (μεγέθη ἀντιστρόφως ἀνάλογα), 2) ὅτι δι' αὐτὸ εἰς ὁποιον λόγον εὑρίσκονται δύο τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ μεγέθη αὐτά, εἰς τὸν ἴδιον εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἢ εἰς τὸν ἀντίστροφον εἰς τὴν δευτέρην εὑρίσκονται καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἄλλου μεγέθους (π.χ. ἂν δύο τιμαὶ τοῦ ἐμπορεύματος εἶναι 2 μέτρ. μήκ. καὶ 5 μέτρ. μήκ. καὶ εὑρίσκωνται δι' αὐτὸ εἰς τὸν λόγον 2 : 5, εἰς τὸν ἴδιον λόγον 2 : 5 θὰ εὑρίσκωνται καὶ αἱ δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς ἀξίας των, π.χ. αἱ τιμαὶ 20 δρ. καὶ 50 δρ., αἱ ὁποῖαι καθ' ἑαυτὰς εὑρίσκονται καὶ εἰς τὸν λόγον 20 : 50).

Ἂν ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι οἱ μαθηταὶ κατέχουν ὅλας αὐτὰς τὰς γνώσεις, θὰ πρέπῃ, προκειμένου νὰ λύσουν ἕνα πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀναλογίας, νὰ κάμουν δύο ἐργασίας, πρῶτον μὲν νὰ σχηματίσουν ἀπὸ τὰς πραγματικὰς σχέσεις τοῦ προβλήματος τὴν ἀναλογίαν, ἔπειτα δὲ νὰ εὕρουν ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς ὅρους της τὸν ἄγνωστον, ὁ ὁποῖος εἶναι καὶ ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος. Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς ἐργασίας ἡ πρώτη εἶναι παραπολὺ δύσκολη, ἐνῷ ἡ δεύτερη εἶναι ἁπλουστάτη. Διότι, ἀφοῦ σχηματισθῇ μίαν φορὰν ἡ ἀναλογία, οἱ μαθηταὶ μεταθέτονται εἰς γνωστὸν πλέον ἔδαφος, εὑρίσκουν δὲ εὐκολώτατα τὸν ἄγνωστον τῆς ἀναλογίας ἐφαρμόζοντες τὸν ἀνωτέρω μνημονευθέντα σχετικὸν κανόνα καὶ μὴ προσέχοντες πλέον καθόλου εἰς τὰς πραγματικὰς σχέσεις τοῦ προβλήματος.

Ὁ τρόπος τοῦ σχηματισμοῦ τῆς ἀναλογίας ἀπὸ τὰς πραγματικὰς σχέσεις τῶν προβλημάτων ἠμπορεῖ νὰ κατανοηθῇ ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

Ἂς λάβωμεν πρῶτα ἕνα πρόβλημα μὲ μεγέθη κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, π.χ. τὸ πρόβλημα «6 πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος στοιχίζουν 744 δρ. Πόσον στοιχίζουν οἱ 10 π.;». Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ τὸ πρόβλημα τὴν σχετικὴν ἀναλογίαν, πρέπει νὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς: Τὰ δύο μήκη τοῦ ὑφάσματος, ἤτοι οἱ 6 π. καὶ οἱ 10 π., ἔχουν τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο καθὼς ὁ ἀριθμὸς 6 πρὸς τὸν 10, ἤτοι καθὼς 6 : 10. Τὸ μῆκος λοιπὸν τοῦ ὑφάσματος αὐξάνει. Ἑπομένως πρέπει νὰ αὐξήσῃ καὶ ἡ ἀξία του. Θὰ ἔχουν ἄρα καὶ αἱ ἀξίαι του ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην καθὼς 6 : 10. Σύμφωνα τώρα μὲ τὸ πρόβλημα αἱ ἀξίαι εἶναι 744 δρ. καὶ X. Ἔχουν λοιπὸν ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην καὶ καθὼς 744 : X. Ὥστε αἱ ἀξίαι τὴν μὲν πρώτην φορὰν ἔχουν ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην καθὼς 6 : 10, τὴν δὲ δεύτερην καθὼς 744 : X. Δι' αὐτὸ λοιπὸν ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν 6 : 10 = 744 : X.

Ἂς λάβωμεν τώρα ἕνα πρόβλημα μὲ μεγέθη ἀντιστρόφως ἀνάλογα, π. χ. τὸ πρόβλημα «5 ἐργάται σκάπτουν μίαν τάφρον εἰς 12 ἡμέρας. Εἰς πόσον χρόνον θὰ τὴν ἔσκαπταν 7 ἐργάται;». Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ τὸ πρόβλημα αὐτὸ τὴν σχετικὴν ἀναλογίαν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Αἱ ἐργατικαὶ δυνάμεις, ἤτοι οἱ 5 ἐργάται καὶ οἱ 7 ἐργάται, ἔχουν αἱ μὲν πρὸς τὰς δὲ καθὼς 5 : 7, ἤτοι αὐξάνουν. Ἀλλά, καθὼς ἠξεύρομεν, ὅσον αὐξάνουν οἱ ἐργάται, τόσον ἐλαττώνεται ὁ χρόνος τῆς ἐργασίας. Οἱ χρόνοι λοιπὸν τῆς ἐργασίας ἐδῶ δὲν θὰ ἔχουν καθὼς 5 : 7, ἀλλὰ ἀντιστρόφως, ἤτοι καθὼς 7 : 5. Σύμφωνα τώρα μὲ τὸ πρόβλημα οἱ χρόνοι τῆς ἐργασίας εἶναι 12 ἡμέραι καὶ X ἡμέραι καὶ ἔχουν ὁ ἕνας πρὸς τὸν ἄλλον καὶ καθὼς 12 : X. Ὥστε οἱ χρόνοι τῆς ἐργασίας τὴν μίαν μὲν φορὰν ἔχουν καθὼς 7 : 5, τὴν ἄλλην δὲ καθὼς 12 : X. Δι' αὐτὸ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν 7 : 5 = 12 : X.

Ἂς λάβωμεν τώρα καὶ ἕνα πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, π.χ. τὸ πρόβλημα «12 ἐργάται δι' 6 ἡμέρας ἐργασίας λαμβάνουν ὡς ἡμερομίσθια 3744 δρ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβουν 18 ἐργάται δι' 8 ἡμέρας ἐργασίας;». Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ τὸ πρόβλημα αὐτὸ τὴν ἀναλογίαν, πρέπει νὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς: Αἱ ἐργατικαὶ δυνάμεις ἔχουν καθὼς 12 : 18. Ἐπίσης καὶ τὰ ἡμερομίσθιά των (ἐὰν ἐργάζωνται ἴσον χρόνον) ἔχουν καθὼς 12 : 18. Ἀλλὰ οἱ πρῶτοι ἐργάται ἐργάζονται 6 ἡμέρας, ἐνῷ οἱ δεύτεροι 8 ἡμέρας. Ἄρα οἱ χρόνοι τῆς ἐργασίας των ἔχουν καθὼς 6 : 8.

Ἔτσι ὅμως πρέπει νὰ ἔχουν καὶ τὰ ἡμερομίσθιά των, ἤτοι 6 : 8. Ἑπομένως τὰ ἡμερομίσθιά των ἔχουν :

ἕνεκα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν καθὼς 12 : 18
ἕνεκα τῶν ἡμερῶν τῆς ἐργασίας των καθὼς 6 : 8

ἑπομένως τὰ ἡμερομίσθιά των ἔχουν ἐν ὅλῳ καθὼς 72 : 144.

Σύμφωνα τώρα μὲ τὸ πρόβλημα τὰ ἡμερομίσθιά των ἔχουν καὶ καθὼς 3744 : X. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν 72 : 144 = 3774 : X.

Αὐτὰ ἔχομεν νὰ εἴπωμεν ὅλως διόλου σύντομα ὡς πρὸς τὴν φύσιν τῆς προκειμένης μεθόδου. Ἀπὸ αὐτὰ δὲ ἐξάγεται, ὅτι ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐφαρμοζομένη πρὸς ἔγγραφον λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν παρουσιάζει τὰ ἑξῆς μειονεκτήματα.

1 Προϋποθέτει περισσοτέρας γνώσεις ἀπὸ τὰς ἄλλας μεθόδους, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ ἐφαρμοσθοῦν διὰ τὸν ἴδιον σκοπόν. Φυσικὰ ἡ γνῶσις τοῦ λόγου θὰ χρειασθῇ καὶ διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν προβλημάτων τῆς ἑταιρείας. Ἀλλὰ τοὐλάχιστον διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν χρειάζεται μόνον ἡ γνῶσις τοῦ λόγου, ὄχι δὲ καὶ ἡ γνῶσις τῶν ἀναλογιῶν καὶ τοῦ σχηματισμοῦ συνθέτων λόγων, ὁ ὁποῖος, καθὼς εἴδαμεν ἀνωτέρω, γίνεται κατὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

2. Ὁ ἐκ τῶν προβλημάτων σχηματισμὸς τῶν ἀναλογιῶν, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἀπὸ τὴν μέθοδον αὐτήν, παρουσιάζει πολλὰς δυσκολίας, αἱ κυριώτεραι ἀπὸ τὰς ὁποίας εἶναι αἱ ἑξῆς :

α) Τὰ μεγέθη τὰ διδόμενα εἰς κάθε πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν (π.χ. τὸ πρόβλημα «5 μολύβια στοιχίζουν 4 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 7 μολύβια ;») ἀποτελοῦν, καθὼς εἶναι γνωστόν, ζεύγη (π.χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τὰ δύο ζεύγη : α) 5 μολύβια καὶ 4 δρ., β) 7 μολύβ. καὶ X δρ.), τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα σχηματίζεται ἀπὸ δύο μεγέθη εὑρισκόμενα εἰς πραγματικὴν συνάφειαν (τὰ 5 μολύβια στοιχίζουν 4 δρ., τὰ 7 μολύβια στοιχίζουν πόσας δραχμάς ;). Ἐφόσον δὲ συμβαίνει αὐτό, εἶναι εὐνόητον, ὅτι ὁ ἀριθμῶν θὰ λογαριάζῃ εὐκολώτερα καὶ ἀσφαλέστερα, ἂν εἰς ὅλας τὰς σκέψεις, τὰ ὁποίας κάμνει εἰς τὸν λογαριασμόν του, κρατῇ εἰς τὸν νοῦν του αὐτὰ τὰ ζεύγη, αὐτὴν τὴν φυσικὴν συνάφειαν, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὸ καθένα ἀπὸ αὐτά, διότι ἔτσι θὰ ἔχῃ πάντα ὑπ' ὄψιν του τὰς πραγματικὰς σχέσεις τοῦ προβλή-

ματος καὶ θὰ βοηθῆται ἀπ' αὐτάς. Αὐτὸ τώρα συμβαίνει εἰς ὅλας τὰς ἄλλας μεθόδους. Ἔτσι π. χ. ὁ ἐφαρμόζων τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα σκέπτεται πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ὡς ἑξῆς : τὰ 5 μολύβια στοιχίζουν 4 δρ. Τὸ 1 μολύβι στοιχίζει 80 λεπτά. Τὰ 7 μολύβια στοιχίζουν 5,60 δρ. Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ ἴδιον καὶ κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἀναλογίας, κατὰ τὸν ὁποῖον ὁ ἀριθμῶν διαλύει τὰ φυσικὰ ζεύγη τοῦ προβλήματος καὶ τὴν πραγματικὴν συνάφειαν, ἡ ὁποία φανερώνεται εἰς τὸ καθένα ἀπὸ αὐτά, διὰ νὰ συνδέσῃ τὰ ὁμοειδῆ μεγέθη καὶ νὰ κρατήσῃ αὐτὰ εἰς τὸν νοῦν του ἑνωμένα ἢ μάλιστα, διὰ νὰ μὴ κρατήσῃ οὔτε αὐτά, ἀλλὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἀπὸ τὴν μέτρησίν των. Ἔτσι ὅμως ὁ ἀριθμῶν χάνει ἀπ' ἐμπρός του τὰς πραγματικὰς σχέσεις τοῦ προβλήματος, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δυσκολεύει πολὺ τὴν ἀρίθμησίν του καὶ τὴν κάμνει ὀλιγώτερον ἀσφαλῆ.

β) Ἀκριβῶς διὰ τὸν ἀνωτέρω λόγον ἡ αἰτιολογία τῶν σκέψεων καὶ τῶν συναφῶν πράξεων κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀναλογιῶν δὲν εἶναι πρόχειρη, πρέπει δὲ νὰ εὑρεθῇ μὲ ἰδιαίτερην, κάποτε ἀρκετὴ δύσκολην νοητικὴν ἐργασίαν. Τὸ ὅτι, ὅταν δίδωνται εἰς ἕνα πρόβλημα 5 ἐργάται καὶ 7 ἐργάται, οἱ 7 ἐργάται χρειάζονται ὀλιγώτερον χρόνον ἐργασίας ἀπὸ τοὺς 5, εἶναι εὐνόητον, δὲν εἶναι ὅμως ἐξ ἴσου εὐνόητον καὶ δὲν ἠμπορεῖ νὰ δικαιολογηθῇ εὔκολα καὶ τὸ ὅτι οἱ χρόνοι τῆς ἐργασίας των ἔχουν ὁ ἕνας πρὸς τὸν ἄλλον καθὼς 7 : 5. Ἐπίσης δὲν εἶναι εὔκολον νὰ δικαιολογηθῇ διὰ τῶν πραγμάτων ὁ σχηματισμὸς συνθέτων λόγων εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

γ) Ἐνῷ κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἄλλων μεθόδων ὁ ἀριθμῶν ἐργάζεται ἐπάνω εἰς συγκεκριμένον ἔδαφος, κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀναλογιῶν ἐργάζεται μὲ ἀφῃρημένας προτάσεις. Ἔτσι κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀναλογιῶν στηρίζεται ἐπάνω εἰς γενικὰς προτάσεις, ὁποῖαι εἶναι π.χ. αἱ προτάσεις «ἂν αὐξάνῃ τὸ ἐμπόρευμα, αὐξάνει καὶ ἡ ἀξία», «περισσότεροι ἐργάται χρειάζονται ὀλιγώτερον χρόνον ἐργασίας» κ.τ.λ., ἐνῷ κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἄλλων μεθόδων, π.χ. τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ὁ ἀριθμῶν ἀποβλέπει μόνον εἰς τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν τοῦ δοθέντος προβλήματος καὶ συλλογίζεται : ἂν τὰ 5 μολύβια στοιχίζουν 4 δρ., τὸ 1 στοιχίζει τόσον καὶ τὰ 7 στοιχίζουν τόσον. Βέβαια καὶ οἱ συλλογισμοὶ αὐτοὶ στηρίζονται εἰς τὸ τέλος ἐπάνω εἰς τὰς γενικὰς ἐκείνας προτάσεις, πάντως ὅμως πρέπει νὰ ὁμολογηθῇ, ὅτι εἶναι εὐκολώτερον καὶ ἀσφαλέστερον νὰ ἐργάζεται κανεὶς συλλογιζόμενος μόνον ἐπάνω εἰς τὴν δοθεῖσαν συγκεκριμένην περίπτωσιν.

Ὅλαι αὐταὶ αἱ δυσκολίαι εἶναι τέτοιας φύσεως, ὥστε νὰ δικαιολογοῦν τὸ συμπέρασμα, ὅτι οἱ μαθηταὶ τοῦ κατωτέρου τοὐλάχιστον σχολείου δὲν θὰ ἠμποροῦν νὰ λύουν μετὰ πλήρους κατανοήσεως τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν μὲ τὴν προκειμένην μέθοδον καὶ ὅτι συνήθως θὰ ἔχουν κατὰ τὴν λύσιν αὐτὴν τὸ συναίσθημα τῆς ἀβεβαιότητος.

3. Ἡ προκειμένη μέθοδος δὲν πλεονεκτεῖ οὔτε ὡς πρὸς τὴν καθαρῶς τεχνικὴν ἄποψιν ἀπὸ τὰς ἄλλας μεθόδους. Δὲν εἶναι συντομώτερη ἀπὸ αὐτάς, ὅπως ὑποστηρίζουν μερικοὶ ἀπὸ τοὺς ὑποστηρικτάς της. Ἀπεναντίας ἡ πεῖρα μᾶς δεικνύει, ὅτι ἡ μέθοδος τῆς κλασματικῆς διατάξεως εἶναι κατὰ κανόνα συντομώτερη ἀπὸ αὐτήν.

Κατόπιν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω μειονεκτήματα, τὰ ὁποῖα παρουσιάζει ἡ μέθοδος αὐτή, εἶναι προφανές, ὅτι δὲν ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς κατάλληλη διὰ τὸ κατώτερον τοὐλάχιστον σχολεῖον. Εἰς τὸ συμπέρασμα δὲ αὐτὸ ἔχουν καταλήξει μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου καὶ οἱ περισσότεροι Μεθοδικοί, καθὼς καὶ αἱ ἐπίσημαι ἐκπαιδευτικαὶ ἀρχαί. Ἡ προκειμένη μέθοδος εἶναι πολὺ παλαιά, ἦτο δὲ γνωστὴ καὶ εἰς αὐτὴν τὴν Ἑλληνικὴν ἀρχαιότητα. Ἡ εἰσαγωγή της ἐν τούτοις εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον χρεωστεῖται κυρίως εἰς τοὺς Πεσταλοτσιανούς. Οἱ Πεσταλοτσιανοί, καθὼς ἠξεύρομεν, ἀποβλέποντες εἰς τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ εἰδολογικοῦ σκοποῦ τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας ἐφρόντιζαν κυρίως διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν. Προκειμένου διὰ τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν ἐφήρμοζαν τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, φρονοῦντες πολὺ εὔλογα, ὅτι μὲ αὐτὴν ἠμποροῦν νὰ ἀναπτυχθοῦν ὅσον τὸ δυνατὸν τελειότερα αἱ νοητικαὶ δυνάμεις. Διὰ τὴν ἔγγραφον τώρα λύσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν, διὰ τὴν ὁποίαν ἐφρόντιζαν πολὺ ὀλιγώτερον, ἐδιάλεξαν ἀπὸ τὰς ὑπαρχούσας διατάξεις—μεταξὺ τῶν ὁποίων δὲν ἦτο καὶ ἡ κλασματική, διαμορφωθεῖσα ἀργότερα τὴν κατ' ἀναλογίαν

διάταξιν, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι εὕρισκαν, ὅτι ἐκαλλιεργοῦσε περισσότερον ἀπὸ τὰς ἄλλας τὸν νοῦν, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι μὲ αὐτὴν ἠμποροῦσαν νὰ λύωνται καὶ ἀπὸ μνήμης μερικὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, καὶ ὡρισμένως τὰ ἔχοντα μικροὺς ἀριθμούς. Ἀπὸ τοὺς Πεσταλοτσιανοὺς ἰδίως ὁ *Kawerau* (1818) καὶ ὁ *Harnisch* (1817) ἔκαμαν, ὅ,τι ἦτο δυνατόν, διὰ νὰ τὴν καταστήσουν τὴν μέθοδον αὐτὴν ἀντιληπτὴν εἰς τοὺς μαθητὰς τοῦ κατωτέρου σχολείου, εἰς τὸ τέλος ὅμως ἐνόησαν καὶ οἱ ἴδιοι, ὅτι τὸ πρᾶγμα ἦτο ἀκατόρθωτον. Μετ' αὐτοὺς ὁ *Diesterweg* καὶ ὁ *Heuser* συνιστοῦν τὴν διδασκαλίαν της μόνον εἰς τὰς ἀνωτέρας τάξεις τοῦ δ. σχ. τῶν ἀρρένων. Ἀπὸ τοὺς νεωτέρους Μεθοδικοὺς παραδέχονται τὴν γνώμην των ὁ *R. Adam* καὶ ὁ *Kleinpaul*. Ὁ πρῶτος πολεμήσας τὴν προκειμένην μέθοδον εἶναι ὁ *Busse* (1786). Ἰδίως ὅμως ἡ μέθοδος αὐτὴ ἄρχισε νὰ χάνῃ ἔδαφος κατόπιν ἀπὸ τὸν πόλεμον, τὸν ὁποῖον τῆς ἔκαμεν ὁ *Stern* (1832), ὁ διαμορφωτὴς τῆς μεθόδου τῆς κλασματικῆς διατάξεως (ἴδ. κατωτ.). Ἔτσι καὶ εἰς τοὺς «6 κανόνας, σύμφωνα μὲ τοὺς ὁποίους ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ διδάσκῃ ἄσχημα τὴν Ἀριθμητικήν», οἱ ὁποῖοι ἐδημοσιεύθηκαν κατὰ πρῶτον εἰς τὸ «Brandenburger Schulblatt» τοῦ 1836 (τεῦχ. 4) φέρονται τὰ ἑξῆς: «Εἰς κάθε διδασκαλίαν, μὲ τὴν ὁποίαν πρόκειται οἱ μαθηταὶ νὰ μὴ μάθουν τίποτε, συνιστᾶται ἰδιαιτέρως ἡ διεξοδικὴ διδασκαλία τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν». Σήμερα διδάσκεται ἡ κατ' ἀναλογίαν διάταξις εἰς ἐλάχισμα μόνον ἀπὸ τὰ κατώτερα σχολεῖα τῆς Γερμανίας. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰ ἀνώτερα σχολεῖα τῆς Πρωσσίας ἡ διδασκαλία της γίνεται ὁλονὲν σπανιώτερη. Οἱ Μεθοδικοὶ *Harms* καὶ *Kallius* τὴν ἔχουν ἀποκλείσει ὅλως διόλου ἀπὸ τὸ ἐγχειρίδιόν των τὸ προωρισμένον διὰ τὰ Γυμνάσια. Σφοδρότατα δὲ καταφέρεται κατὰ τῆς μεθόδου αὐτῆς καὶ ὁ *Trappe*, ὁ ὁποῖος ἐπίσης θὰ ἤθελε νὰ ἐκβληθῇ καὶ ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν. Ἀντιθέτως τώρα πρὸς τὰ γινόμενα εἰς τὴν Γερμανίαν ἡ προκειμένη μέθοδος ἐξακολουθεῖ νὰ διδάσκεται κατὰ κανόνα τόσον εἰς τὰ ἀνώτερα, ὅσον καὶ εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα τῆς Αὐστρίας.

2. ***Ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα μὲ ἄμεσον εὕρεσιν τῆς τιμῆς τῆς μονάδος.*** Ἡ μέθοδος αὐτή, ἡ ὁποία συντομώτερα λέγεται «ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα»,

συνίσταται, ὡς γνωστόν, εἰς τὸ ὅτι ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ πλήθους, τὸ ὁποῖον δίδεται εἰς τὸν πρῶτον ὅρον κάθε προβλήματος, συνάγεται καὶ καθορίζεται ἀμέσως ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μόνον μονάδος του, ἀπὸ αὐτὴν δὲ πάλιν συνάγεται καὶ καθορίζεται ἀμέσως ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ ὁμοειδοῦς πλήθους, τὸ ὁποῖον δίδεται εἰς τὸν τρίτον ὅρον τοῦ προβλήματος.

Ἔτσι π.χ., διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα «οἱ 100 κόλλες χαρτὶ στοιχίζουν 20 δρ. Πόσον στοιχίζουν οἱ 7 κόλλες ;», σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ οἱ 100 κ. στοιχίζουν 2 δρ., ἡ 1 κ. στοιχίζει τὸ 1/00 μέρος των 20 δρ., ἤτοι 20 λεπτά, καὶ οἱ 7 κ. στοιχίζουν 7 φορὰς τόσον, ἤτοι 1,40 δρ. Διατάσσομεν δὲ τὰς σκέψεις μας αὐτὰς ἐγγράφως ὡς ἑξῆς:

100 κ. χ. στοιχ.	20 δρ.	ἢ μὲ τὸ σημεῖον	100 κ. χ.	= 20 δρ.
1 » » »	20 λ.	τῆς ἰσότητος:	1 » »	= 20 λ.
7 » » »	1,40 δρ.		7 » »	= 1,40 δρ.

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ τὸ πρόβλημα «5 ἐργάται ἔσκαψαν μίαν τάφρον εἰς 7 ἡμέρας. Εἰς πόσον χρόνον θὰ τὴν ἔσκαπταν 7 ἐργάται;», σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Οἱ 5 ἐργάται ἐχρειάσθηκαν 7 ἡμέρας. Ὁ 1 ἐργάτης θὰ ἐχρειάζετο 5 φορὰς τόσον, ἤτοι 35 ἡμέρας καὶ οἱ 7 ἐργάται θὰ ἐχρειάζοντο τὸ 7 μέρος τῶν 35 ἡμερῶν, ἤτοι 5 ἡμέρας. Διατάσσομεν δὲ τὰς σκέψεις μας αὐτὰς γραπτῶς ὡς ἑξῆς:

5 ἐρ. = 7 ἡμ.
1 » = 7 ἡμ. × 5 = 35 ἡμ.
7 » = 35 ἡμ. : 7 = 5 ἡμ.

Τὰ συντομώτατα αὐτὰ ἀρκοῦν, διὰ νὰ δείξουν τὴν φύσιν τῆς προκειμένης μεθόδου. Ἀπὸ αὐτὰ δὲ ἐξάγεται, ὅτι ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐφαρμοζομένη τόσον εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης, ὅσον καὶ εἰς τὴν γραπτὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν παρουσιάζει τὰ ἀκόλουθα πλεονεκτήματα:

1. Δὲν προϋποθέτει καμίαν ἄλλην ἀριθμητικὴν γνῶσιν ἀπὸ τὴν γνῶσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως. Συμβαίνει δὲ αὐτὸ ἁπλούστατα, διότι εἶναι ἡ παλαιότατη ἀπὸ τὰς μεθόδους, μὲ τὰς ὁποίας οἱ ἄνθρωποι ἐδοκίμασαν νὰ λύσουν τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑνὸς πλήθους ἀπὸ τὴν τιμὴν ἄλλου πλήθους ὁμοειδῶν πραγμάτων. Εἶναι προφανῶς τόσον παλαιά, ὅσον καὶ ἡ ἀριθμητικὴ τέχνη. Εἶναι ἡ πορεία τοῦ ἀνθρώπου, ὁ ὁποῖος ἀριθμεῖ «κατὰ φύσιν», ἀπὸ μνήμης καὶ ὁ ὁποῖος, διὰ νὰ εὕρῃ τὴν τιμὴν τοῦ πλήθους, ἀνατρέχει κατ' ἀνάγκην εἰς τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος του. Ἰδιαιτέρως τώρα ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου αὐτῆς εἰς τὴν ἔγγραφον λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν δὲν ἔχει ἀνάγκην ἀπὸ κανένα ἰδιαίτερον κανόνα ἢ ἀπὸ καμίαν ἰδιαίτερην τεχνικὴν διάταξιν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Δὲν πρόκειται μάλιστα κἂν περὶ διατάξεως εἰς τὴν μέθοδον αὐτήν. Ἡ μόνη διαφορά, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ἀπὸ μνήμης καὶ τῆς γραπτῆς λύσεως τῶν προβλημάτων σύμφωνα μὲ τὴν μέθοδον αὐτήν, συνίσταται εἰς τὸ ὅτι οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ αἱ διαιρέσεις εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν γίνονται ἀπὸ μνήμης, εἰς δὲ τὴν δεύτερην γίνονται γραπτῶς, ἐφόσον οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι.

2. Διευκολύνει πολὺ τὴν ἀρίθμησιν καὶ τὴν κάμνει ἀσφαλέστερην, διότι κατ' αὐτὴν ὁ ἀριθμῶν διατηρεῖ εἰς τὸν νοῦν του τὰ φυσικὰ ζεύγη τῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα δίδονται εἰς κάθε πρόβλημα, καὶ τὴν πραγματικὴν συνάφειαν, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ζεύγη αὐτά, ἔτσι δὲ εἰς ὅλας τὰς πράξεις, ποὺ κάμνει πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος, ἀπὸ τὴν πρώτην ἕως τὴν τελευταίαν, ἔχει διαρκῶς ὑπ' ὄψιν του τὰς πραγματικὰς σχέσεις του καὶ βοηθεῖται ἀπὸ αὐτάς.

3. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι καὶ λογικωτάτη, στηρίζεται δηλ. εἰς ὅλην της τὴν πορείαν ἐπάνω εἰς σκέψεις, καὶ μάλιστα σκέψεις, αἱ ὁποῖαι, ὡς ἀνταποκρινόμεναι εἰς γνωστὰς πραγματικὰς σχέσεις, εἶναι ἁπλούσταται καὶ φυσικώταται καὶ εὑρίσκονται εἰς ἀδιάσπαστον συνοχὴν ἀναμεταξύ των. Καμία ἀπὸ αὐτὰς δὲν ἔχει ἀνάγκην ἰδιαιτέρας ἀποδείξεως, διότι ἡ καθεμία των εἶναι αὐτονόητον ἐπακολούθημα τῆς προηγουμένης. Ὅλαι των εὑρίσκονται εἰς ἀδιάσπαστον συνοχὴν καὶ ὁδηγοῦν ἀβίαστα εἰς τὸ ἐξαγόμενον. Πουθενὰ κατὰ τὴν πορείαν των δὲν παρουσιάζεται κανένα χάσμα, τὸ ὁποῖον θὰ ἔπρεπε νὰ πληρωθῇ μὲ κόπον δι' ἄλλων ἄλλοτε διδαχθεισῶν προτάσεων. Πουθενὰ δὲν παρουσιάζεται ἀσάφεια ἢ ἀβεβαιότης, ἡ ὁποία θὰ ἔπρεπε νὰ ἀρθῇ διὰ βαθυτέρας διεισδύσεως εἰς τὸ πρόβλημα. Τὸ μόνον, τὸ ὁποῖον

πρέπει νὰ γνωρίζῃ ὁ ἀριθμῶν μὲ τὴν μέθοδον αὐτήν, εἶναι ἐκτὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως αἱ πραγματικαὶ σχέσεις αἱ παρουσιαζόμεναι εἰς τὰ προβλήματα (πρβ. ἰδίως τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται μεγέθη ἀντιστρόφως ἀνάλογα). Ἐφόσον ὁ ἀριθμῶν ἀντιλαμβάνεται τὰς σχέσεις αὐτάς, ὅπως τὰς ἀντιλαμβάνεται ὁ ὑγιὴς κοινὸς νοῦς, καὶ ἐφόσον προσέχει, ὡρισμένως αἱ σκέψεις του θὰ εἶναι ἐπιτυχεῖς. Ἀκριβῶς δὲ διότι ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀπαιτεῖ σκέψεις ἁπλουστάτας καὶ στηριζομένας μόνον εἰς τὰς πραγματικὰς σχέσεις, δὲν ἔχει δὲ τίποτε τὸ τεχνητὸν καὶ ἐπιτηδευμένον, δὲν ἠμπορεῖ ποτὲ νὰ λησμονηθῇ.

Αὐτὰ εἶναι τὰ πλεονεκτήματα, τὰ ὁποῖα παρουσιάζει ἡ προκειμένη μέθοδος. Ὅτι κατόπιν ἀπὸ αὐτὰ ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐνέχει μεγίστην μεθοδικὴν ἀξίαν, εἶναι προφανές.

Δὲν πρέπει ἐν τούτοις νὰ λησμονηθῇ, ὅτι ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα παρ' ὅλην τὴν ἁπλότητα καὶ τὴν φυσικότητά της ἀποβαίνει εἰς τὴν ἐφαρμογήν της ἀρκετὰ κοπιαστική, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ τῶν προβλημάτων εἶναι ὁπωσδήποτε μεγάλοι, διότι αἱ σχετικαὶ πράξεις πρέπει νὰ γίνουν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, ὅπως ἔχουν.

Ἂν πρόκειται π. χ. νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα «Τὰ 60 μολύβια στοιχίζουν 44 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 45 μ. ;», θὰ πρέπῃ βέβαια πρῶτα νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις 44 : 60 = 0,7333 δρ. καὶ κατόπιν ὁ πολλαπλασιασμὸς 0,7333×45 = 32,9985 δρ. = 33 δρ. Καὶ περὶ μὲν τῆς ἀπὸ μνήμης ἐκτελέσεως τῶν πράξεων αὐτῶν δὲν ἠμπορεῖ βέβαια νὰ γίνῃ λόγος. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἔγγραφος ἐκτέλεσίς των εἶναι ἐργώδης, πάντως δὲ ἐργωδεστέρα ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀναλογίας, διότι εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν περίπτωσιν ἠμπορεῖ νὰ γίνουν ἁπλοποιήσεις, αἱ ὁποῖαι κάμνουν δυνατὴν τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων μὲ μικροὺς ἀριθμοὺς καὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ γίνουν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Ἔτσι τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα θὰ ἐλύετο μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀναλογίας ὡς ἑξῆς :

60 : 45 = 44 : ×.	Ἂν τώρα ἁπλοποιηθοῦν οἱ ὅροι 60 καὶ 45 μὲ τὸν 15 θὰ ἔχωμεν :
4 : 3 = 44 : ×.	Ἂν δὲ πάλιν ἁπλοποιηθοῦν οἱ ὅροι 4 καὶ 44 μὲ τὸν 4, θὰ ἔχωμεν :
1 : 3 = 11 : ×	

11
33 δρ.

Ἀλλὰ ἐπίσης ἄνετη εἶναι ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος καὶ μὲ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν θὰ ἐξετάσωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα. Μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν λύεται τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὡς ἑξῆς :

60 μολ. στοιχ. 44 δρ.
15 » » 11 »
45 » » 33 ».

Ἀκόμη δὲ ἐργωδεστέρα εἶναι φυσικὰ ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν. Ἔτσι μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν τὸ πρόβλημα «12 ἐργάται δι' 6 ἡμέρας ἐργασίας λαμβάνουν 3744 δρ. ὡς ἡμερομίσθια. Πόσας δρ. θὰ λάβουν 18 ἐργάται δι' 8 ἡμέρας ἐργασίας ; » λύεται ὡς ἑξῆς :

12 ἐργ. δι' 6 ἡμ. ἐργ. 3744 δρ.
18 » » 8 » » ×

1 ἐργ. δι' 6 ἡμ. ἐργ. λαμβ. 3744 δρ. : 12 = 312 δρ.
14
24
18 » » » » » » 312 δρ. × 18
18
2496
312
5616 δρ.
18 » » 1 » » » 5616 δρ. : 6 = 936 δρ.
21 8
36 7488 δρ.
» » » 8 » » » 936 δρ. × 8 = 7488 δρ.

Κατὰ τὴν λύσιν τοῦ ἴδιου προβλήματος μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀναλογίας, ἐκτὸς τοῦ ὅτι ἠμποροῦν νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις, εἶναι δυνατή, καθὼς ηὑρομεν, καὶ μία ἄλλη συντόμευσις· κατ' αὐτὴν δηλ. δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ κάθε διαίρεσις καὶ κάθε πολλαπλασιασμὸς χωριστά, ἀλλά, καθόσον οἱ διαιρέται ἀποχωρίζονται ἀπὸ τοὺς πολλαπλασιαστάς, γίνεται εἰς κάθε περίπτωσιν μία μόνον διαίρεσις· ἔτσι εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἔχομεν :

$$\begin{array}{l} 12 : 18 \\ \underline{\ 6 : \ 8} \\ 72 : 144 = 3774 : X. \end{array} \qquad X = \frac{144 \times 3774}{72}$$

Ἀπὸ ὅλα τώρα τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα ἐξάγεται καθαρά, ὅτι καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης καὶ εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν σκόπιμον εἶναι νὰ γίνεται χρῆσις τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα πρὸς λύσιν ἐκείνων μόνον τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμοὶ εἶναι σχετικῶς μικροὶ καὶ εὔκολοι. Φυσικὰ εἰς τὴν ἔγγραφον ἀρίθμησιν κατ' ἀνάγκην θὰ ἔπρεπε νὰ γίνεται ἀποκλειστικὴ χρῆσίς της, ἐφόσον ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῶν ἀναλογιῶν δὲν εἶναι δυνατὴ τοὐλάχιστον εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον, ἂν δὲν ὑπῆρχε μία ἄλλη μέθοδος ἔχουσα ὅλα τὰ πλεονεκτήματά της καὶ μὴ ἔχουσα τὰ μειονεκτήματά της, ἐπομένως καταλληλότατη διὰ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν, ἤτοι ἡ μέθοδος τῆς κλασματικῆς διατάξεως, εἰς τῆς ὁποίας τὴν ἐξέτασιν ἀμέσως προβαίνομεν.

3. ***Ἡ μέθοδος τῆς κλασματικῆς διατάξεως.*** Ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι ἀπαράλλακτη μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἔχει δὲ μόνον τὴν διαφοράν, ὅτι εἰς αὐτήν, ἀντὶ νὰ εὑρίσκεται ἀμέσως ἡ τιμὴ τῆς μονάδος, καθὼς καὶ ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ πλήθους τοῦ τρίτου ὅρου τοῦ κάθε προβλήματος, ***ὑποσημαίνεται μόνον κλασματικά.***

Ἔτσι π.χ. τὸ πρόβλημα «οἱ 100 κόλλες χαρτὶ στοιχίζουν 20 δρ. Πόσον στοιχίζουν οἱ 7 κόλλες ;» λύεται μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν ὡς ἑξῆς :

Προφορικὴ διατύπωσις τῶν σκέψεων.	Γραπτὴ διατύπωσις.
Ἀφοῦ οἱ 100 κ. στοιχίζουν 20 δρ., ἡ 1 κ. στοιχίζει τὸ 100 μέρος τῶν 20 δρ., ἤτοι εἴκοσι ἑκατοστὰ τῆς δρ. (γράφεται, ὅπως παριστάνεται ἀπέναντι :)	$\frac{20}{100}$ δρ.
Καὶ οἱ 7 κόλλες στοιχίζουν 7 φορὰς τόσον, ἤτοι εἴκοσι ἑκατοστὰ τῆς δρ. ἐπὶ 8 (γράφεται, ὅπως παριστάνεται ἀπέναντι :)	$\frac{20 \times 8}{100}$ δρ.

Τὸ πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν «12 ἐργάται δι' 6 ἡμέρας ἐργασίας λαμβάνουν 3744 δρ. ὡς ἡμερομίσθια. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβουν 18 ἐργάται δι' 8 ἡμέρας ἐργασίας ; » λύεται ὡς ἑξῆς :

Προφορικὴ διατύπωσις τῶν σκέψεων.	Γραπτὴ διατύπωσις.
Οἱ 12 ἐρ. λαμβ. δι' 6 ἡμ. 3744 δρ.	
Ὁ 1 » » » » » τὸ 12 μέρος τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ (γράφεται, ὅπως παριστάνεται ἀπέναντι).	$\frac{3744 \times 18 \times 8}{12 \times 6}$ δρ.
Οἱ 18 ἐργ. λαμβ. δι' 6 ἡμ. 18 φορὰς τόσον (γράφεται, ὅπως ἀπέναντι).	
Οἱ 18 ἐργ. λαμβ. διὰ 1 ἡμ. τὸ 6 μέρος τοῦ προηγουμένου ποσοῦ (γράφεται, ὅπως ἀπέναντι).	
Οἱ 18 ἐργ. λαμβ. διὰ 8 ἡμ. 8 φορὰς τόσον (γράφεται ὁμοίως).	

Ἔτσι κάθε μὲν διαίρεσις ὑποσημαίνεται, καθόσον θέτεται ὁ διαιρέτης ὡς παρονομαστὴς κάτω ἀπὸ τὸν διαιρετέον, κάθε δὲ πολλαπλασιασμός, καθόσον θέτεται ὁ πολλαπλασιαστὴς ὡς παράγων εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ σχηματισθέντος κλάσματος. Μὲ τὴν μέθοδον λοιπὸν αὐτὴν οἱ ὅροι τοῦ κάθε προβλήματος διατάσσονται ὡς κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἔχουν τόσον περισσοτέρους παράγοντας (ὑποσημαινόμενα γινόμενα), ὅσον συνθετώτερον εἶναι τὸ πρόβλημα. Δι' αὐτὸ δὲ καὶ λέγεται ἡ μέθοδος αὐτὴ μέθοδος τῆς κλασματικῆς διατάξεως.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ προκειμένη μέθοδος ἔχει ὅλα τὰ πλεονεκτήματα τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἀφοῦ κατ' οὐσίαν εἶναι ἴδια μὲ αὐτήν. Ἂν προϋποθέτῃ καὶ κλασματικὰς γνώσεις, αἱ γνώσεις αὗται εἶναι τέλειον κτῆμα τῶν μαθητῶν ἀπὸ τὴν προηγηθεῖσαν διδασκαλίαν. Ἐξ ἄλλου δὲν ἔχει τὰ μειονεκτήματα ἐκείνης. Ἔτσι εἰς αὐτὴν γίνεται ἡ συντόμευσις ἐκείνη, μὲ τὴν ὁποίαν κατορθώνεται νὰ γίνεται μία μόνον διαίρεσις καὶ ἡ ὁποία δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνεται κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Ἐπίσης γίνονται εἰς αὐτὴν καὶ ὅλαι αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἁπλοποιήσεις τοῦ σχηματισθέντος κλάσματος. Ἔτσι π.χ. εἰς τὸ κλάσμα $\frac{20\times8}{100}$ δρ., τὸ σχηματισθὲν ἀπὸ τὸ πρῶτον ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω προβλημάτων, ἁπλοποιοῦνται οἱ ὅροι 20 καὶ 100 μὲ τὸ 20 καὶ ἔχομεν ἔτσι τὸ κλάσμα $\frac{8}{5}$ δρ. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου προβλήματος $\frac{3744\times18\times8}{12\times6}$ δρ. θὰ ἔχωμεν μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις 3744×2 δρ.

Ἀλλὰ ἡ προκειμένη μέθοδος ἐκτὸς τῶν οὐσιαστικῶν πλεονεκτημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχει ἀπὸ κοινοῦ μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἔχει καὶ τὰ ἑξῆς καθαρῶς τεχνικὰ πλεονεκτήματα :

1. Εἶναι ἀρκετὰ σύντομη, πάντως δὲ ὄχι ὀλιγώτερον σύντομη ἀπὸ τὰς ἄλλας μεθόδους.

2. Ἠμπορεῖ νὰ χρησιμοποιῆται εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις.

3. Αἱ ἁπλοποιήσεις, αἱ ὁποῖαι γίνονται κατὰ τὴν ἐφαρμογήν της, εἶναι εὐσυνοπτώτεραι καὶ κατανοητότεραι ἀπὸ τὰς ἁπλοποιήσεις, αἱ ὁποῖαι γίνονται κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως, κατὰ τὴν ὁποίαν, ὅταν ὁ ἄγνωστος εἶναι ὁ 4ος ὅρος, ἠμποροῦν νὰ διαιρεθοῦν μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ὄχι μόνον ὁ 1ος καὶ ὁ 2ος ὅρος τῆς ἀναλογίας, ἀλλὰ καὶ ὁ 1ος καὶ ὁ 3ος, εἰς δὲ τὸν σχηματισμὸν συνθέτων λόγων ἠμποροῦν νὰ ἁπλοποιηθοῦν καὶ ὁ ἡγούμενος ὅρος τοῦ ἑνὸς καὶ ὁ ἑπόμενος τοῦ ἄλλου λόγου.

4. Αἱ σχετικαὶ μὲ τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς πράξεις γίνονται εἰς αὐτὴν ἁπλούστερα καὶ εὐκρινέστερα παρὰ εἰς τὴν μέθοδον τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως.

5. Προσαρμόζεται στενώτατα εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, (ἐφόσον ἡ ἀρίθμησις αὐτὴ γίνεται μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα), ἔτσι δὲ τὰ δύο εἴδη τῆς ἀριθμήσεως παρουσιάζουν ἑνότητα.

6. Ἀκριβῶς τὸ ἀνωτέρω πλεονέκτημά της τὴν κάμνει, ὥστε νὰ μὴν ἔχῃ κανὲν σχεδὸν μηχανικὸν στοιχεῖον, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον θὰ ἐπερίμενε κανεὶς ἀπὸ μίαν διάταξιν.

Ἐν τούτοις καὶ ἡ προκειμένη μέθοδος ἔχει μερικὰ μειονεκτήματα. εἶναι δὲ αὐτὰ τὰ ἑξῆς :

1. Οἱ καθ' ἕκαστον πολλαπλασιασμοὶ καὶ ἡ διαίρεσις δὲν ἠμποροῦν νὰ γίνουν ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν καθαυτὸ διάταξιν (π. χ. μὲ τὴν διάταξιν $\frac{17\times47}{35}=$), ὅπως π.χ. ἠμποροῦν νὰ γίνουν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως (π.χ. $\left.\begin{array}{l}35:47=17:\times\\ \underline{\times17}\\ \quad:35=\end{array}\right)$, ἀλλὰ πρέπει νὰ γίνουν χωριστά.

2. Αἱ εὐκολίαι τῆς ἀριθμήσεως, τὰς ὁποίας ἐπιτρέπουν αἱ δεκαδικαὶ ὑποδιαιρέσεις, δὲν ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀπὸ τὴν προκειμένην μέθοδον, (καθὼς οὔτε καὶ ἀπὸ τὴν μέθοδον τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως), ὅπως χρησιμοποιοῦνται ἀπὸ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα καί, καθὼς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, καὶ ἀπὸ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον. Ἐνῷ π. χ. λύοντες μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα τὸ πρόβλημα «οἱ 100 κόλλες χαρτὶ στοιχίζουν 20 δρ. Πόσον στοιχίζουν οἱ 7 κόλλες ;» ἐργαζόμεθα ἔτσι: 100 κ. χ. = 20 ***δραχμάς,*** μὲ τὸν τρόπον δὲ

1 » » = 20 ***λεπτὰ***

κ. τ. λ.

αὐτὸν χρησιμοποιοῦμεν τὴν δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν τῶν δραχμῶν, ἀπὸ τὰς ὁποίας εὐκολώτατα μεταπίπτομεν εἰς τὰ λεπτά, δὲν ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ μὲ τὴν προκειμένην μέθοδον, κατὰ τὴν ὁποίαν εἴμεθα προσκολλημένοι εἰς τὰς δραχμὰς $\left(\frac{20\times7}{100}\text{ δρ.}\right)$.

3. Ἀλλὰ καὶ κάθε ἄλλη ἐν γένει εὐκολία τῆς ἀριθμήσεως, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, δὲν ἠμπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῇ ἀπὸ τὴν προκειμένην διάταξιν,

καθὼς οὔτε καὶ ἀπὸ ὁποιανδήποτε ἄλλην διάταξιν τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως, διότι ἡ καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ ἐργάζεται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς ἐπάνω εἰς ἕνα ὡρισμένον καὶ ἀμετάβλητον σχῆμα. Διὰ τὸν λόγον δὲ αὐτὸν ἀκριβῶς καὶ ὅλαι αὗται αἱ διατάξεις πολὺ ὀλίγον συντελοῦν εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν διαφόρων ἀριθμῶν καὶ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς δεξιότητος εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν.

Εἰς τὴν μέθοδον τώρα τῆς κλασματικῆς διατάξεως,—ὅπως καὶ εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα—, καταλογίζουν μερικοὶ καὶ ἕνα ἄλλο μειονέκτημα, τὸ ὁποῖον ὅμως εἶναι μόνον φαινομενικόν, ὄχι δὲ καὶ πραγματικόν. Τῆς καταλογίζουν δηλ., ὅτι μεταχειρίζεται κάποτε ἕνα συλλογισμόν, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι φυσικός, διότι δὲν ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν πραγματικότητα. Προκειμένου π. χ. νὰ λύσωμεν μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν τὸ πρόβλημα «4 ἐργάται ἐτελείωσαν ἕνα ἔργον εἰς 6 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 7 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργασθοῦν 3 ἐργάται, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἴδιον ἔργον εἰς 5 ἡμέρας;», ὀφείλομεν νὰ συλλογισθῶμεν ὡς ἑξῆς: ἂν οἱ 4 ἐργάται ἐργάζωνται 6 ἡμέρας ἐπὶ 7 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ 1 ἐργάτης ἐργαζόμενος 6 ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ τὴν ἡμέραν 7 ὥρ. $\times 4 =$ ***28 ὥρ.***, διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἴδιον ἔργον κ.τ.λ. Ἀλλ' αὐτό, παρατηροῦν οἱ περὶ ὧν ὁ λόγος Μεθοδικοί, εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ ἡμέρα ἔχει 24 μόνον ὥρας. Ἡ ἀτοπία ὅμως αὐτή, εἰς τὴν ὁποίαν φθάνομεν μὲ τὸν ἀνωτέρω συλλογισμόν, εἶναι φαινομενική, αἴρεται δὲ ἁπλούστατα, ἂν σκεφθῶμεν, ὅτι ὁ χρόνος τῆς ἐργασίας καθορίζεται ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ προκειμένου μὲ τὰς ὥρας καὶ ὄχι μὲ τὰς ἡμέρας. Τὸ ἔργον ἀπαιτεῖ ὡρισμένας ὥρας, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ κατανεμηθοῦν μὲ ὁποιονδήποτε τρόπον εἰς ἡμέρας καὶ ἐργάτας. Εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα χρειάζονται 7 ὥρ. $\times 4 \times 6 = 168$ ὧραι. Ἕνας ἐργάτης βέβαια δὲν ἠμπορεῖ νὰ τελειώσῃ εἰς 1 ἡμέραν ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ 168 ὥρας. Ἂν μολοντοῦτο προβάλλεται ἡ ἀπαίτησις αὐτή, προδήλως πρόκειται περὶ τυπικῆς καὶ φαινομενικῆς μόνον ἀπαιτήσεως, ὅπως φαίνεται ἀμέσως, ἂν προστεθῇ εἰς αὐτὴν ἡ φράσις ἢ ἡ σκέψις «ὁ ἕνας ἐργάτης θὰ ἐτελείωνε τὸ ἔργον εἰς 1 ἡμέραν, ***ἂν φυσικὰ ἡ ἡμέρα εἶχε 168 ὥρας***». Ἡ τελευταία αὐτὴ ὑπόθεσις μᾶς λέγει ἁπλούστατα, ὅτι ἡ ἀπαίτη-

σις ἐκείνη δὲν ἠμπορεῖ βέβαια νὰ ἐκπληρωθῇ. ἐφόσον ὅμως προβάλλεται τυπικῶς, λέγομεν, ὅτι θὰ ἐξεπληρώνετο τυπικῶς ἔτσι καὶ ἔτσι. Δὲν πρέπει ἑπομένως νὰ ἀποδοθῇ τόση σημασία εἰς τὴν δῆθεν ἀτοπίαν τοῦ προκειμένου συλλογισμοῦ, ὁ ὁποῖος ἄλλωστε κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς κλασματ. διατάξεως δὲν γίνεται κἂν ἀντιληπτὸς ὡς μὴ φυσικὸς εἰς τὸν ἀριθμοῦντα, διότι οὗτος δὲν ἐκτελεῖ τὸν πολλαπλασιασμόν, ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ ὁποίου θὰ ἐφαίνετο ἡ ἀσήμαντη αὐτὴ ἀτοπία τοῦ συλλογισμοῦ.

Ἂν τώρα συγκρίνωμεν τὰ πλεονεκτήματα τῆς προκειμένης μεθόδου μὲ τὰ μειονεκτήματά της, θὰ εὕρωμεν εὔκολα, ὅτι τόσον ὑπερέχουν τὰ πρῶτα ἀπὸ τὰ δεύτερα, ὥστε ἐπιβάλλουν τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου αὐτῆς εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον κατὰ τὴν ἔγγραφον λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Ὅτι τώρα κατὰ τὴν ἔγγραφον λύσιν ἐκείνων ἀπὸ τὰ προβλήματα αὐτά, ὅσα ἔχουν σχετικῶς μικροὺς ἀριθμούς, ἠμπορεῖ ἐκ παραλλήλου νὰ γίνεται χρῆσις καὶ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα μὲ τὴν ἄμεσον εὕρεσιν τῆς τιμῆς της, εἶναι προφανὲς κατόπιν ἀπὸ ὅσα εἴπαμεν προηγουμένως ἐξετάζοντες τὴν μέθοδον αὐτήν.

Ἡ διαμόρφωσις τῆς προκειμένης μεθόδου ὀφείλεται εἰς τὸν *Stern*, Διευθυντὴν Διδασκαλείου (Lehrgang des Rechenunterrichts nach geistbildenden Grundsätzen, Karlsruhe, 1832), ὁ ὁποῖος ἤχθη εἰς τὸν σχηματισμόν της ἀφορμὴν λαβὼν ἀπὸ τὸ δύσχρηστον τῆς μεθόδου τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως, τὴν ὁποίαν δι' αὐτὸ καὶ καταπολεμεῖ, καθὼς εἴδαμεν (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 245), σφοδρῶς, καὶ ἐπιθυμῶν νὰ προσφέρῃ διάταξιν παρουσιάζουσαν μὲν ὅλα τὰ οὐσιαστικὰ πλεονεκτήματα τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἔχουσαν ὅμως συγχρόνως καὶ πρακτικὴν χρησιμότητα διὰ τὴν ἔγγραφον ἀρίθμησιν. Ἐν τούτοις ἡ διάδοσις τῆς νέας μεθόδου εἰς τὰ σχολεῖα δὲν ἔγινε τόσον γρήγορα, ὅσον θὰ ἐπερίμενε κανεὶς λαμβάνων ὑπ' ὄψιν τὰ τόσα της πλεονεκτήματα καὶ τὸ δύσχρηστον τῆς μεθόδου τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως. Ὀφείλεται δὲ φυσικὰ τὸ πρᾶγμα κυρίως εἰς τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν δὲν εἶναι εὔκολη ἡ ἐκβολὴ κάθε συστήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τύχει γενικῆς διαδόσεως. Ὄχι ὀλίγον ὅμως συνετέλεσε εἰς τὴν ἐπιβράδυνσιν τῆς διαδόσεώς της καὶ ἡ στάσις, τὴν οποίαν έλαβε απέναντί της Παιδαγωγικός της άξίας του *Diesterweg*. Ὁ Diesterweg, προσκολλημένος εἰς τὴν ἐπικρατοῦσαν μέθοδον τῆς κατ᾿ ἀναλογίαν διατάξεως καὶ παραγνωρίσας τὴν φύσιν τῆς κλασματικῆς, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν ἔβλεπε ἄλλο τίποτε παρὰ ἕνα μηχανικὸν τύπον, μίαν μηχανικὴν μορφήν,—ὡσὰν ἡ κατ᾿ ἀναλογίαν διάταξις νὰ μὴν εἶναι τύπος—καταφέρεται ὅλως διόλου ἄδικα ἐναντίον τῆς νέας μεθόδου. Ὁ *Stubba* προκρίνει τὴν κλασματικὴν διάταξιν ἀπὸ τὴν κατ᾿ ἀναλογίαν, ἐν τούτοις διδάκει καὶ τὴν τελευταίαν, διότι, καθὼς λέγει, ἕνα μέρος ἀπὸ τοὺς μαθητὰς τοῦ δ. σχολείου θὰ φοιτήσῃ εἰς τὰ ἀνώτερα σχολεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύονται μὲ τὴν διάταξιν αὐτήν. Ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἐργάσθηκαν ἐξαιρετικὰ διὰ τὴν διάδοσιν τῆς νέας μεθόδου, εἶναι ὁ *Hentschel* καὶ ὁ *Scholz*, οἱ ὁποῖοι, ὅπως ὁ Stern, ἐξέβαλαν ὅλως διόλου ἀπὸ τὸ κατώτερον σχολεῖον τὴν κατ᾿ ἀναλογίαν διάταξιν. Ἔτσι ὀλίγον κατ᾿ ὀλίγον κατώρθωσε ἡ κλασματικὴ διάταξις νὰ κερδίσῃ ἔδαφος τόσον εἰς τὰ κατώτερα, ὅσον καὶ εἰς τὰ ἀνώτερα σχολεῖα. Σχετικῶς μὲ τὰ τελευταῖα εἰς τὴν «Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht» τοῦ *Hoffmann* (1892, σ. 421) ἡ προκειμένη μέθοδος χαρακτηρίζεται ὡς ὁ λογικώτερος τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ διδαχθῇ ἡ μέθοδος τῶν τριῶν, ἡ δὲ μέθοδος τῆς κατ᾿ ἀναλογίαν διατάξεως θεωρεῖται ὡς ἀνήκουσα πλέον εἰς τὴν ἱστορίαν. Ἐν τούτοις δὲν ἠμπορεῖ ἀκόμη κανεὶς νὰ εἰπῇ, ὅτι ἡ διάδοσις τῆς κλασματικῆς διατάξεως ἔχει ἀποβῆ γενική. Εἰς ἀρκετὰ δημ. σχολεῖα, ἰδίως δὲ τῆς Σαξωνίας ἀποφεύγεται ἡ ἐφαρμογή της. Εἰς τὸ ὑπὸ σχολικῶν ἀνδρῶν τῆς Δρέσδης συνταχθὲν «Dresdener Rechenbuch für Volksschulen» δὲν γίνεται χρῆσίς της. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν Βαυαρίαν, εἰς τὴν ὁποίαν εἶχε διαδοθῆ εὐρύτατα, κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους ἡ χρῆσίς της βαίνει ἐλαττουμένη. Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τοὺς νεωτέρους Μεθοδικούς, φυσικὰ οἱ περισσότεροι ἔχουν ταχθῆ ὑπὲρ αὐτῆς. Δὲν λείπουν ὅμως καὶ οἱ ἀντίπαλοί της. Ἂν ἐξαιρέσῃ κανεὶς τὸν Adam καὶ τὸν Kleinpaul, οἱ ὁποῖοι, καθὼς εἴδαμεν ἀνωτέρω (σελ. 245), προκρίνουν τὴν κατ᾿ ἀναλογίαν διάταξιν, τάσσονται ἐναντίον τῆς κλασματικῆς διατάξεως καὶ οἱ *Knilling* (Zur Reform des Rechenunterrichtes in den Volksschulen, München, 1884, μέρ. II, σελ. 106 καὶ 110), *Griesmann* (Der Rechenunterricht in der Volksschule, Leipzig, Richter, 1890, σ. 99), *Bergmann* (Welche Gründe sprechen gegen die Anwendung des Bruchsatzes in der Schlussrechnung?, διατριβ. δημοσιευμ. εἰς τὰ Pädagogische Studien τοῦ 1901, τεῦχ. 4) κ. ἄλλοι. Τὸ περίεργον ὅμως εἶναι, ὅτι οἱ ἀνωτέρω Μεθοδικοὶ ἀποδίδουν εἰς τὴν κλασματικὴν διάταξιν μειονεκτήματα, πρὸς τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλως διόλου ξένη, ἔχουσα ἀπεναντίας τὰ ἀντίθετα πλεονεκτήματα. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ μὲν Knilling προτιμᾷ τὴν παλαιὰν μέθοδον τῆς ἀλύσεως (ἴδ. ἀν. σελ. 36), ἀλλὰ στηριζομένην ἐπὶ συλλογισμῶν, οἱ δὲ Griesmann καὶ Bergmann τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον, εἰς τῆς ὁποίας τὴν ἐξέτασιν ἀμέσως μεταβαίνομεν.

4. *Ἡ ἀναλυτικὴ ἢ Ἰταλικὴ μέθοδος ἢ μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.* Ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι συγγενὴς ὡς πρὸς τὴν φύσιν μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Καὶ εἰς τὰς δύο ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ πλήθους, τὸ ὁποῖον δίδεται εἰς τὸν τρίτον ὅρον κάθε προβλήματος, συνάγεται ἀπὸ τὴν δεδομένην τιμὴν τοῦ ὁμοειδοῦς πλήθους, τὸ ὁποῖον φανερώνει ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ προβλήματος. Διαφέρει ὅμως ἀπὸ τὴν μέθοδον ἐκείνην ὡς πρὸς τοῦτο, ὅτι δηλ., ἐνῷ εἰς ἐκείνην ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ πλήθους τοῦ τρίτου ὅρου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, ἡ ὁποία συνάγεται ἀπὸ τὴν δεδομένην τιμὴν τοῦ ὁμοειδοῦς πλήθους τοῦ πρώτου ὅρου, εἰς αὐτὴν ἡ τιμὴ τοῦ πλήθους τοῦ τρίτου ὅρου εὑρίσκεται ἀπὸ τὰς τιμὰς τῶν μερικῶν ποσῶν, **εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ πλῆθος αὐτό,** τιμάς, αἱ ὁποῖαι φυσικὰ πάλιν συνάγονται ἀπὸ τὴν δεδομένην τιμὴν τοῦ ὁμοειδοῦς πλήθους τοῦ πρώτου ὅρου.

Ὑπὸ τὴν ἁπλουστάτην της μορφὴν ἔχει ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος ὡς ἑξῆς. Κατ᾿ αὐτὴν ὁ τρίτος ὅρος τοῦ δοθέντος προβλήματος ἀναλύεται **ἐν σχέσει πάντοτε πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον του** εἰς τέτοιους **προσθετέους,** ὥστε **ὁ πρῶτος ἀπὸ αὐτοὺς** νὰ εἶναι ἴσος μὲν μὲ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ προβλήματος ἢ πολλαπλάσιόν του, ἂν ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν τρίτον, ποσοστὸν δὲ τοῦ πρώτου ὅρου, ἂν ὁ ὅρος αὐτὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν τρίτον, **ὁ καθένας δὲ ἀπὸ τοὺς ἄλλους προσθετέους** νὰ εἶναι ποσοστὸν τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του. Μαζὶ τώρα μὲ τὴν *ἀνάλυσιν* αὐτὴν τοῦ τρίτου ὅρου τοῦ προβλήματος εἰς προσθετέους καθορίζεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ καθενός των. Φυσικὰ ἡ τιμὴ τοῦ *πρώτου* προσθετέου, ἂν μὲν εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ προβλήματος, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν τιμὴν τοῦ ὅρου αὐτοῦ, ἂν δὲ *εἶναι* πολλαπλάσιόν του, θὰ καθορίζεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς τιμῆς τοῦ πρώτου ὅρου, ἂν δὲ τέλος εἶναι ποσοστόν του, θὰ καθορίζεται διὰ διαιρέσεως τῆς τιμῆς αὐτῆς. Ἡ τιμὴ τοῦ *καθενὸς* ἀπὸ τοὺς ὑπολοίπους προσθετέους θὰ καθορίζεται διὰ διαιρέσεως τῆς τιμῆς τοῦ προηγουμένου του, τοῦ ὁποίου, καθὼς εἴπαμεν, πρέπει νὰ εἶναι ποσοστόν. Ἀφοῦ ἔτσι εὑρεθῇ ἡ τιμὴ καὶ τοῦ τελευταίου προσθετέου, ἀθροίζονται αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν προσθετέων, τὸ δὲ ἄθροισμά των ἀποτελεῖ τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ τρίτου ὅρου τοῦ προβλήματος.

Ἔτσι π.χ. τὸ πρόβλημα «ἕνα κομμάτι πανιοῦ μήκους 24 μ. στοιχίζει 120 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 7 μέτρα;» λύεται μὲ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον ὡς ἑξῆς:

Προφορικὴ διατύπωσις τῶν σκέψεων.

Τὰ 24 μ. στοιχίζουν 125 δραχμάς.

Τὰ 6. μ. (ἤτοι τὸ τέταρτον τῶν 24 μ.) στοιχίζουν (τὸ τέταρτον τῶν 120 δρ., ἤτοι) 30 δρ.

Τὸ 1 μ. (ἤτοι τὸ ἕκτον τῶν 6 μ.) στοιχίζει (τὸ ἕκτον τῶν 30 δρ., ἤτοι, 5 δρ.

Καὶ τὰ 7 μέτρα στοιχίζουν 30+5=35 δρ.

Γραπτὴ διατύπωσις.

24 μ.	στοιχ.	120 δρ.
6 »	»	30 »
1 »	»	5 »
7 μ.	στοιχ.	35 δρ.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω, ὁ τρίτος ὅρος τοῦ προβλήματος 7 μ. ἀναλύεται ἐν σχέσει μὲ τὸν πρῶτον ὅρον 24 μ. εἰς τοὺς προσθετέους 6 μ.+1 μ., ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ μὲν πρῶτος εἶναι ποσοστὸν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ προβλήματος, ἤτοι τὸ τέταρτόν του, ὁ δὲ δεύτερος εἶναι ποσοστὸν τοῦ πρώτου προσθετέου, ἤτοι τὸ ἕκτον του. Μαζὶ μὲ τὴν ἀνάλυσιν καθορίζεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ καθενὸς προσθετέου διὰ διαιρέσεως. Αἱ τιμαὶ τῶν δύο προσθετέων ἀθροίζονται, τὸ δὲ ἄθροισμά των ἀποτελεῖ τὴν τιμὴν τοῦ τρίτου ὅρου.

Ἂν ὁ τρίτος ὅρος ἦτο μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ μάλιστα τόσον, ὥστε νὰ περιέχῃ καὶ ἕνα πολλαπλάσιόν του, ἂν ἦτο

π.χ. 55 μέτρα, τότε θὰ ἀνελύετο εἰς τοὺς προσθετέους 48 μ. +6 μ. +1 μ. καὶ τὸ πρόβλημα θὰ ἐλύετο ὡς ἑξῆς:

24 μ.	στοιχ.	120 δρ.
48 »	»	240 »
6 »	»	30 »
1 »	»	5 »
55 μ.	στοιχ.	275 δρ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς προσθετέους, εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ τρίτος ὅρος, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου, ἡ τιμή του εὑρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἂν ὁ τρίτος ὅρος ἦτο 50 μ., θὰ ἀνελύετο εἰς 48 μ. + 2 μ. καὶ τὸ πρόβλημα θὰ ἐλύετο ὡς ἑξῆς:

24 μ.	στοιχ.	120 δρ.
48 »	»	140 »
2 »	»	10 »
50 μ.	στοιχ.	250 δρ.

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου ἀπὸ τοὺς προσθετέους, εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ τρίτος ὅρος, εὑρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ, καθόσον ὁ προσθετέος αὐτὸς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου.

Ἂν τέλος ὁ τρίτος ὅρος εἶναι μὲν μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον, ἀλλ' ὄχι τόσον, ὥστε νὰ περιέχῃ καὶ ἕνα πολλαπλάσιόν του, ἂν εἶναι π. χ. 30 μ., τότε θὰ ἀναλυθῇ εἰς τοὺς προσθετέους 24 μ. (ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον ὅρον) + 6 μ. (ὁ ὁποῖος εἶναι ποσοστὸν τοῦ πρώτου προσθετέου) καὶ τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ ὡς ἑξῆς:

24 μ.	στοιχ.	120 δρ.
6 »	«	30 »
30 μ.	στοιχ.	150 δρ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν χρειάζεται οὔτε πολλαπλασιασμός, οὔτε διαίρεσις, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου ἀπὸ τοὺς προσθετέους, εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ τρίτος ὅρος, διότι ὁ προσθετέος αὐτὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον ὅρον καὶ ἑπομένως ἡ τιμή του εἶναι ἴση μὲ τὴν τιμὴν τοῦ ὅρου αὐτοῦ.

Εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω λύσεις ἔχομεν τὴν ἁπλουστάτην μορφὴν τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου. Ἐφόσον ὅμως λαμβάνεται ἡ μέθοδος αὐτὴ ὑπὸ εὐρυτέραν ἔννοιαν, περιλαμβάνει καὶ λύσεις γινομένας ***μὲ ἄλλας ἀναλύσεις,*** ὁποῖαι π.χ. εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

1. 1 ὀκ. ἄρτ. στοιχ. 8,85 δρ. Πόσον στοιχίζουν 16 ὀκ.;

8 δρ.	× 16 =	128 δρ.
50 λ.	× 16 =	8 »
25 λ.	× 16 =	4 »
10 λ.	× 16 =	1,60 »
8,85 δρ.	× 16 =	141,60 δρ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γίνεται ἀνάλυσις τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ προβλήματος.

2. 1000 κεραμ. στοιχ. 1260 δρ. Πόσον στ. 400 κερ. ;
500 » » 630 »
— 100 » » 126 »
400 κεραμ. στοιχ. 404 δρ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ τρίτος ὅρος 400 ἐξισώνεται μὲ 500 - 100, δι' αὐτὸ δὲ ἡ τιμή του εὑρίσκεται εἰς τὸ τέλος μὲ ἀφαίρεσιν.

3. 24 μέτρ. παν. στοιχ. 120 δρ. Πόσον στοιχ. 20 μ. ;
— 4 » » » 20 »
20 μέτρ. παν. στοιχ. 100 δρ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ τρίτος ὅρος 20 ἐξισώνεται μὲ τὸν πρῶτον 24 - 4 κ.τ.λ.

4. 44 ὀκ. κάρβ. στοιχ. 136,40 δρ. Πόσον στ. 33 ὀκ. ;
11 » » » 34,10 »
33 » » » 102,30 »

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ τρίτος ὅρος 33 ἀναλύεται εἰς παράγοντας (11×3), δι' αὐτὸ δὲ καὶ ἡ τιμή του εὑρίσκεται εἰς τὸ τέλος μὲ πολλαπλασιασμόν.

5. 100 αὐγὰ στοιχ. 180 δρ. Πόσον στοιχ. 44 αὐγά ;
10 » » 18 »
40 » » 72 »
4 » » 7,20 »
44 αὐγ. στοιχ. 79,20 δρ.

Ἐδῶ ὁ τρίτος ὅρος 44 αὐγὰ ἀναλύεται εἰς τοὺς προσθετέους 40 αὐγ. (τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ εὑρίσκεται εὔκολα ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν 10 αὐγ.) καὶ 4 αὐγ. (τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ εὑρίσκεται εὔκολα ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν 40 αὐγ., ὅπως τῶν 2 ἀπὸ τῶν 20, τῶν 3 ἀπὸ τῶν 30 κ.τ.λ.).

6. 50 μ. πανὶ στοιχ. 250 δρ. Πόσον στοιχίζουν 19 μ. ;
10 » » » 50 »
20 » » » 100 »
— 1 » » » 5 »
19 μ. πανὶ στοιχ. 95 δρ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ τρίτος ὅρος 19 μ. ἐξισώνεται μὲ 20 μ.—1 μ., τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ εὑρίσκεται εὔκολα ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν 10 μ.

7. 1000 κεραμ. στοιχ. 1250 δρ. Πόσον στ. τὰ 28 κ.;
1 » » 1,25 δρ.
4
5,00 δρ.
7
35,00 δρ.

Ἐδῶ ὁ τρίτος ὅρος ἀναλύεται εἰς παράγοντας (4 × 7) καὶ ἔτσι ἀποφεύγεται ἡ πρόσθεσις τῶν μερικῶν ἐξαγομένων.

Εἶναι τώρα προφανές, ὅτι ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαφόρων αὐτῶν ἀναλύσεων ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ λύουν τὸ ἴδιον πρόβλημα μὲ πολλοὺς καὶ διαφορετικοὺς τρόπους, ἔτσι δὲ ἐπάνω εἰς ἕνα παράδειγμα ὄχι μόνον νὰ μανθάνουν τὴν ποικιλίαν τῶν ἀναλύσεων, ἀλλὰ καὶ νὰ εὑρίσκουν τὰς χρησιμωτέρας ἀπὸ αὐτάς. Τὸ πρόβλημα π.χ. «τὰ 100 πενάκια στοιχίζουν 19,50 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 48 π. ;» ἠμποροῦν νὰ τὸ λύσουν κατὰ τοὺς ἑξῆς διαφορετικοὺς τρόπους :

1. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
10 » » 1,95 »
40 » » 7,80 »
8 » » 1,56 »
48 π. στοιχ. 9,36 δρ.

2. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
20 » » 3,90 »
20 » » 3,90 »
4 » » 0,78 »
4 » » 0,78 »
48 π. στοιχ. 9,36 »

3. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
50 » » 9,75 »
(1 » » 0,195 »)
— 2 » » 0,390 »
48 π. στοιχ. 9,36 δρ.

4. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
10 » » 1,95 »
30 » » 5,85 »
3 » » 0,585 »
5 » » 0,975 »
48 π. στοιχ. 9,36(0)δρ.

5. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
1 » » 0,195 »
6
1,170 »
8
9,36(0) δρ.

6. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
1 » » 0,195 »
7 » » 1,365 »
10 » » 1,95 »
30 » » 5,85 »
48 π. στοιχ. 9,36(0)δρ.

7. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
10 » » 1,95 δρ.
— 2 » » 0,39 »
8 » » 1,56 »
+ 40 » » 7,80 »
48 π. στοιχ. 9,36 δρ.

8. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
4 » » 0,78 »
48 » » 9,36 »

9. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
— 4 » » 0,78 »
96 » » 18,72 »
48 » » 9,36 »

10. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
20 δρ. $\times 48 = 960$ δρ.
— $\frac{1}{2}$ » $\times 48 = 24$ »
936 δρ.
936 δρ. : 100 = 9,36 δρ.

11. 100 π. στοιχ. 19,50 δρ.
1 » » $19\frac{1}{2}$ λεπτ.
20 » $\times 48 = 9{,}60$ δρ.
— $\frac{1}{2}$ » $\times 48 = 0{,}24$ »
9,36 δρ.

Ἀπὸ ὅσα εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα σχετικὰ μὲ τὴν φύσιν τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου ἐξάγομεν εὔκολα, ὅτι ἡ μέθοδος αὐτὴ ἔχει τὰ ἑξῆς πλεονεκτήματα :

1. Ὅπως καὶ ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, μὲ τὴν ὁποίαν συγγενεύει, δὲν προϋποθέτει καμίαν ἄλλην γνῶσιν ἀπὸ τὴν γνῶσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως. Συμβαίνει δὲ αὐτό, διότι καὶ ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος εἶναι τόσον παλαιὰ ὅσον ἡ συγγενής της. Εἶναι καὶ αὐτὴ πορεία τοῦ ἀπὸ μνήμης ἀριθμοῦντος ἀνθρώπου, ὁ ὁποῖος, ὅταν δυσκολεύεται νὰ εὕρῃ τὴν τιμὴν ἑνὸς πλήθους ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, τὴν εὑρίσκει εὐκολώτερα ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύει τὸ πλῆθος. Ὅπως ἐκείνης, ἔτσι καὶ αὐτῆς ἡ ἐφαρμογὴ εἰς τὴν ἔγγραφον ἀρίθμησιν δὲν ἔχει ἀνάγκην κανενὸς ἰδιαιτέρου κανόνος ἢ ἰδιαιτέρας τεχνητῆς διατάξεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Δὲν πρόκειται κἂν καὶ εἰς αὐτὴν περὶ διατάξεως. Καὶ εἰς αὐτήν, ὅπως εἰς ἐκείνην, ἡ μόνη διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀπὸ μνήμης καὶ τῆς γραπτῆς λύσεως τῶν προβλημάτων συνίσταται εἰς τὸ ὅτι οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ αἱ διαιρέσεις εἰς μὲν τὴν πρώτην γίνονται ἀπὸ μνήμης, εἰς δὲ τὴν δευτέρην γραπτῶς. Ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ αὐτὴ μεταξὺ τῶν δύο εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως σχεδὸν ἐξαλείφεται εἰς τὴν προκειμένην μέθοδον, διότι ἕνεκα τῆς μικρότητος τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ἀπὸ τὰς ἀναλύσεις, αἱ σχετικαὶ πράξεις γίνονται κατὰ κανόνα καὶ εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν ἀπὸ μνήμης, γράφονται δὲ μόνον τὰ ἐξαγόμενά των.

2. Ὅπως αἱ μέθοδοι τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα καὶ τῆς κλασματικῆς διατάξεως, ἔτσι καὶ ἡ προκειμένη μέθοδος διευκολύνει ἐξαιρετικὰ τὴν ἀρίθμησιν καὶ τὴν κάμνει ἀσφαλεστέραν, διότι καὶ εἰς αὐτὴν ὁ ἀριθμῶν διατηρεῖ εἰς τὸν νοῦν του τὰ φυσικὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα δίδονται εἰς κάθε πρόβλημα, δι᾽ αὐτὸ δὲ ἐργάζεται ἔχων πάντοτε ὑπ᾽ ὄψιν του τὰς πραγματικὰς σχέσεις τοῦ προβλήματος καὶ βοηθούμενος ἀπὸ αὐτάς.

3. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον καὶ ἡ προκειμένη μέθοδος εἶναι ἐξ ἴσου λογικὴ μὲ τὰς δύο ἄλλας μνημονευθείσας μεθόδους. Καὶ εἰς αὐτὴν ὁ ἀριθμῶν στηρίζεται διαρκῶς ἐπάνω εἰς σκέψεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἁπλούσταται καὶ φυσικώταται καὶ εὑρίσκονται εἰς στενὴν συνοχὴν ἀναμεταξύ των.

4. Ἐνῷ ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἐφαρμοζομένη μὲν ἀπὸ μνήμης πρέπει κατ᾽ ἀνάγκην νὰ περιορίζεται εἰς προβλήματα μὲ μικροὺς σχετικῶς ἀριθμούς, ἐφαρμοζομένη δὲ γραπτῶς ἠμπορεῖ μὲν νὰ ἐκτείνεται καὶ εἰς προβλήματα μὲ μεγάλους ἀριθμούς, ἀλλ᾽ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀποβαίνει ἐργώδης, διότι ἐργάζεται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ἀμεταβλήτους, μὲ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον ἠμποροῦμεν νὰ ἐργαζώμεθα εὔκολα τόσον ἀπὸ μνήμης, ὅσον καὶ γραπτῶς καὶ μὲ μεγάλους ἀριθμούς, διότι κατ᾽ αὐτὴν ἀναλύομεν τοὺς μεγάλους ἀριθμοὺς εἰς μικροτέρους καὶ στρογγυλωτέρους, ἐπάνω εἰς τοὺς ὁποίους γίνονται εὔκολα αἱ σχετικαὶ ἀριθμητικαὶ πράξεις ἀπὸ μνήμης, οὕτως ὥστε εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν νὰ μὴ παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη νὰ ἐκτελοῦνται χωριστὰ αἱ πράξεις αὐταὶ καὶ νὰ μὴ ἀπομένῃ τίποτε ἄλλο δι᾽ αὐτὴν ἀπὸ τὴν γραφὴν τῶν ἐξαγομένων τῶν πράξεων.

5. Ἔχει μεγαλυτέραν εἰδολογικὴν ἀξίαν ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας μεθόδους, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν διότι ἕνεκα τῶν ἀναλύσεων, τὰς ὁποίας ἀπαιτεῖ καὶ κατὰ τὰς ὁποίας λαμβάνεται ὑπ᾽ ὄψιν ἡ φύσις τῶν

σχετικῶν ἀριθμῶν, συντελεῖ ὅσον καμία ἄλλη τόσον εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν καὶ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς δεξιότητος εἰς τὴν χρῆσίν των, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται σαφέστατα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς εὐκολίας, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς αὐτήν, ὅσον καὶ εἰς τὴν καλλιέργειαν τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι ἐπιτρέπει μεγάλην ἐλευθερίαν ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων, ἐλευθερίαν, τὴν ὁποίαν ὁ ἀριθμῶν χρησιμοποιεῖ πρὸς εὕρεσιν τῆς σκοπιμωτέρας ἀναλύσεως. Σχετικὰ μὲ τὸ τελευταῖον αὐτὸ σημεῖον πρέπει νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι, ἐνῷ ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἔχει ὡς κανόνα τὴν εἰς τὴν μονάδα ἀναγωγήν, ἡ ἀναλυτική, μολονότι περιέχει καὶ τὴν ἀναγωγὴν αὐτήν, δὲν τὴν ἔχει ὡς κανόνα, καθὼς οὔτε καὶ καμίαν ἄλλην ἀναγωγήν, ἀλλὰ ἐκλέγει ἑκάστοτε ἐκείνας τὰς ἀναγωγάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι σκοπιμώτεραι διὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

6. Μολονότι ἐν γένει δὲν εἶναι συντομώτερη καὶ ταχύτερη ἀπὸ τὰς ἄλλας μεθόδους, ἐν τούτοις εἰς μερικὰς περιπτώσεις ἐφαρμόζεται συντομώτερα καὶ ταχύτερα ἀπὸ αὐτάς.

Ἀπέναντι τώρα εἰς τὰ ἀνωτέρω πλεονεκτήματα ἔχει τὸ σπουδαῖον μειονέκτημα, ὅτι δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, εἰς πολλὰς δὲ ἡ ἐφαρμογή της, ὡς ἀπαιτοῦσα πολλὰς καὶ δυσκόλους ἀναλύσεις, εἶναι ὑπερβολικὰ περίπλοκη. Εἰς τὰς περιπτώσεις μάλιστα αὐτὰς ἔχει συνήθως ἀνάγκην τῆς μονάδος ὡς προσθετέου ἢ ἀφαιρετέου, δι' αὐτὸ δὲ δὲν ὑπάρχει λόγος εἰς αὐτὰς νὰ μὴ γίνεται ἀπ' εὐθείας χρῆσις τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, μὲ τὴν ὁποίαν ἀποφεύγονται ὅλαι αἱ ἄλλαι ἀριθμητ. ἐργασίαι, τῶν ὁποίων τὴν ἐκτέλεσιν ἐπιβάλλει ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα συνάγεται σαφέστατα, ὅτι ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος ἔχει μεγάλην μεθοδικὴν ἀξίαν, δι' αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ γίνεται χρῆσις της εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον καὶ κατὰ τὴν ἀπὸ μνήμης καὶ κατὰ τὴν γραπτὴν λύσιν ἐκείνων τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὴ καὶ σκόπιμη ἡ ἐφαρμογή της.

Εἰς τὸν πρακτικὸν βίον γίνεται ἔκπαλαι χρῆσίς της, διότι, ὅπως εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, εἶναι τόσον παλαιά, ὅσον καὶ

ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Ἡ ὀνομασία της ὡς Ἰταλικῆς προέρχεται ἀπὸ τὸ ὅτι οἱ Ἰταλοὶ λογιστικοὶ τοῦ Μεσαίωνος τὴν ἐκαλλιέργησαν καὶ τὴν ἔκαμαν χρήσιμην καὶ διὰ σπανιωτέρας περιπτώσεις. Εἰς τὸ σχολεῖον παρουσιάζεται χρησιμοποιουμένη κατὰ τὸν 16 αἰῶνα, κυριαρχεῖ δὲ καθ' ὅλον τὸν 17. Χάνεται ὅμως ὅλως διόλου ἀπὸ αὐτὸ μὲ τὴν ἐμφάνισιν τῶν Πεσταλοτσιανῶν, οἱ ὁποῖοι ἀποβλέποντες εἰς τὴν εἰδολογικὴν μόρφωσιν τῶν μαθητῶν καὶ ὄχι εἰς τὴν προπαρασκευήν των διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου ἐχρησιμοποιοῦσαν, καθὼς ἠξεύρομεν, τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα καὶ τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως, μὲ τὰς ὁποίας ἐφρόνουν, ὅτι ἀναπτύσσονται μὲ τὸν καλύτερον τρόπον αἱ νοητικαὶ δυνάμεις τῶν μαθητῶν. Ἄλλωστε καὶ ὅσοι ἀπὸ αὐτοὺς ἄρχισαν νὰ ἀναγνωρίζουν τὰ δικαιώματα τοῦ πρακτικοῦ σκοποῦ τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας καὶ τὴν δυσχρηστίαν τῆς κατ' ἀναλογίαν διατάξεως, ἐστράφησαν εἰς τὴν τότε ἀναφαινομένην μέθοδον τῆς κλασματικῆς διατάξεως. Δι' αὐτὸ δὲν εὑρίσκομεν οὔτε μίαν λέξιν διὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον εἰς τὰ ἔργα τῶν *Stern*, *Diesterweg* καὶ *Heuser* καὶ *Stubba*. Ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος τὴν ἐπαναφέρει εἰς τὴν ζωήν, εἶναι ὁ *Hentschel*. Ἔκτοτε ἀρχίζει ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος νὰ ἐπανακτᾷ ὀλίγον κατ' ὀλίγον τὰ δικαιώματά της. Οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς νεωτέρους Μεθοδικοὺς φρονοῦν, ὅτι πρέπει νὰ καλλιεργῆται εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον ἐκ παραλλήλου μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα καὶ τῆς κλασματικῆς διατάξεως. Ἐν τούτοις δὲν λείπουν καὶ Μεθοδικοὶ ὑποστηρίζοντες, ὅτι πρέπει νὰ καλλιεργῆται ἀποκλειστικὰ εἰς τὸ σχολεῖον αὐτό, εἰς τοὺς ὁποίους ἀνήκουν, καθὼς εἴδαμεν (ἴδ. ἀν. σελ. 257) οἱ *Griesmann* καὶ *Bergmann*, ἀκόμη δὲ ὁ *Tschirsch* καὶ ὁ *Sachse* (Die welsche Praktik, Leipzig, 1882). Ὁ Tschirsch ἀπαιτεῖ νὰ λύωνται εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν μὲ τὴν μέθοδον αὐτήν. Ὁ δὲ Sachse προχωρῶν παρατηρεῖ, ὅτι, χωρὶς νὰ ἔχῃ προφητικὰ δῶρα, προβλέπει προσεχέστατον τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ ἀρίθμησις τόσον εἰς τὰ κατώτερα, ὅσον καὶ εἰς τὰ ἀνώτερα σχολεῖα θὰ γίνεται μόνον μὲ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον. Ἐξ ἀντιθέτου ὑπάρχουν ἄλλοι θεωροῦντες περιττὴν τὴν διδασκαλίαν της. Ἔτσι ὁ *Olbricht* (Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen - Unterricht τοῦ Hoffmann, 1890, σελ. 497) ὑποστηρίζει, ὅτι μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν δεκαδικῶν νομισμάτων, μέτρων καὶ σταθμῶν ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος ἔχει πλέον ἱστορικὴν μόνον ἀξίαν.

Μέσα εἰς τὴν ποικιλίαν αὐτὴν τῶν γνωμῶν, ἡ ὁποία κρατεῖ ὡς πρὸς τὴν μέθοδον, ἡ ὁποία πρέπει νὰ χρησιμοποιῆται διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἰδίως δὲ διὰ τὴν γραπτήν, δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἀνεύρωμεν τὴν ὀρθήν, ἂν ἐνθυμηθῶμεν τὰ συμπεράσματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐφθάσαμεν μετὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς φύσεως καὶ τῶν πλεονεκτημάτων καὶ μειονεκτημάτων τῆς καθεμιᾶς. Εἶναι προφανές, ὅτι ὡς κανονικὸς τρόπος τῆς ἀπὸ μνήμης λύσεως τῶν προκειμένων προβλημάτων πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται ὁ γινόμενος μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἐκ παραλλήλου δὲ μὲ αὐτὸν ὡς εὐκολία του πρέπει νὰ διδάσκεται ὁ τρόπος τῆς λύσεως μὲ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον, ὁ ὁποῖος σκόπιμον εἶναι νὰ χρησιμοποιῆται κυρίως εἰς τὰ προβλήματα τὰ ἔχοντα σχετικῶς μεγάλους ἀριθμούς. Ὡς πρὸς τὴν ἔγγραφον τώρα λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν εἶναι βέβαια ἀληθές, ὅτι εἰς τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον, ὁ ὁποῖος, καθὼς εἶναι γνωστόν, ἀποφεύγει κάθε εἶδος τεχνητῆς καὶ ἐπάνω εἰς κανόνας στηριζομένης διατάξεως, γίνεται καὶ αὐτὴ μὲ τὰς ἀνωτέρω μνημονευθείσας μεθόδους καὶ ὄχι μὲ τὴν μέθοδον τῆς κλασματικῆς διατάξεως. Ἄλλωστε εἰς τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον πρόκειται κυρίως περὶ προβλημάτων μὲ σχετικῶς μικροὺς ἀριθμούς, διὰ τὰ ὁποῖα ἐπαρκοῦν αἱ δύο ἐκεῖναι μέθοδοι. Τὸ σχολεῖον ὅμως δὲν ἠμπορεῖ νὰ παραδεχθῇ ὡς κανονικὸν τρόπον τῆς ἐγγράφου λύσεως τῶν προκειμένων προβλημάτων οὔτε τὸν γινόμενον μὲ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον οὔτε τὸν γινόμενον μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, διότι κανεὶς ἀπὸ αὐτοὺς δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς **ὅλα** τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Δι' αὐτὸ ὀφείλει νὰ προτιμήσῃ ὡς κανονικὸν τρόπον τῆς ἐγγράφου λύσεως τῶν προβλημάτων αὐτῶν τὸν γινόμενον μὲ τὴν κλασματικὴν διάταξιν, ὁ ὁποῖος καὶ γενικὴν ἐφαρμογὴν ἔχει καὶ δὲν ὑστερεῖ εἰς πλεονεκτήματα ἀπὸ τοὺς δύο ἄλλους τρόπους. Ἐν τούτοις ἀποβλέπον καὶ εἰς τὴν πρακτικὴν καὶ εἰς τὴν εἰδολογικὴν ἀξίαν καὶ τῶν τρόπων αὐτῶν πρέπει νὰ τοὺς διδάσκῃ ἐκ παραλλήλου, ὡρισμένως δὲ ὡς εὐκολίας τοῦ κανονικοῦ τρόπου].

XIV. Ο ΚΑΝΟΝΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ Η ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΥΚΟΛΙΩΝ.

Διὰ κάθε ἀριθμητικὴν πρᾶξιν εἰς κάθε εἶδος ἀριθμῶν πρέπει οἱ μαθηταὶ νὰ μανθάνουν καλὰ ἕνα ἐντελῶς ὡρισμένον τρόπον ἐκτελέσεως. [Ὁ τρόπος αὐτὸς θὰ ἐφαρμόζεται εἰς ὅλα τὰ προβλήματα, ὅσα εἰς τὸ εἶδος αὐτὸ τῶν ἀριθμῶν λύονται μὲ τὴν πρᾶξιν αὐτήν, ὁποιοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ κάθε προβλήματος. Καὶ ἂν ἀκόμη εἰς κάποιαν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν ἠμπορῇ ὁ διδάσκαλος νὰ ἐφαρμόσῃ πολλοὺς τρόπους ἐκτελέσεως, ἐξ ἴσου εὐκόλους διὰ τοὺς μαθητάς, ἐν τούτοις κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν μαθητῶν εἰς τὴν πρᾶξιν αὐτὴν δὲν πρέπει νὰ τοὺς προκαλῇ νὰ εὑρίσκουν καὶ νὰ ἐφαρμόζουν ἀμέσως ὅλους αὐτοὺς τοὺς τρόπους, ἀλλὰ ὀφείλει νὰ ἐκλέγῃ **ἕνα** ἀπὸ αὐτοὺς καὶ νὰ φροντίζῃ, ὅπως οἱ μαθηταὶ μάθουν κατ' ἀρχὰς τέλεια μόνον τὸν τρόπον αὐτόν. (Ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 12)]. Βέβαια ὁ ἕνας αὐτὸς τρόπος δὲν θὰ εἶναι πάντοτε ἡ συντομώτατη, θὰ εἶναι ὅμως πάντοτε μία ἀσφαλὴς καὶ κατάλληλη ὁδὸς πρὸς λύσιν τῶν σχετικῶν προβλημάτων. [Φυσικὰ δὲ εἶναι προτιμότερον νὰ γνωρίζουν καὶ νὰ ἐφαρμόζουν οἱ μαθηταὶ μὲ ἀσφάλειαν ἕνα τρόπον ἐκτελέσεως παρὰ νὰ παρουσιάζουν ἀβεβαιότητα εἰς τὴν ἀρίθμησιν, ἡ ὁποία θὰ προκαλῆται ἀκριβῶς ἀπὸ τὴν ταλάντευσιν μεταξὺ πολλῶν καὶ διαφόρων τρόπων (Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 13)]. Ὁ ἕνας αὐτὸς τρόπος τῆς ἐκτελέσεως τῆς κάθε πράξεως καὶ τῆς λύσεως τῶν σχετικῶν προβλημάτων πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰς κατόπιν τάξεις. Θὰ ἀσκῆται δὲ καὶ θὰ ἐπαναλαμβάνεται τόσον, ὥστε καὶ οἱ ἀσθενέστατοι μαθηταὶ τῆς τάξεως νὰ γίνωνται τέλειοι κάτοχοί του. Φυσικὰ δὲ θὰ καθορίζεται ἕνας κανονικὸς τρόπος διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης καὶ ἕνας διὰ τὴν γραπτὴν ἐκτέλεσιν κάθε ἀριθμητικῆς πράξεως.

Εἴπαμεν ἀμέσως ἀνωτέρω, ὅτι ὁ κανονικὸς τρόπος δὲν εἶναι συνήθως καὶ ὁ συντομώτατος. Ἀλλά, ὅπως ἠξεύρομεν, τὸ νὰ ἀριθμῇ κανεὶς γρήγορα, ἔχει μεγάλην ἀξίαν. Φυσικὰ κατὰ πρῶτον λόγον θὰ ζητοῦμεν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς νὰ ἀριθμοῦν ὀρθά. Κατὰ δεύτερον λόγον θὰ ἀπαιτοῦμεν ἀπὸ αὐτοὺς νὰ ἔχουν αὐτοτέλειαν εἰς τὴν ἀρίθμησιν· ὁ ἀριθμῶν πρέπει νὰ κατανοῇ τέλεια τὸ πρόβλημα καὶ νὰ ἠμπορῇ νὰ τὸ λύῃ χωρὶς τὴν βοήθειαν ἄλλων. Μόλις κατὰ τρίτον λόγον ζητοῦμεν ἀπὸ τοὺς μαθητάς μας ταχύτητα εἰς τὴν ἀρίθμησιν. Μὲ αὐτὸ ὅμως δὲν θέλομεν νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἀποδίδομεν εἰς τὴν ταχεῖαν ἀρίθμησιν μικρὰν ἢ δὲν ἀποδίδομεν εἰς αὐτὴν καμίαν ἀξίαν. Ἡ ταχεῖα ἀρίθμησις ἔχει μεγάλην σπουδαιότητα διὰ τὸν πρακτικὸν βίον, εἰς τὸν ὁποῖον συνήθως δὲν ζητεῖται τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ γρήγορη λύσις ἁπλῶν προβλημάτων. Δι' αὐτὸ ἀπαιτοῦμεν καὶ ἀπὸ τοὺς μαθητάς μας νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀριθμοῦν μὲν ὀρθὰ καὶ μὲ αὐτοτέλειαν, ἀλλὰ μαζὶ καὶ γρήγορα. Εἰς πλείστας περιπτώσεις πρέπει ἡ ἀπόκρισις τοῦ μαθητοῦ νὰ ἀκολουθῇ ἀμέσως τὴν θέσιν τοῦ προβλήματος ἀπὸ τὸν διδάσκαλον. Μερικοὶ διδάσκαλοι ἀπαιτοῦν πράγματι ἐπίμονα ἀπὸ τοὺς μαθητάς των νὰ λογαριάζουν γρήγορα, ἀλλὰ δὲν ὑποδεικνύουν εἰς αὐτοὺς καὶ τὰ μέσα, μὲ τὰ ὁποῖα θὰ ἠμποροῦσαν νὰ τὸ κατορθώσουν αὐτό. Διὰ τὸν λόγον δὲ αὐτὸν ἀκριβῶς δὲν εἶναι ἀσύνηθες τὸ φαινόμενον, νὰ ὑψώνουν καὶ οἱ ἀδύνατοι μαθηταὶ μιᾶς τάξεως τὸ δάκτυλόν των, μολονότι δὲν ἔχουν λύσει τὸ προτεθὲν πρόβλημα. Οἱ μαθηταὶ αὐτοὶ παρατηροῦντες, ὅτι ὑψώνουν τὸ δάκτυλον οἱ γρήγοροι εἰς τὴν ἀρίθμησιν συμμαθηταί των, φιλοτιμοῦνται νὰ μὴ φανοῦν κατώτεροί των, χωρὶς ὅμως καὶ νὰ ἠμποροῦν νὰ κάμουν, ὅ,τι ἐκεῖνοι.

Ἐὰν ὁ διδάσκαλος θέλῃ νὰ κατορθώσῃ, ὥστε οἱ μαθηταί του νὰ ἀριθμοῦν γρήγορα, πρέπει νὰ τοὺς καταστήσῃ προσεκτικοὺς εἰς τὸ ὅτι εἶναι δυναταὶ κάποτε μερικαὶ παρεκκλίσεις ἀπὸ τὸν κανονικὸν τρόπον τῆς λύσεως, αἱ ὁποῖαι διευκολύνουν πολὺ τὴν ἀρίθμησιν. Αἱ διευκολύνσεις ἤ, ὅπως συνήθως λέγονται, ***αἱ εὐκολίαι*** αὐταὶ τῆς ἀριθμήσεως δὲν συντελοῦν μόνον εἰς τὸ νὰ γίνεται ἡ ἀρίθμησις γρηγορώτερα καὶ εὐκολώτερα, [ἀλλὰ καὶ εἰς τὸ νὰ ἀντιλαμβάνωνται οἱ μαθηταὶ πολυμερέστερα τὰς ἀριθμητικὰς σχέσεις καὶ νὰ ἐξυψώνεται μαζὶ καὶ ἡ ἀριθμητική των δεξιότης

καὶ δύναμις. (Ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν.)]. Ἐπειδὴ τώρα αἱ εὐκολίαι εἶναι, καθὼς εἴπαμεν, παρεκκλίσεις ἀπὸ τὸν κανονικὸν τρόπον τῆς λύσεως, πρέπει φυσικὰ νὰ ἐφαρμόζωνται, μόνον ἀφοῦ οἱ μαθηταὶ γίνουν τέλειοι κάτοχοι τοῦ τρόπου ἐκείνου. Καλὸν δὲ εἶναι νὰ μὴ τὰς ἐπιβάλλῃ ὁ διδάσκαλος εἰς τοὺς μαθητάς, ἀλλὰ νὰ τοὺς προκαλῇ νὰ τὰς εὑρίσκουν μόνοι, [διὰ νὰ ἀναπτύσσεται ἔτσι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ μεταξύ των ἅμιλλα, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ αὐτενέργεια καὶ ἡ εὑρετικὴ δεξιότης τοῦ καθενός]. Ἐννοεῖται δὲ φυσικά, ὅτι ὁ διδάσκαλος ἠμπορεῖ νὰ δίδῃ εἰς τοὺς μαθητὰς κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν εὐκολιῶν σχετικὰς νύξεις. Ὁ *Hartmann* εἰσάγει τοὺς μαθητὰς εἰς συστηματικὴν ἐφαρμογὴν τῶν εὐκολιῶν μόνον ἀπὸ τὸ 5ον σχολικὸν ἔτος. Νομίζομεν, ὅτι ἡ χρησιμοποίησίς των ἠμπορεῖ νὰ ἀρχίσῃ καὶ πολὺ ἐνωρίτερα, ἀπὸ τὰς κατωτέρας ἀκόμη τάξεις, [ἀρκεῖ μόνον νὰ μὴ ἐπιβάλλεται εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν τάξεων αὐτῶν εὕρεσις εὐκολιῶν, ὑπερβαίνουσα τὰς νοητικάς των δυνάμεις.

Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι ἐν γένει πρέπει νὰ χρησιμοποιοῦνται εὐκολίαι, ἀμέσως προσιταὶ εἰς τὴν ἀντίληψιν τῶν μαθητῶν. Τέτοιαι δὲ εἶναι π.χ. ἰδίως ἡ μεγέθυνσις ἑνὸς ἀπὸ τοὺς ὅρους τῆς πράξεως, ἡ ὁποία πρόκειται νὰ ἐκτελεσθῇ, εἰς ἕνα ἀριθμὸν διευκολύνοντα τὴν ἐκτέλεσίν της ἢ ἡ ἀνάλυσις τοῦ ὅρου εἰς δύο παράγοντας. Καὶ μὲ τὰς δύο αὐτὰς εὐκολίας ἁπλοποιεῖται σημαντικὰ ἡ ἀρίθμησις, μολονότι αὐξάνουν αἱ πράξεις.

Παραθέτομεν κατωτέρω (ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σελ. 12—14) μερικὰ παραδείγματα εὐκολιῶν διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν.

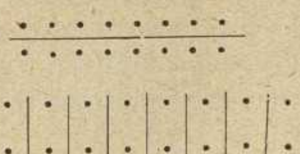
Εἰς ***τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων***, ἐφόσον ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς προσθετέους προσεγγίζει εἰς ἕνα στρογγύλον ἀριθμόν, ἤτοι ἀριθμὸν καθαρῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων κ. τ. λ., ἠμποροῦμεν ἀντὶ τοῦ προσθετέου αὐτοῦ νὰ θέσωμεν τὸν στρογγύλον ἀριθμόν, νὰ ἐλαττώσωμεν δὲ κατόπιν εἴτε τὸν ἄλλον προσθετέον εἴτε τὸ ἄθροισμα κατὰ τὸν ἀριθμόν, κατὰ τὸν ὁποῖον αὐξήσαμεν τὸν προσθετέον ἐκεῖνον· π. χ. $46+29=$ (ὄχι : $46+20=66$, $66+9=75$, ἀλλὰ) $46+30-1$ ἢ $45+30$, $198+144=200+144=344, -2=342$ ἢ $200+142=342$.—Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι περισσότεροι ἀπὸ δύο, ἠμποροῦμεν νὰ τοὺς βάλωμεν εἰς ἄλλην σειράν, διευκολύνουσαν τὴν πρόσθεσιν· π.χ. $80+77+20=80+20+77$ κ.τ.λ. Εἰς τὴν ἀρίθμησιν ἐντὸς τῆς σειρᾶς 1—10 ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ εἰς δύο μόνον προσθετέους, ὅταν ὁ δεύτερος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν πρῶτον· π.χ. $1+8=8+1$ κ.τ.λ.

Εἰς ***τὴν ἀφαίρεσιν*** τῶν ἀκεραίων, ἐφόσον μὲν ὁ ἀφαιρετέος προσεγγίζει εἰς ἕνα στρογγύλον ἀριθμόν, ἠμποροῦμεν ἀντὶ τοῦ ἀφαιρετέου νὰ θέτωμεν τὸν στρογγύλον ἀριθμόν, νὰ προσθέτωμεν δὲ κατόπιν εἰς τὸ ὑπόλοιπον τὸν ἀριθμόν, κατὰ τὸν ὁποῖον αὐξήσαμεν τὸν ἀφαιρετέον (π.χ. $258-97=258-100=158$, $+3=161$), ἐφόσον δὲ ὁ μειωτέος προσεγγίζει εἰς στρογγύλον ἀριθμόν, θέτομεν ἀντὶ τοῦ μειωτέου τὸν στρογγύλον ἀριθμόν, ἀφαιροῦμεν δὲ κατόπιν ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τὸν ἀριθμόν, κατὰ τὸν ὁποῖον αὐξήσαμεν τὸν μειωτέον (π. χ. $498-35=500-35=465, -2=463$).

Εἰς ***τὸν πολλαπλασιασμὸν*** τῶν ἀκεραίων ἠμποροῦμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς ἑξῆς εὐκολίας: 1) Ἠμποροῦμεν νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων· π. χ. $2\times8=8\times2$, $97\times15=$ (ὄχι: $90\times15+7\times15$, ἀλλὰ) $15\times97=10\times97+5\times97$ κ. τ. λ. Τὸ ὅτι μὲ τὴν μεταβολὴν τῆς τάξεως τῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται τὸ γινόμενον, ἠμπορεῖ νὰ διασαφηθῇ κατ' ἀρχὰς καὶ ***ἐποπτικὰ*** εἰς τοὺς μαθητὰς ὡς ἑξῆς:

α)

β)



Καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα εἶναι ἀπὸ 16 στιγμαὶ (σφαῖραι). Εἰς τὸ πρῶτον παίρνομεν 2 φορὰς ἀπὸ 8. Εἰς τὸ δεύτερον παίρνομεν 8 φορὰς ἀπὸ 2. Ἐπομένως $2\times8=8\times2$. 2) Ἠμποροῦμεν νὰ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τοὺς παράγοντας τὸν στρογγύλον ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον προσεγγίζει, νὰ ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ **τὸ γινόμενον κατόπιν τὸ γινόμενον τοῦ ἄλλου παράγοντος μὲ τὸν ἀριθμόν, κατὰ τὸν ὁποῖον αὐξήσαμεν τὸν παράγοντα ἐκεῖνον**· π. χ. $36\times99=36\times100-36\times1$, $13\times49=13\times50-13\times1$. 3) Ἠμποροῦμεν νὰ ἀναλύσωμεν **τὸν ἕνα ἀπὸ** τοὺς παράγοντας εἰς

δύο παράγοντάς του π.χ. $42\times35=42\times5\times7=210\times7$, $58\times60=58\times6\times10$ κ.τ.λ. 4) Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν μὲ τὸν 11, τὸν πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν 10 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν αὐτόν· π. χ. $36\times11=36\times10+36$. 5) Ἐφόσον οἱ μαθηταὶ γνωρίζουν τὰ κλάσματα, ἠμποροῦν νὰ θεωροῦν τοὺς ἀριθμοὺς 25, 50, 75 ὡς κλάσματα τοῦ 100. Ὁ πολλαπλασιασμὸς π. χ. 47×50 γίνεται ὡς ἑξῆς: $50=\frac{1}{2}$ τοῦ 100. $47\times\frac{1}{2}$ τοῦ $100=\frac{47}{2}$ τοῦ $100=23\frac{1}{2}$ τοῦ $100=2350$· ἢ ὡς ἑξῆς: Τὸ $50=\frac{100}{2}$. $47\times\frac{100}{2}=47\times100:2=2350$. Ὁ πολλαπλασιασμὸς 29×25 γίνεται ὡς ἑξῆς: $25=\frac{1}{4}$ τοῦ 100. $29\times\frac{1}{4}$ τοῦ $100=\frac{29}{4}$ ἢ $7\frac{1}{4}$ τοῦ $100=725$.—Παρόμοιαι εὐκολίαι γίνονται εἰς τοὺς πολλαπλασιασμοὺς $\times125$, 150, 175, 225, 250 κ.τ.λ., καθὼς καὶ εἰς τοὺς πολλαπλασιασμοὺς μὲ τοὺς μικτοὺς $33\frac{1}{3}$, $66\frac{2}{3}$, $12\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{9}$, $16\frac{2}{3}$ κτλ.

Εἰς ***τὴν διαίρεσιν*** τῶν ἀκεραίων ἠμποροῦμεν νὰ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ διαιρετέου τὸν στρογγύλον ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον προσεγγίζει, νὰ ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ τὸ πηλίκον κατόπιν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, κατὰ τὸν ὁποῖον αὐξήσαμεν τὸν διαιρετέον, μὲ τὸν διαιρέτην (π.χ. $496:4=500:4=125$, $-4:4=1$, ἤτοι 124) ἢ νὰ ἀναλύσωμεν τὸν διαιρέτην εἰς δύο παράγοντάς του (π.χ. $630:30=630:10:3=63:3$) κ.τ.λ.

Παρόμοιαι εὐκολίαι ἠμποροῦν νὰ γίνουν καὶ εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν συμμιγῶν, τῶν κλασματικῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, καθὼς καὶ εἰς τὰ διάφορα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης π. χ. ἀρίθμησιν ***τῶν συμμιγῶν*** ἠμποροῦν νὰ γίνουν αἱ ἑξῆς εὐκολίαι: 1) 7 δωδεκ. 8 κομμ. $+2$ δωδ. 11 κομμ. $=7$ δωδ. 8 κομμ. $+3$ δωδ. -1 κομμ., 5 δρ. 65 λεπ. $+9$ δρ. 95 λ. $=5$ δρ. 65 λ. $+10$ δρ. -5 λ. 2) 500 δρ. -59 δρ. 75 λ. $=500$ δρ. -60 δρ. $+25$ λ. 3) 25 λ. $\times16=\frac{1}{4}$ δρ. $\times16=\frac{16}{4}$ δρ. $=4$ δρ., 1 πήχ. 7 ῥούπ. $\times5=2$ πήχ. $\times5-1$ ῥ. $\times5$, 1 δρ. 95 λ. $\times5=2$ δρ $\times5-5$ λ. $\times5$. 4) 23 δρ. 20 λ. $:4=24$ δρ. $:4-80$ λ. $:4$ κ.τ.λ.

Εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης λύσιν τῶν προβλημάτων, ***εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος***, ἂν κανονικὸς τρόπος τῆς λύσεως εἶναι ὁ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ὡς εὐκολίαι ἠμποροῦν νὰ διδαχθοῦν αἱ διάφοροι λύσεις, αἱ γινόμεναι διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναλύσεως (τῆς Ἰταλικῆς), καθὼς καὶ ἡ λύσις, ἡ γινομένη μὲ τὴν ἐκκίνησιν ἀπὸ τὸ 1 %. Ἔτσι π. χ. τὸ πρόβλημα «πόσον τόκον φέρουν 40 δρ. πρὸς 4 % εἰς 2 ἔτη ;» ἠμπορεῖ νὰ λυθῇ καὶ μὲ τοὺς ἑξῆς τρόπους ἐκτὸς ἀπὸ τὸν κανονικόν :

1.	100 δρ.	φέρουν εἰς 1 ἔτος	4 δρ.
	20 »	» » » »	0,80 »
	40 »	» » » »	1,60 »
	» »	» » 2 ἔτη	3,20 »
2.	100 δρ.	φέρουν εἰς 1 ἔτος	4 δρ.
	10 »	» » » »	0,40 δρ.
	40 »	» » » »	1,60 »
	» »	» » 2 ἔτη	3,20 »
3.	100 δρ.	φέρουν εἰς 1 ἔτος	4 δρ.
	50 »	» » » »	2 »
	10 »	» » » »	0,40 »
	40 »	» » » »	1,60 »
	» »	» » 2 ἔτη	3,20 »
4.	100 δρ.	φέρουν εἰς 1 ἔτος	4 δρ.
	400 »	» » » »	16 »
	40 »	» » » »	1,60 »
	» »	» » 2 ἔτη	3,20 »
5.	1% τῶν 40 δρ.	εἰς 1 ἔτος	= 0,40 δρ.
	4% » »	» » » »	= 1,60 »
	» » »	» » 2 ἔτη	= 3,20 »

6. 40 δρ. πρὸς 4% εἰς 2 ἔτη φέρουν τόσον τόκον, ὅσον 40 δρ. πρὸς 8% εἰς 1 ἔτος· τώρα :
1% τῶν 40 δρ. εἰς 1 ἔτος = 0,40 δρ.
8% » » » » » » = 3,20 » κ.τ.λ.

Ἡ ἀπὸ μνήμης λύσις τῶν προβλημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖ-

ται ὁ τόκος, διευκολύνεται ἐπίσης πολύ, ἂν στηριχθῇ εἰς τὴν γνῶσιν, ὅτι μὲ 5 % ὁ ἐτήσιος τόκος εἶναι τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ κεφαλαίου, μὲ 4 % εἶναι τὸ $\frac{1}{25}$ τοῦ κεφαλαίου, μὲ $3\frac{1}{3}$ % εἶναι τὸ $\frac{1}{30}$ τοῦ κεφαλαίου, μὲ 2 % εἶναι τὸ $\frac{1}{50}$ τοῦ κεφαλαίου, μὲ 10 % εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ κεφαλαίου κ.τ.λ.].

XV. Η ΠΡΟΦΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΙΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΙΝ ΣΚΕΨΕΩΝ.

Αἱ Πρωσσικαὶ «Γενικαὶ Διατάξεις» καθορίζουν πολὺ ὀρθὰ τὰ ἀκόλουθα : «Ἡ ἀρίθμησις πρέπει νὰ καλλιεργῆται εἰς ὅλας τὰς βαθμίδας ὡς ἄσκησις εἰς τὴν σαφῆ νόησιν καὶ εἰς τὴν ὀρθὴν ἔκφρασιν». Διὰ νὰ ἠμπορέσῃ ὅμως νὰ ἐκπληρωθῇ τὸ δεύτερον ἀπὸ τὰ δύο ἀνωτέρω ἔργα τῆς ἀριθμήσεως, ἀπαραίτητον εἶναι βέβαια νὰ καλοῦνται οἱ μαθηταὶ νὰ διατυπώνουν καὶ προφορικὰ τὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας κάμνουν, ὅταν ἀριθμοῦν. Εὐνόητον δὲ εἶναι, ὅτι οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἐθισθοῦν εἰς τὸ νὰ διατυπώνουν προφορικὰ τὰς σκέψεις των ἔτσι, ὥστε νὰ παριστάνουν μὲν ἐξ ὁλοκλήρου τὰ πράγματα, ἀλλὰ μὲ ὅλην τὴν δυνατὴν λιτότητα καὶ συντομίαν. Εἰς τὴν λογικὴν φύσιν τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας ἁρμόζει καὶ ἔκφρασις λογική, ἤτοι σαφὴς μαζὶ καὶ λιτή.

1. ΠΡΕΠΕΙ ΟΙ ΜΑΘΗΤΑΙ ΝΑ ΑΠΟΚΡΙΝΩΝΤΑΙ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΟΥΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ;

Εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς Ἀριθμητικῆς δὲν πρέπει νὰ συσκοτίζεται ἡ ἀρίθμησις ἀπὸ τοὺς πολλοὺς λόγους. Δι' αὐτὸ εἰς τὴν διδασκαλίαν αὐτὴν ἐνδεικνύεται νὰ ἀπαιτοῦμεν συνήθως ἀπὸ τοὺς μαθητὰς ἀποκρίσεις ὄχι πλήρεις, ἀποκρίσεις ἀποτελουμένας ἀπὸ ***μίαν*** μόνον λέξιν, τὴν λέξιν δηλ. τὴν φανερώνουσαν τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀριθμήσεως· π.χ. Διδάσκαλος : 28+53 ! Μαθητής : 81

(καὶ ὄχι: 28+53=81). Μὲ τὸ σύστημα αὐτὸ ἐξοικονομεῖται καὶ ἀρκετὸς χρόνος, ὥστε νὰ ἠμποροῦν νὰ λύωνται περισσότερα προβλήματα εἰς τὴν διδακτικὴν ὥραν.

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἀπαιτοῦμεν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς νὰ ἀποκρίνωνται μὲ ὁλοκλήρους προτάσεις καὶ σειρὰς τέτοιων προτάσεων.

Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ ζητοῦμεν πλήρεις ἀποκρίσεις, ὁσάκις μὲ αὐτὰς ὑποβοηθεῖται ἡ ἐντύπωσις ὡρισμένων ἀριθμητικῶν ὑλῶν, ὁποῖαι π.χ. εἶναι τὰ ἐξαγόμενα τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς τὰς σειρὰς 1–10 καὶ 1—20 καὶ ὁ λεγόμενος Πυθαγόρειος πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Αἱ ὗλαι αὐταὶ πρέπει νὰ ἐντυπωθοῦν τόσον ἀσφαλῶς, ὥστε νὰ ἠμποροῦν εἰς τὸ τέλος οἱ μαθηταὶ νὰ λέγουν τὸ ἐξαγόμενον τῶν σχετικῶν προβλημάτων, χωρὶς νὰ ἀριθμοῦν. Αὐτὸ ὅμως κατορθώνεται εὐκολώτερα, ἂν οἱ μαθηταὶ λέγουν ὅσον τὸ δυνατὸν συχνότερα πρόβλημα μαζὶ καὶ λύσιν. Πρβ. καὶ *Klauke* καὶ *Klein*, Anleitung κ.τ.λ. σ. 32 κ. ἀκ. Οἱ Μεθοδικοὶ αὐτοὶ παρατηροῦν πολὺ ὀρθά, ὅτι αἱ πλήρεις ἀποκρίσεις εἶναι ἀναγκαῖαι καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας πρόκειται νὰ ἐντυπωθοῦν ὗλαι πραγματικοῦ περιεχομένου· (πρβ. Διδάσκαλος: Πόσα ἑκατοστὰ ἔχει ἕνα μέτρον; Μαθητής: τὸ 1 μέτρον ἔχει 100 ἑκ. καὶ ὄχι μόνον: 100 ἑκ.).

Πλήρεις ἀποκρίσεις ἐπίσης πρέπει νὰ ζητοῦμεν ἀπὸ τοὺς μαθητάς, ὁσάκις τοὺς προκαλοῦμεν νὰ παραστήσουν ἢ νὰ ἀναπαραστήσουν προφορικὰ τὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας κάμνουν ἢ ἔκαμαν, διὰ νὰ λύσουν εἴτε ἀπὸ μνήμης εἴτε γραπτῶς ἕνα δοθὲν πρόβλημα. Πῶς ἐννοοῦμεν τὴν προφορικὴν αὐτὴν διατύπωσιν τῶν σκέψεων ἀπὸ τοὺς μαθητὰς τόσον εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης, ὅσον καὶ εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν, πραγματευόμεθα εὐθὺς κατωτέρω.

---

2. Η ΠΡΟΦΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΙΣ ΤΩΝ ΣΚΕΨΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΠΟ ΜΝΗΜΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΙΝ.

Ἐφόσον οἱ μαθηταὶ ὁποιασδήποτε τάξεως ἔχουν εἰσαχθῆ εἰς τὸν τρόπον τῆς ἀπὸ μνήμης ἐκτελέσεως μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως, ἠμπορεῖ ὁ διδάσκαλος νὰ ἀπαιτῇ ἀπὸ αὐτούς, ὅπως διατυ-

πώνουν καὶ προφορικὰ τὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας κάμνουν ἢ ἔκαμαν, διὰ νὰ λύσουν κάθε σχετικὸν μὲ τὴν πρᾶξιν αὐτὴν πρόβλημα. Πρέπει δὲ φυσικὰ ἡ διατύπωσίς των αὐτὴ νὰ εἶναι ὀρθὴ ἀπὸ πραγματικῆς ἀπόψεως καὶ ἀκριβὴς καὶ λιτὴ ἀπὸ γλωσσικῆς, νὰ γίνεται δὲ μὲ ζωηρὰν φωνήν, μὲ εὐκολίαν, χωρὶς ἐπαναλήψεις καὶ χωρὶς διακοπάς, προερχομένας ἀπὸ ἀμηχανίαν. Εὐνόητον δὲ ἐπίσης εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ γίνεται χωρὶς τὴν βοήθειαν τοῦ διδασκάλου. Φυσικὰ δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προκαλῇ ὁ διδάσκαλος τοὺς μαθητὰς νὰ διατυπώνουν τὰς σκέψεις των εἰς κάθε λυόμενον πρόβλημα· ἐν τούτοις θὰ πρέπῃ κάθε μαθητὴς τῆς τάξεως προκαλούμενος ἀπὸ τὸν διδάσκαλον νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ τὸ κάμῃ αὐτό. Διὰ νὰ κατασταθῇ τώρα τὸ πρᾶγμα αὐτὸ δυνατόν, δὲν ἀρκεῖ βέβαια νὰ ἔχουν εἰσαχθῆ οἱ μαθηταί, ὅπως εἴδαμεν πρὸ ὀλίγου, εἰς τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως τῆς νέας πράξεως· χρειάζεται προφανῶς καὶ ἀρκετὴ ἄσκησις. Πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ αὐτὸν πρέπει νὰ καλοῦνται κατ' ἀρχάς, ὅπως διατυπώνουν τὰς σκέψεις των ἐκεῖνοι οἱ μαθηταί, οἱ ὁποῖοι εἶναι δεξιοὶ τόσον εἰς τὴν ἀρίθμησιν, ὅσον καὶ εἰς τὴν ἔκφρασιν, κατόπιν δὲ καὶ οἱ ἄλλοι. Σκόπιμον δὲ εἶναι νὰ καλῇ ὁ διδάσκαλος εἰς τὴν διατύπωσιν ἐκείνους ἰδίως τοὺς μαθητάς, οἱ ὁποῖοι ἔλυσαν τὸ δοθὲν πρόβλημα λανθασμένα. Τὰ σφάλματα φυσικὰ διορθώνονται. Ἡ ἄσκησις ἐξακολουθεῖ, μέχρις ὅτου ἐπιτευχθῇ τὸ ποθούμενον ἀποτέλεσμα.

Παραθέτομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματα μορφῶν διατυπώσεως τῶν σκέψεων, ἀναφερομένων εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης λύσιν προβλημάτων τῶν 4 πράξεων τῶν ἁπλῶν ἀκεραίων καὶ τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, ἐπίσης δὲ καὶ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ τόκου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

[1. ***Προβλήματα ἁπλῶν ἀκεραίων.***

Α. Πρόσθεσις.

1 Πρόβλημα: 4 μῆλ. + 2 μῆλ. = ;

Προφορικὴ διατύπωσις τοῦ τρόπου τῆς λύσεως: 4 μῆλα καὶ 2 ἀκόμη (δηλαδὴ τὸ πέμπτον καὶ ἕκτον) κάμνουν (ἢ ἴσον) 6 μῆλα.

2 Πρόβλημα : 7 + 8 = ;

Διατύπωσις διεξοδική :

7 + 8

Ἀπὸ τὸ 7 ἕως τὸ 10 εἶναι ἀκόμη 3.

Χωρίζω λοιπὸν τὸ 8 εἰς 3 καὶ 5.

7 + 3 = 10

10 + 5 = 15

Λοιπὸν 7 + 8 = 15

Συντομώτεραι διατυπώσεις :

α) 7 + 8

Χωρίζω τὸ 8 εἰς 3 καὶ 5

7 + 3 = 10

10 + 5 = 15

Λοιπὸν 7 + 8 = 15

β) 7 + 8

7 + 3 = 10

10 + 5 = 15

λοιπὸν 7 + 8 = 15 [1]

γ) 7 + 8 = 7, 10, 15.

3 Πρόβλημα : 96 + 8 = ;

Διατύπωσις διεξοδική :

96 + 8

Ἀπὸ τὸ 96 ἕως τὸ 100 εἶναι 4

Χωρίζω λοιπὸν τὸ 8 εἰς 4 + 4

96 + 4 = 100

100 + 4 = 104

λοιπὸν 96 + 8 = 104

Διατύπωσις σύντομη :

96 + 8

96 + 4 = 100

100 + 4 = 104

Λοιπὸν 96 + 8 = 104

4 Πρόβλημα : 70 + 60 = ;

Διατύπωσις διεξοδική :

70 + 60

τὸ 60 = 30 + 30

70 + 30 = 100

100 + 30 = 130

λοιπὸν 70 + 60 = 130

Διατύπωσις σύντομη :

70 + 60

70 + 30 = 100

100 + 30 = 130

λοιπὸν 70 + 60 = 130

Ἄλλαι διατυπώσεις :

70 + 60

Ὅπως 7 + 6 = 13, ἔτσι καὶ ἢ 7 δεκ. + 6 δεκ. = 13

70 + 60 = 130

[1] Ἡ διατύπωσις αὐτὴ καὶ αἱ παρόμοιαι εἶναι κατάλληλαι καὶ διὰ τὴν ἔγγραφον ἐπασχόλησιν τῶν μαθητῶν.

5 Πρόβλημα : 90 + 37 = ;

Διατύπωσις : 90 + 30 = 120

120 + 7 = 127

λοιπὸν 90 + 37 = 127

6 Πρόβλημα : 176 + 50 = ;

Διατύπωσις : 170 + 50 = 220

176 + 50 = 226

7 Πρόβλημα: 176 + 56 = ;

Διατύπωσις : 176 + 50 = 226

226 + 6 = 232

λοιπὸν 176 + 56 = 232

8 Πρόβλημα : 330 + 240 = ;

Διατύπωσις : 330 + 200 = 530

530 + 40 = 570

λοιπὸν 330 + 240 = 570

9 Πρόβλημα: 390 + 240 = ;

Διατύπωσις : 390 + 200 = 590

590 + 40 = 630

Λοιπὸν 390 + 240 = 630

10 Πρόβλημα: 376 + 257 = ;

Διατύπωσις : 376 + 200 = 576

576 + 50 = 626

626 + 7 = 633

Λοιπὸν 376 + 257 = 633

Βα Ἀφαίρεσις (συνήθης).

1 Πρόβλημα : 6 σφαῖρ. — 2 σφαῖρ. = ;

Διατύπωσις διεξοδική : Ἂν ἀπὸ τὰς 6 σφαίρας βγάλωμεν 2 (τὴν ἕκτην καὶ τὴν πέμπτην), μένουν 4 σφαῖραι.

Διατύπωσις σύντομη : 6 σφαῖραι ἔξω 2 μένουν (ἢ ἴσον) 4 σφαῖραι.

2 Πρόβλημα : 13 — 7 = ;

Διατύπωσις διεξοδική :

13 — 7

Τὸ 13 εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ 10 κατὰ 3.

Χωρίζω λοιπὸν τὸ 7 εἰς 3 καὶ 4.

13 — 3 = 10

10 — 4 = 6

Λοιπὸν 13 — 7 = 6

Συντομώτεραι διατυπώσεις :

α) 13 — 7

Χωρίζω τὸ 7 εἰς 3 καὶ 4

13 — 3 = 10

10 — 4 = 6

Λοιπὸν 13 — 7 = 6

β) 13 — 7

13 — 3 = 10

10 — 4 = 6

13 — 7 = 6

γ) 13 — 7 = 13, 10, 6.

3 Πρόβλημα : 83 — 21 = ;

2 Πρόβλημα : 7 + 8 = ;

Διατύπωσις διεξοδική : 7 + 8

Ἀπὸ τὸ 7 ἕως τὸ 10 εἶναι ἀκόμη 3.

Χωρίζω λοιπὸν τὸ 8 εἰς 3 καὶ 5.

7 + 3 = 10

10 + 5 = 15

Λοιπὸν 7 + 8 = 15

Συντομώτεραι διατυπώσεις :

α) 7+8

Χωρίζω τὸ 8 εἰς 3 καὶ 5

7+3=10

10+5=15

Λοιπὸν 7+8=15

β) 7+8

7+3=10

10+5=15

λοιπὸν 7+8=15 [1]

γ) 7+8= 7, 10, 15.

3 Πρόβλημα : 96 + 8 = ;

Διατύπωσις διεξοδική :

96+8

Ἀπὸ τὸ 96 ἕως τὸ 100 εἶναι 4

Χωρίζω λοιπὸν τὸ 8 εἰς 4+4

96+4=100

100+4=104

λοιπὸν 96+8=104

Διατύπωσις σύντομη :

96+8

96+4=100

100+4=104

Λοιπὸν 96+8=104

4 Πρόβλημα : 70 + 60 = ;

Διατύπωσις διεξοδική :

70+60

τὸ 60=30+30

70+30=100

100+30=130

λοιπὸν 70+60=130

Διατύπωσις σύντομη :

70+60

70+30=100

100+30=130

λοιπὸν 70+60=130

Ἄλλαι διατυπώσεις :

70+60

Ὅπως 7+6 = 13, ἔτσι καὶ ἢ 7 δεκ.+6 δεκ.=130

70+60=130

[1] Ἡ διατύπωσις αὐτὴ καὶ αἱ παρόμοιαι εἶναι κατάλληλαι καὶ διὰ τὴν ἔγγραφον ἐπασχόλησιν τῶν μαθητῶν.

5 Πρόβλημα : 90+37=;

Διατύπωσις : 90+30=120

120+ 7=127

λοιπὸν 90+37=127

6 Πρόβλημα : 176+50=;

Διατύπωσις : 170+50=220

176+50=226

7 Πρόβλημα: 176+56=;

Διατύπωσις : 176+50=226

226+ 6=232

λοιπὸν 176+56=232

8 Πρόβλημα : 330+240=;

Διατύπωσις : 330+200=530

530+ 40=570

λοιπὸν 330+240=570

9 Πρόβλημα: 390+240=;

Διατύπωσις : 390+200=590

590+ 40=630

Λοιπὸν 390+240=630

10 Πρόβλημα: 376+257=;

Διατύπωσις : 376+200=576

576+ 50=626

626+ 7=633

Λοιπὸν 376+257=633

Βα Ἀφαίρεσις (συνήθης).

1 Πρόβλημα : 6 σφαῖρ.—2 σφαῖρ.=;

Διατύπωσις διεξοδική : Ἂν ἀπὸ τὰς 6 σφαίρας βγάλωμεν 2 (τὴν ἕκτην καὶ τὴν πέμπτην), μένουν 4 σφαῖραι.

Διατύπωσις σύντομη : 6 σφαῖραι ἔξω 2 μένουν (ἢ ἴσον) 4 σφαῖραι.

2 Πρόβλημα : 13—7=;

Διατύπωσις διεξοδική :

13—7

Τὸ 13 εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ 10 κατὰ 3.

Χωρίζω λοιπὸν τὸ 7 εἰς 3 καὶ 4.

13—3 =10

10—4 = 6

Λοιπὸν 13—7 = 6

Συντομώτεραι διατυπώσεις :

α) 13—7

Χωρίζω τὸ 7 εἰς 3 καὶ 4

13—3=10

10—4= 6

Λοιπὸν 13—7= 6

β) 13—7

13—3=10

10—4= 6

13—7= 6

γ) 13—7= 13, 10, 6.

3 Πρόβλημα : 83—21=;

Διατύπωσις διεξοδική :

83—21

Τὸ 21 εἶναι ἴσον μὲ 20 καὶ 1

83—20=63

63— 1=62

Λοιπὸν 83—21=62

Διατύπωσις σύντομη :

83—21

83—20=63

63— 1=62

Λοιπὸν 83—21=62

4 Πρόβλημα : 404—7=;

Διατύπωσις διεξοδική :

404—7

Ἀπὸ τὰ 404 βγάζω πρῶτα 4.

404—4=400.

Πρέπει ὅμως νὰ βγάλω 7.

Βγάζω λοιπὸν ἀκόμη 3.

400—3=397

Λοιπὸν 404—7=397

Διατύπωσις σύντομη :

404—7

404—4=400

400—3=397

Λοιπὸν 404—7=397

5 Πρόβλημα : 640—60 ;

Διατύπωσις διεξοδική :

640—60

Ἀπὸ τὰ 640 βγάζω πρῶτα 40.

Χωρίζω λοιπὸν τὸν 60 εἰς 40+20

640—40=600

600 20=580

Λοιπὸν 640—60=580

Διατύπωσις σύντομη :

640—60

640—40=600

600 - 20=580

Λοιπὸν 640—60=580

6 Πρόβλημα : 700—540=;

Διατύπωσις : 700—500=200

200— 40=160

Λοιπὸν 700—540=160

7 Πρόβλημα : 740—500=;

Διατύπωσις : 700—500=200

740—500=240

8 Πρόβλημα : 316— 30= ;

Διατύπωσις : 310— 30=280

316— 30=286

9 Πρόβλημα : 324— 56= ;

Διατύπωσις : 324— 50=274

274— 6=268

Λοιπὸν 324— 56=268

10 Πρόβλημα: 440—270= ;

Διατύπωσις : 440—200=240

240— 70=170

Λοιπὸν 440—270=170

11 Πρόβλημα : 444—376= ;

Διατύπωσις : 444—300=144

144— 70= 74

74— 6= 68

Λοιπὸν 444 376= 68

Β β Ἀφαίρεσις συμπληρωτική. [1]

---

[1] Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παραθετόμενα δύο παραδείγματα, ἡ συμπληρ. ἀφαίρεσις, ἐφόσον γίνεται, ὅπως εἰς αὐτά, ***ἐντελῶς ἀπὸ μνήμης***, εἶναι μὲν εὔκολη, ὅταν ἡ μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου διαφορὰ εἶναι μικρὰ (πρῶτον πρόβλημα), ἀπεναντίας δὲ εἶναι πολὺ δύσκολη, ὅταν ἡ διαφορὰ αὐτὴ εἶναι μεγάλη (δεύτερον πρόβλημα), διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ἀριθμῶν, ἀφοῦ συμπληρώσας τὸν ἀφαιρετέον διὰ τῆς προσθέσεως τῶν καταλλήλων ἀριθμῶν φθάση εἰς τὸν μειωτέον, πρέπει νὰ κάμῃ πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς νέαν καὶ ἰδιαιτέραν ἐργασίαν, ἤτοι νὰ ἀθροίσῃ ὅλους ἐκείνους τοὺς ἀριθμούς, μὲ τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁποίων ἔφθασεν ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον εἰς τὸν μειωτέον: Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γίνεται ἀπὸ μνήμης πολὺ εὐκολώτερα ἡ συνήθης ἀφαίρεσις.

Ἡ συμπληρωτικὴ ἀφαίρεσις γίνεται πολὺ εὔκολα ἀπὸ μνήμης ***εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις***, ὅταν βοηθῆται ἀπὸ ***τὴν ἐποπτείαν.*** Αὐτὸ π.χ. συμβαίνει, ὅταν ἡ ἀρίθμησις γίνεται μὲ νομίσματα. Ἐὰν ἀγοράσω ἀπὸ ἕνα ἔμπορον πράγματα ἀξίας 58 δρ. καὶ δώσω εἰς αὐτὸν ἕνα χαρτονόμισμα 100 δρ., αὐτὸς μοῦ λέγει συντομώτατα, δίδων μαζὶ καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς κατάλληλα χαρτονομίσματα, : 58 δρ. καὶ 2=60, καὶ 25=85, καὶ 5=90, καὶ 10=100. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ἀριθμῶν ἀνέρχεται πρὸς τὸν μειωτέον μὲ μικρά, εὔκολα καὶ γρήγορα βήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁδηγεῖται ἀπὸ τὸ πραγματικὸν νόμισμα. Ὁ λογαριασμὸς καὶ ἡ πληρωμὴ τῆς διαφορᾶς γίνονται μαζὶ κατὰ τμήματα καὶ μαζὶ τελειώνουν. Ὁ ἔλεγχος τῶν ἐκτελουμένων εἶναι εὐκολώτατος, διότι βοηθεῖται ἀπὸ τὴν ἐποπτείαν. Ἀφοῦ φθάσῃ ὁ ἀριθμῶν εἰς τὸν μειωτέον, δὲν ἔχει ἀνάγκην νὰ κάμῃ ἰδιαίτερην ἐργασίαν, διὰ νὰ εὕρῃ τὸ ποσὸν τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλέον λογαριασθῆ καὶ δοθῆ, ἀλλ' οὔτε καὶ ἐνδιαφέρεται νὰ τὸ γνωρίσῃ, διότι τοῦ ἀρκεῖ, ὅτι ἔδειξε, ὅτι τὸ πληρωτέον ἀπὸ τὸν ἀγοραστὴν ποσὸν (ἤτοι ὁ ἀφαιρετέος) μὲ τὸ ὀφειλόμενσν εἰς αὐτὸν (ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον) ἔκαμαν τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀρχικὰ ἔδωκε (ἤτοι τὸν μειωτέον). Ἀκριβῶς δὲ διὰ τὰ ἀνωτέρω πλεονεκτήματα, τὰ ὁποῖα ἔχει ἡ ἀπὸ μνήμης συμπληρωτικὴ ἀφαίρεσις, ὅταν γίνεται μὲ νομίσματα, ***χρησιμοποιεῖται σχεδὸν γενικὰ εἰς τὸ ἐμπόριον.***

Ἀπὸ ὅλα τώρα τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι κατὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν ὡς ***κανονικὸς*** τρόπος τῆς ἀφαιρέσεως πρέπει νὰ διδάσκεται ὁ τρόπος τῆς συνήθους ἀφαιρέσεως, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι ἡ ἀφαίρεσις αὐτὴ παρουσιάζει τὴν ἀρχικὴν ἔννοιαν τῆς ἀφαιρέσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι εἶναι κατάλληλη δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως, ὅτι δέ, ἀφοῦ ἐπὶ ἀρκετὸν χρόνον (καὶ ὡρισμένως κατὰ τὰ 2 πρῶτα σχολικὰ ἔτη) ἀσκηθοῦν οἱ μαθηταὶ ἀποκλειστικὰ εἰς τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς ἀπὸ μνήμης ἀφαιρέσεως, σκόπιμον εἶναι νὰ διδαχθοῦν κατόπιν καὶ τὴν

1 Πρόβλημα : $62-57=$;

Διατύπωσις : $57+3=60, +2=62$, διαφορὰ $3+2=5$ — ἢ συντομώτερα : $57+5=62$. διαφορὰ 5.

2 Πρόβλημα : $246-128=$;

Διατύπωσις : $128+\underline{2}=130, +\underline{70}=200, +\underline{46}=246$, διαφορὰ $2+70+46=118$.

Γ. Πολλαπλασιασμός.

1 Πρόβλημα : $2\times4=$;

Διατύπωσις : 2 φορὰς τὸ 4. Δύο φορὰς τὸ 4 θὰ εἰπῇ $4+4$, δηλαδὴ 8. Λοιπὸν $2\times4=8$.

2 Πρόβλημα : $4\times20=$;

Διατύπωσις : 4 φορὰς τὸ 20 θὰ εἰπῇ $20+20+20+20=80$. Λοιπὸν $4\times20=80$.

Ἄλλαι διατυπώσεις : α) 4×20

Τὸ 20=2 δεκ.

4×2 δεκ.$=8$ δεκ. καὶ

8 δεκ. $=80$

Λοιπὸν $4\times20=80$.

β) 4×20

Ἀφοῦ $4\times2=8$

$4\times20=80$

3 Πρόβλημα : $4\times24=$;

Διατύπωσις διεξοδική :

4 (πολλαπλασιαστὴς)$\times$24

Τὸ $24=20+4$

$4\times20=80$

$4\times4=16$

$80+16=96$

Λοιπὸν $4\times24=96$

Διατύπωσις σύντομη :

4×24

$4\times20=80$

$4\times4=16$

$80+16=96$

Λοιπὸν $4\times24=96$

ἀπὸ μνήμης συμπληρωτικὴν ἀφαίρεσιν ὡς ***εὐκολίαν*** τοῦ κανονικοῦ τρόπου καὶ νὰ ἐφαρμόζουν αὐτήν, ἐφόσον μὲν γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐποπτείας, εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, ἐφόσον δὲ γίνεται ἐντελῶς ἀπὸ μνήμης, εἰς ἐκείνας μόνον, εἰς τὰς ὁποίας ἡ μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου διαφορὰ εἶναι μικρὰ (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 2., σελ. 46 κ. ἀκ.).

4 Πρόβλημα : 16 δρ. $\times$[1] $20=$;

Διατύπωσις : $20=2\times10$

16 δρ.$\times2=32$ δρ.

32 δρ.$\times10=320$ δρ.

Λοιπὸν 16 δρ.$\times20=320$ δρ.

5 Πρόβλημα : 38 μ.$\times12=$;

Διατύπωσις διεξοδική:

$12=10+2$

38 μ.$\times10=380$ μ.

30 μ.$\times2=60$ μ.

380μ.$+$60μ.$=440$ μ.

8μ.$\times2=16$ μ.

440μ.$+$16μ.$=456$ μ.

Λοιπὸν 38μ.$\times12=456$ μ.

Διατύπωσις σύντομη : 38 μ.$\times$12

38μ.$\times10=380$μ.

38μ.$\times2=76$μ.

380μ.$+$76μ.$=456$μ.

Λοιπὸν 38μ.$\times12=456$μ.

6 Πρόβλημα : $130\times6=$;

Διατύπωσις :

$(130=100+30)$

$100\times6=600$

$30\times6=180$

$600+180=780$

Λοιπὸν $130\times6=780$

7 Πρόβλημα : $268\times3=$;

Διατύπωσις : $200\times3=600$

$60\times3=180$

$8\times3=24$

Λοιπὸν $268\times3=804$

Δ. Διαίρεσις.

α) Μέτρησις.

1 Πρόβλημα : Πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ 4 εἰς τὸ 8 ;

Διατύπωσις διεξοδική : Τὸ 4 χωρεῖ εἰς τὸ 8 τόσας φοράς, ὅσας

[1] Τὸ πρόβλημα ἀνήκει εἰς τὸ 3 σχολ. ἔτος. Ἀρκετοὶ Μεθοδικοὶ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ ἔτος αὐτὸ νὰ μεταχειρίζωνται ὡς σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὴν στιγμὴν . , ὁσάκις ὁ πολλαπλασιαστὴς θέτεται ὄχι ὑποκάτω, ἀλλὰ παραπλεύρως ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον. Δὲν βλέπομεν τὸν λόγον, διατὶ νὰ ἀφήσωμεν τὸ σημεῖον $\times$, τὸ ὁποῖον καὶ εὐκρινέστερον εἶναι ἀπὸ τὴν στιγμὴν καὶ εἶναι εἰς ὅλην τὴν διδασκαλίαν τοῦ δημοτ. σχολείου μόνον ἀριθμητικὸν σημεῖον, ἐνῷ ἡ στιγμὴ εἶναι καὶ γραμματικόν. Τὸ πολὺ θὰ ἠμποροῦσε νὰ ἀρχίσῃ νὰ γίνεται χρῆσις τῆς στιγμῆς εἰς τὴν κλασματικὴν διάταξιν (5 σχολ. ἔτος), εἰς τὴν ὁποίαν πράγματι ἡ γραφὴ τοῦ $\times$ ἀποβαίνει φορτική, καὶ μάλιστα ὅταν πρόκειται περὶ πολλῶν παραγόντων.

Δ. Ἀφαίρεσις.

1 Πρόβλημα: 1 ἡμ.—5 ὥρ.=; *2 Πρόβλημα:* 6 ἡμ.—5 ὥρ.=;

Διατύπωσις: 1 ἡμ.=24ὥρ. Διατύπωσις: Ἀπὸ τὰς 6 ἡμ.

24 ὥρ.—5 ὥρ.=19 ὥρ. τρέπω τὴν 1 εἰς ὥρ.

1 ἡμ.=24 ὥρ.

24 ὥρ.—5ὥρ.=19ὥρ.

Λοιπὸν μένουν 5ἡμ.καὶ 19ὥρ.

3 Πρόβλημα: 6 ἡμ.—4 ἡμ 5 ὥρ =;

Διατύπωσις: 6 ἡμ.—4 ἡμ.=2 ἡμ.

2 ἡμ.—5 ὥρ.=1 ἡμ. 19 ὥρ.

Ε. Πολλαπλασιασμός.

1 Πρόβλημα: 7 ῥούπ. ×8=;

Διατύπωσις: 7 ῥ. ×8=56 ῥ.=7 πήχ.

2 Πρόβλημα: 3 π. 7 ῥ.×3=;

Διατ. διεξοδική: 3 π. ×3= 9 π.

7 ῥ. ×3= 21 ῥ.=2 π. 5 ῥ.

Λοιπὸν 3 π. 7 ῥ ×3= 11 π. 5 ῥ.

Διατύπ. σύντομη: 3 π. 7 ῥ.×3=9π.21 ῥ.=11 π. 5 ῥ.

Ϛ. Διαίρεσις.

α) Μερισμός.

1 Πρόβλημα: 3 ὀκ.: 4=; *2 Πρόβλημα:* 21 ὀκ.: 4=;

Διατύπωσις: 3 ὀκ.=1200 δρ. Διατύπωσις: 21 ὀκ.: 4=5 ὀκ.

[ὑπόλ. 1 ὀκ.

1200 δρ.: 4=300 δρ. 1 ὀκ.ἢ 400 δρ.: 4=100 δρ.

Λοιπὸν 21 ὀκ.: 4=5 ὀκ. 100 δρ.

3 Πρόβλημα: 21 ὀκ. 300 δρ.: 5.

Διατύπωσις: 21 ὀκ.: 5=4 ὀκ., ὑπόλ. 1 ὀκ.

1 ὀκ.=400 δρ.,+300 δρ.=700 δρ.

700 δρ.: 5=140 δρ.

Λοιπὸν 21 ὀκ. 300 δρ.: 5=4 ὀκ. 140 δρ.

β) Μέτρησις.

Πρόβλημα: 4 κομμάτ. εἰς 3 δωδεκ.=;

Διατύπωσις: 3 δωδ.=36 κ.

4 κομμάτ. εἰς 36 κ.=9 φορ.

3. Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

Πρόβλημα: 4 πήχ. ὑφάσμ. στοιχίζουν 48 δρ.

9 » » » ×

Διατύπωσις διεξοδική: Ἀφοῦ οἱ 4 π. στοιχίζουν 48 δρ., ὁ 1 π. στοιχίζει τὸ τέταρτον τῶν 48 δρ., ἤτοι 12 δρ. καὶ οἱ 9 π. στοιχίζουν 9 φορὰς τόσον, ἤτοι 12 δρ.×9=108 δρ.

Διατύπωσις σύντομη: 4 π. στοιχ. 48 δρ.

1 » » 48 δρ.: 4=12 δρ.

9 » » 12δρ.×9=108δρ.

4. Εὕρεσις τοῦ τόκου.

Πρόβλημα: Πόσον τόκον φέρουν 350 δρ. μὲ 4% εἰς 2 ἔτη;

Διατύπωσις διεξοδική: Τὸ κεφάλαιον ἔχει τοκισθῆ μὲ 4%, ἤτοι αἱ 100 δρ. φέρουν εἰς ἕνα ἔτος 4 δρ. τόκον. Ἀφοῦ αἱ 100 δρ. φέρουν 4 δρ. τόκον, ἡ 1 δρ. φέρει 4 λεπτ. καὶ αἱ 350 φέρουν 350 φορὰς τόσον, ἤτοι 4 λ.×350, δηλ. 1400 λ.=14 δρ. Τόσον τόκον φέρουν αἱ 350 δρ. εἰς 1 ἔτος. Ἄρα εἰς 2 ἔτη θὰ φέρουν 14 δρ.×2=28 δρ. Λοιπὸν αἱ 350 δρ. μὲ 4% εἰς 2 ἔτη θὰ φέρουν τόκον 28 δρ.

Διατύπ σύντομη: 100δρ. εἰς 1 ἔτος φέρ.4 δρ.

1 δρ. » » » » 4 λ.

350 » » » » » 4λ.×350=1400λ.=14δρ.

350 » » 2 ἔτη » 14 δρ.×2=28 δρ.

Ἐφόσον τὸ πρόβλημα αὐτὸ λυθῇ καὶ μὲ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον, ἡ λύσις του μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν θὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

Διατύπωσις διεξοδική: Τὸ κεφάλαιον ἔχει τοκισθῆ μὲ 4%, ἤτοι αἱ 100 δρ. φέρουν εἰς 1 ἔτος 4 δρ. τόκον. Ἀφοῦ αἱ 100 δρ. φέρουν 4 δρ. τόκον, αἱ 300 δρ. φέρουν 3 φορὰς τόσον, ἤτοι 12 δρ. καὶ αἱ 50 δρ. φέρουν τὸ ἥμισυ τῶν 4 δρ., ἤτοι 2 δρ. 12+2=14 δρ. Τόσον τόκον φέρουν αἱ 350δρ. εἰς 1 ἔτος. Ἄρα εἰς 2 ἔτη θὰ φέρουν 14 δρ.×2=28 δρ. Λοιπὸν αἱ 350 δρ. μὲ 4% φέρουν εἰς 2 ἔτη 28 δρ. τόκον.

Διατυπώσεις σύντομαι :

α) 100 δρ. εἰς 1 ἔτ. φέρ. 4 δρ. β) 4 δρ.$\times 3\frac{1}{2}$=14δρ.,$\times$2=28δρ.

300 » » » » » 12 δρ.

50 » » » » » 2 δρ.

350 » » » » » 14 δρ. γ) 8 δρ.$\times 3\frac{1}{2}$=28 δρ.

350 δρ. » 2 ἔτ. » 28 δρ.

Ἂν τὸ ἴδιον πρόβλημα λυθῇ καὶ μὲ τὴν ἐκκίνησιν ἀπὸ τὸ 1 %, ἡ λύσις του μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

Διατύπωσις : 1% τῶν 350 δρ. εἰς 1 ἔτος=3,50 δρ.

4% » » » » » » =3,50 δρ.$\times$4=14 δρ.

» » » » » 2 ἔτη =14 δρ.$\times$2=28 δρ.

Ἄλλη διατύπωσις : Ὁ τόκος μὲ 4 % εἰς 2 ἔτη εἶναι ὅσος ὁ τόκος μὲ 8 % εἰς 1 ἔτος. 1 % τῶν 350 δρ. εἶναι 3,50 δρ. 8 % εἶναι 3,50 δρ.$\times$8=20 δρ.].

5. ***Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.***

Πρόβλημα : Μὲ πόσον τοῖς % ἔχουν τοκισθῆ 75 δρ., ἂν φέρουν εἰς $\frac{1}{2}$ τοῦ ἔτους $1\frac{1}{2}$ δρ. τόκον ;

Ἂν τὸ πρόβλημα αὐτὸ λυθῇ μὲ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον, ἡ λύσις του θὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

Διατύπωσις διεξοδική : Μὲ πόσον τοῖς % ἔχει τοκισθῆ τὸ κεφάλαιον, σημαίνει, πόσον τόκον φέρουν 100 δρ. εἰς 1 ἔτος. Ἀφοῦ αἱ 75 δρ. φέρουν τόκον $1\frac{1}{2}$ δρ., αἱ 25 δρ. φέρουν τὸ τρίτον, ἤτοι $\frac{1}{2}$ δρ. Αἱ 100 λοιπὸν δρ. φέρουν 4 φορὰς τόσον, ἤτοι $\frac{1}{2}$ δρ.$\times$4=2 δρ. Ἀλλὰ τόσον τόκον φέρουν αἱ 100 δρ. εἰς $\frac{1}{2}$ τοῦ ἔτους. Ἄρα εἰς 1 ἔτος θὰ φέρουν 2 δρ.$\times$2=4 δρ. τόκον. Λοιπὸν τὸ κεφάλαιον ἔχει τοκισθῆ μὲ 4 %.

Διατυπώσεις σύντομαι : α) 75 δρ. εἰς $\frac{1}{2}$ ἔτους=$1\frac{1}{2}$ δρ.

25 » » » » = $\frac{1}{2}$ δρ.

100 » » » » = 2 δρ.

» » » 1 ἔτος = 4 δρ.

β) $1\frac{1}{2}$ δρ. : 3= $\frac{1}{2}$δρ.,$\times$4=2δρ.,$\times$2= 4%

Ἂν λυθῇ τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ μὲ βάσιν τὸν καθορισμὸν τοῦ ἐτησίου τόκου, ἡ διατύπωσις τῆς λύσεώς του θὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς :

Διατύπωσις : Ὁ τόκος τοῦ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἔτους εἶναι $1\frac{1}{2}$ δρ. Ὁ τόκος ἄρα ὁλοκλήρου τοῦ ἔτους θὰ εἶναι 3 δρ. Ἀλλὰ ἀφοῦ αἱ 75 δρ. φέρουν τόκον 3 δρ., αἱ 25 δρ. φέρουν 1 δρ. καὶ αἱ 100 δρ. θὰ φέρουν 4 δρ. Λοιπὸν τὸ κεφάλαιον ἔχει τοκισθῆ πρὸς 4%.

Ὅ,τι εἰς τὸ τέλος ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν, εἶναι, ὅτι, ἐφόσον οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως γίνονται δεξιώτεροι εἰς τὴν ἐκτέλεσιν μιᾶς ἀριθμητ. πράξεως, τόσον συντομώτερα θὰ ζητῆται ἀπὸ αὐτοὺς νὰ διατυπώνουν προφορικὰ τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεώς της.

---

3. Η ΠΡΟΦΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΙΣ ΤΩΝ ΣΚΕΨΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΓΓΡΑΦΟΝ ΑΡΙΘΜΗΣΙΝ.

[Διὰ νὰ δείξωμεν, πῶς πρέπει νὰ γίνεται ἡ προφορικὴ διατύπωσις τῶν σκέψεων εἰς τὴν ἔγγραφον ἀρίθμησιν, παραθέτομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματά της ἀναφερόμενα εἰς προβλήματα τῶν 4 πράξεων τῶν ἁπλῶν ἀκεραίων καὶ τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, καθὼς καὶ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

1 ***Πρόβλημα ἁπλῶν ἀκεραίων.***

Α. Πρόσθεσις.

1 Πρόβλημα :

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\smile} \\ 24 \\ 53 \\ +63 \\ \hline 140 \end{array}$$

(Ἡ 1 δεκὰς ἠμπορεῖ, ἀντὶ νὰ σημειωθῇ, νὰ κρατηθῇ εἰς τὴν μνήμην, ὅπως γίνεται καὶ εἰς τὴν διατύπωσιν).

Διατύπωσις διεξοδική : Γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον, τὰς μονάδας κάτω ἀπὸ τὰς μονάδας καὶ τὰς δεκάδας κάτω ἀπὸ τὰς δεκάδας καὶ σύρομεν μίαν ὁριζοντίαν γραμμήν. Προσθέτομεν πρῶτα τὰς μονάδας. 3, 6, 10 μονάδες. Αἱ 10 μονάδες εἶναι 1 δεκὰς καὶ 0 μονάδες. Γράφομεν ἕνα 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν εἰς τὸν νοῦν μας τὴν 1 δεκάδα, διὰ νὰ τὴν προσθέσωμεν μὲ τὰς δεκάδας. Τώρα προσθέτομεν τὰς δεκάδας. 1, 7, 12, 14 δεκάδες. Αἱ 14 δεκάδες εἶναι 1 ἑκατοντὰς καὶ 4 δεκάδες. Γράφομεν τὰς 4 δεκάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων καὶ τὴν 1 ἑκατοντάδα εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν εἶναι 140.

Διατύπωσις σύντομη: 3, 6, 10 μονάδες.
1, 7, 12, 14 δεκάδες.
Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν εἶναι 140.

2 Πρόβλημα:

$$\begin{array}{r} 324 \\ 447 \\ +121 \\ \hline 892 \end{array}$$

Διατύπωσις: 1, 8, 12 μονάδες. Γράφομεν τὰς 2 μονάδας καὶ κρατοῦμεν εἰς τὸν νοῦν μας τὴν 1 δεκ. 1, 3, 7, 9 δεκάδες. Τὰς γράφομεν. 1, 5, 8 ἑκατοντάδες. Τὰς γράφομεν.
Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν εἶναι 892.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, ἡ γραπτὴ πρόσθεσις ἀρχίζει ἀπὸ τὸ κατώτερον ψηφίον κάθε στήλης, αὐτὸ δὲ διὰ τὸν πρακτικὸν λόγον, ὅτι τὸ γραφόμενον ἄθροισμα τῆς στήλης εἶναι πλησιέστατα πρὸς τὸ κατώτερον ψηφίον τῆς ἀμέσως ἑπομένης. Ἄλλωστε ἡ πρόσθεσις ἡ ἀρχίζουσα ἀπὸ τὸ ἀνώτερον ψηφίον κάθε στήλης ἠμπορεῖ νὰ γίνεται ὡς **δοκιμή**. Ἂν ὅμως ἡ πρόσθεσις ἀρχίζῃ ἀπὸ τὸ ἀνώτερον ψηφίον κάθε στήλης, ὅπως θέλουν μερικοὶ Μεθοδικοί, τότε ἡ διατύπωσις εἰς τὸ δεύτερον π.χ. πρόβλημα θὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς: 4, 11, 12 μονάδες κ.τ.λ.

Βα. Ἀφαίρεσις (συνήθης).

Πρόβλημα:

$$\begin{array}{r} 7.46 \\ -1\ 54 \\ \hline 5\ 92 \end{array}$$

Διατύπωσις διεξοδική: Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτω ἀπὸ τὸν μειωτέον, τὰς μονάδας κάτω ἀπὸ τὰς μονάδας κ.τ.λ. Πρῶτα ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας, ἔπειτα τὰς δεκάδας καὶ κατόπιν τὰς ἑκατοντάδας. 6 μονάδες ἔξω 4 μον. =2 μον. Γράφομεν τὰς 2 μον. εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων. 4 δεκάδες ἔξω 5 δεκάδες δὲν ἀφαιροῦνται. Δι' αὐτὸ παίρνομεν 1 ἑκατοντάδα τοῦ μειωτέου (σύγχρονη σημείωσις τῆς στιγμῆς. !) καὶ τὴν τρέπομεν εἰς δεκάδας. Ἡ 1 ἑκατ. ἔχει 10 δεκάδας καὶ 4 δεκ.=14 δεκ. 14 δεκάδες ἔξω 5 δεκ.=9 δεκ. Γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τῶν δεκάδων εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων. 6 ἑκατοντάδες ἔξω 1 ἑκατ.=6 ἑκ. Τὰς γρά-

φομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων. Τὸ ὑπόλοιπον λοιπὸν εἶναι 592.

Διατύπωσις σύντομη: 6—4=2 μονάδες.
4—5 δὲν ἀφαιροῦνται.
14—5=9 δεκάδες.
6—1=5 ἑκατ.
Τὸ ὑπόλοιπον λοιπὸν εἶναι 592.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, ἡ γραπτὴ ἀφαίρεσις ἀρχίζει ἀπὸ τὰ ψηφία τοῦ μειωτέου. Πρέπει δὲ νὰ γίνεται μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, διότι αὐτὸν ἐχρησιμοποιήσαμεν μέχρι τοῦδε εἰς τὰ δύο πρῶτα σχολικὰ ἔτη κατὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, τὸν ἐχρησιμοποιήσαμεν δέ, ἐπειδὴ αὐτὸς ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν ἀρχικὴν ἔννοιαν τῆς ἀφαιρέσεως. Ἄλλωστε αὐτὸς ὁ τρόπος ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν Θεωρητικὴν Ἀριθμητικήν. Δὲν ὑπάρχει δὲ κανεὶς λόγος τώρα νὰ μεταβληθῇ. Τὸ ὅτι εἰς τὴν πρόσθεσιν ἀρχίζομεν ἀπὸ τὸ κατώτερον ψηφίον κάθε στήλης, δὲν εἶναι λόγος νὰ κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν. Ἄλλωστε, ὅπως εἴδαμεν, γίνεται καὶ πρόσθεσις ἀρχίζουσα ἀπὸ τὰ ἄνω, ὡς δοκιμὴ τῆς ἀντιθέτου. Παρ' ὅλα αὐτὰ ἀρκετοὶ Μεθοδικοὶ ἀρχίζουν τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου. Ἐφόσον δὲ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις ἔτσι, ἡ διατύπωσις τοῦ τρόπου τῆς ἐκτελέσεώς της θὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς: 4 ἀπὸ 6=2 μονάδες. 5 ἀπὸ 4 δὲν ἀφαιροῦνται. 5 ἀπὸ 14=9 δεκάδες. 1 καὶ 1=2, ἀπὸ 7=6 ἑκατ. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἡ μονὰς μιᾶς τάξεως, ἡ ὁποία λαμβάνεται ἀπὸ τὸν μειωτέον, δὲν κρατεῖται εἰς τὴν μνήμην, διὰ νὰ ἐλαττωθῇ κατόπιν κατ' αὐτὴν τὸ σχετικὸν ψηφίον τοῦ μειωτέου, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἔχει ληφθῆ, ἀλλὰ προσθέτεται εἰς τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, πρᾶγμα, τοῦ ὁποίου ἡ κατανόησις θὰ προξενήσῃ κατ' ἀρχὰς ἀρκετὰς δυσκολίας εἰς τοὺς μαθητάς.

Ββ. Ἀφαίρεσις συμπληρωτική, [1]

[1] Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παραθετόμενα παραδείγματα καὶ ἰδίως ἀπὸ τὸ δεύτερον, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται σύνθετον πρόβλημα, ἡ γραπτὴ συμπληρωτικὴ ἀφαίρεσις ἔχει ὅλα τὰ πλεονεκτήματα τῆς ἀπὸ μνήμης συμπληρωτικῆς τῆς στηριζομένης εἰς τὴν ἐποπτείαν. Εἶναι δι' αὐτὸ ταχύτερη καὶ ἀσφαλέστερη ἀπὸ τὴν συνήθη γραπτὴν ἀφαίρεσιν. Ἐν τούτοις ἀκολουθοῦντες τὸ παράδειγμα τῶν περισσοτέρων Μεθοδικῶν (ἴδ. καὶ R ä t h e r,

1 Πρόβλημα : 746 Διατύπωσις : 4+2=6. 5+9=14.

−154 1+1=2, +5=7. Διαφορὰ 592.

592

2 Πρόβλημα : 1750−(188+245+69+347)= ;

Διάταξις : 1750 Διατύπωσις : 7, 16, 21, 29 καὶ 1 =30

− 188 3,7,13, 17, 25 καὶ 0 =25

245 2, 5, 7, 8 καὶ 9 =17

69 1 καὶ 0 = 1

347

901

Γ. Πολλαπλασιασμός.

1 Πρόβλημα : 225 δρ.

×3

675 δρ.

ὅπ. ἀν.. μέρ. 2, σελ. 48 κ. ἀκ.) προτιμῶμεν τὴν χρῆσιν τῆς συνήθους γραπτῆς ἀφαιρέσεως, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι αὐτὴ θὰ εἶναι οἰκειοτέρα εἰς τοὺς παῖδας, ἐπειδὴ ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν ἀρχικὴν ἔννοιαν τῆς ἀφαιρέσεως, μὲ τὴν ὁποίαν ἔχουν ἀντιληφθῆ οἱ παῖδες τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τὴν κάμνουν ἀπὸ μνήμης κατὰ τὰ δύο πρῶτα σχολικὰ ἔτη, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι εἰς αὐτὴν ἔχουν συνηθίσει καὶ οἱ διδάσκαλοι, διὰ τοὺς ὁποίους ἐπίσης δὲν θὰ εἶναι εὔκολον νὰ προσαρμοσθοῦν πρεπόντως εἰς τὸν νέον τρόπον τῆς ἐκτελέσεως τῆς γραπτῆς ἀφαιρέσεως. Ὁ προτιμῶν τὴν γραπτὴν συμπληρωτ. ἀφαίρεσιν ἠμπορεῖ νὰ τὴν διδάξῃ, ὢν βέβαιος, ὅτι οἱ μαθηταὶ δὲν θὰ δυσκολευθοῦν νὰ τὴν κατανοήσουν, ἀλλὰ καὶ ἔχων ὑπ' ὄψιν του, ὅτι δὲν πρέπει νὰ διδάσκῃ συγχρόνως καὶ τὴν συνήθη, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν θὰ μάθουν οἱ μαθηταὶ καμίαν ἀπὸ τὰς δύο μὲ ἀσφάλειαν. Ἂν εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀφαίρεσιν πρέπῃ νὰ κρατῇ ἐλευθερία εἰς τὴν ἐκλογὴν τοῦ τρόπου τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, δι' αὐτὸ δέ, καθὼς εἴδαμεν ἀνωτέρω (σελ. 279), ἠμποροῦν νὰ διδάσκωνται ἐκ παραλλήλου καὶ οἱ δύο τρόποι τῆς ἀφαιρέσεως, εἰς τὴν γραπτήν, εἰς τὴν ὁποίαν πρόκειται κυρίως περὶ μηχανισμοῦ, πρέπει νὰ ἐκλέγεται ἕνας τρόπος τῆς ἐκτελέσεως καὶ εἰς αὐτὸν νὰ ἀσκοῦνται σταθερὰ οἱ μαθηταί, ἕως ὅτου ἀποκτήσουν εἰς αὐτὸν μηχανικὴν αὐτόχρημα δεξιότητα (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν.).

Διατύπωσις διεξοδική : 3 φορὰς 5 μον.=15 μον.=1 δεκ. καὶ 5 μον. Γράφομεν κ.τ.λ.

3 φορὰς 2 δεκ.=6 δεκ. καὶ 1 δεκ.= 7 δεκ.

3 φορὰς 2 ἑκ.=6 ἑκατ.

Λοιπὸν τὸ γινόμενον εἶναι 675 δρ.

Διατύπωσις σύντομη : 3 (φορὰς) 5=15=5 μον. 1 δεκ.

3 (φορὰς) 2=6 δεκ. καὶ 1 δεκ.=7 δεκ.

3 (φορὰς) 2=6 ἑκ.

Τὸ γινόμενον λοιπὸν εἶναι 675 δρ.

2 Πρόβλημα : 25 δρ.

×13

75

25

325 δρ.

Διατύπωσις διεξοδική : Ὁ 13 εἶναι ἴσος μὲ 10 καὶ 3. Θὰ πάρωμεν λοιπὸν τὰς 25 δρ. πρῶτα 3 φορὰς καὶ ἔπειτα 10 φορὰς καὶ κατόπιν θὰ ἑνώσωμεν τὰ δύο γινόμενα. 3 φορὰς 5 μον. = 15 μον.=1 δεκ. καὶ 5 μον. Γράφομεν κ.τ.λ. 3 φορὰς 2 δεκ.= 6 δεκ.,+1 δεκ.=7 δεκ. 3 φορὰς λοιπὸν αἱ 25 δρ. κάμνουν 75 δρ. Θὰ πάρωμεν τώρα τὰς 25 δρ. καὶ 10 φοράς. 10 φορὰς αἱ 5 μονάδ.=50 μον.=5 δεκ. καὶ 0 μονάδες. Γράφομεν τὰς 5 δεκάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων. Θὰ ἠμπορούσαμεν νὰ γράψωμεν καὶ τὸ 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, ἀλλὰ εἶναι περιττόν. 10 φορὰς αἱ 2 δεκ.=20 δεκ.=2 ἑκατ. Γράφομεν καὶ τὰς 2 ἑκατοντ. εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων. 10 λοιπὸν φορὰς αἱ 25 δρ. κάμνουν 250 δρ. Προσθέτομεν τώρα τὰ 2 γινόμενα καὶ εὑρίσκομεν 325 δρ.

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι εὔκολον νὰ συναγάγουν οἱ μαθηταί, ὅτι, ἀντὶ νὰ λαμβάνουν κάθε ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου 10 (20, 30 κ. τ. λ.) φοράς, ὅπως ἀπαιτεῖ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἠμποροῦν νὰ τὸ λαμβάνουν χάριν εὐκολίας 1 (2, 3 κ.τ.λ.) φοράς, νὰ πολλαπλασιάζουν δὲ τὸ γινόμενον ἐπὶ 10, ἤτοι νὰ τὸ γράφουν μίαν θέσιν ἀριστερώτερα. Ἔτσι θὰ ἐξαχθῇ καὶ συντομώτερη διατύπωσις τοῦ τρόπου τῆς γραπτῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω π.χ. πρόβλημα θὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς ἡ Συντομώτερη διατύπωσις:

3 (φορὰς) 5=15, 5 μον., 1 δεκάς.
3 (φορὰς) 2= 6 δεκ. καὶ 1 δεκ.=7 δεκ.
1 (φορὰν) 5= 5 ***δεκάδες.***
1 (φορὰν) 2= 2 ***ἑκατοντ.***

Προσθέτομεν τώρα τὰ 2 γινόμενα καὶ εὑρίσκομεν 325 δρ.

Δ. Διαίρεσις.

α) Μερισμός.

1 Πρόβλημα : Ε Δ Μ ΕΔΜ [1]
4 2 8 δρ. : 2=2 1 4 δρ.
4
0 2
2
0 8
8
0

Διατύπωσις διεξοδική: Διαιροῦμεν τὰ ψηφία τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ διαιρετέου χωριστά. Ἀρχίζομεν ἀπὸ τὸ ψηφίον τῆς ἀνωτέρας τάξεως. 4 Ἑκατ. : 2=2 Ε. Διότι 2 Ε×2=4 Ε. Δὲν μένει καμία Ἑκ. ὑπόλοιπον καὶ δι' αὐτὸ γράφομεν ὑπόλοιπον 0.

---

[1] Ἡ διάταξις αὐτὴ τοῦ γραπτοῦ μερισμοῦ, ἡ ὁποία ὁμοιάζει μὲ τὴν διάταξιν τοῦ ἀπὸ μνήμης, εἶναι προτιμότερη ἀπὸ τὴν διάταξιν 428 | 2 / 214, ἡ ὁποία ὅμως ἔχει γίνει τόσον οἰκεία εἰς ἡμᾶς, ὥστε πρέπει νὰ ὁμολογηθῇ, ὅτι εἶναι πολὺ δύσκολη ἡ ἐκβολή της. Πάντως δὲ εἶναι πολὺ προτιμότερη ἀπὸ τὴν διάταξιν τῶν Hentschel καὶ Stubba, οἱ ὁποῖοι προτάσσουν πάντοτε τὸν διαιρέτην, ἀποχωρίζοντες αὐτὸν μὲ μίαν κάθετον γραμμὴν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, ἐπιτάσσουν δὲ τὸ πηλίκον, ἀποχωρίζοντες ἐπίσης αὐτὸ ἀπὸ τὸν διαιρετέον μὲ μίαν ὅμοιαν γραμμήν, ἤτοι ἀπὸ τὴν διάταξιν:

2 | 428 | 214
4
2
2
8
8

Δίπλα εἰς τὸ 0 τῶν Ἑκ. γράφομεν τὰς 2 Δεκ., τὰς ὁποίας θὰ διαιρέσωμεν τώρα. 2 Δ : 2=1 Δ. Διότι 1 Δ×2=2 Δ. Δὲν μένει καμία Δεκ. ὑπόλοιπον καὶ δι' αὐτὸ γράφομεν ὑπόλοιπον 0. Δίπλα εἰς τὸ 0 τῶν Δεκ. γράφομεν τὰς 8 Μ, τὰς ὁποίας θὰ διαιρέσωμεν τώρα. 8 Μ : 2=4 Μ. Διότι 4 Μ×2=8 Μ, ὑπόλοιπον 0. Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι 214 δρ.

Διατύπωσις σύντομη:

4 Ε : 2=2 Ε . 2×2=4, ὑπόλ. 0.
2 Δ : 2=1 Δ . 1×2=2, ὑπόλ. 0.
8 Μ : 2=4 Μ . 4×2=8, ὑπόλ. 0.
Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι 214 δρ.

Ἐννοεῖται, ὅτι μετὰ τὴν λύσιν μερικῶν προβλημάτων παύει ἡ γραφὴ τῶν γραμμάτων Μ, Δ. Ε κ. τ. λ. ὑπεράνω τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ πηλίκου, καθὼς καὶ ἡ γραφὴ τοῦ ὑπολοίπου 0.

2 Πρόβλημα : 374 : 2=187
2
17
16
14
14

Διατύπωσις διεξοδική: 3 Ε : 2=1 Ε . 1×2=2, ὑπόλ. 1 Ε.,
1 Ε ἔχει 10 Δ καὶ 7Δ=17 Δ . 17Δ : 2=8Δ.
8×2=16, ὑπόλοιπον 1 Δ.
1Δ ἔχει 10 Μ καὶ 4 Μ=14 Μ . 14Μ:2=7Μ.
7×2=14.
Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι 187.

Διατύπωσις σύντομη: 3 Ε : 2=1 Ε . 1×2=2, ὑπόλ. 1.
17 Δ : 2=8 Δ . 8×2=16, ὑπόλ. 1.
14 Μ : 2=7 Μ . 7×2=14.
Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι 187.

3 Πρόβλημα : 178 : 2=89 Διατύπωσις: 1 Ε : 2 δὲν δίδει ὁλόκληρην ἑκατοντάδα. Δι' αὐτὸ τρέπω τὴν 1 Ε εἰς Δ. 1Ε=10 Δ καὶ 7 Δ=17 Δ . 17 Δ : 2=8 Δ κ.τ.λ.
16
18
18

4 Πρόβλημα : 614 : 20=30 Διατύπωσις : 61 Δ : 20 = 3Δ.

60   3×20=60, ὑπόλ. 1.

14   14 Μ : 20=0 Μ., ὑπόλ. 14.

Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι 30 καὶ μένει ὑπόλοιπον 14.

β) Μέτρησις.

Πρόβλημα : 468 δρ. : 2 δρ.=234 φοράς.[1]

4

06

6

08

8

0

[1] Ἀρκετοὶ Μεθοδικοὶ μεταχειρίζονται ἰδιαίτερην μορφὴν διατάξεως διὰ τὴν ἔγγραφον μέτρησιν. Ἔτσι μερικοὶ μεταχειρίζονται τὴν ἑξῆς μορφήν :

2 δρ. εἰς τὰς 468 δρ.=234 φοράς.

4

6

6

8

8

Ἄλλοι πάλιν μεταχειρίζονται τὴν ἑξῆς : 2 δρ | 468 δρ.=234 φοράς.

4

6

6

8

8

Ἡ χρῆσις ἰδιαιτέρας μορφῆς διατάξεως διὰ τὴν γραπτὴν μέτρησιν δὲν εἶναι σκόπιμη. Ἐφόσον δὲν διδάσκεται ἡ καθαυτὸ γραπτὴ ἀρίθμησις, φυσικὰ ὀρθὸν εἶναι νὰ γράφωμεν τὰ προβλήματα τῆς διαιρέσεως, ὅπως παρουσιάζονται εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν (πρόβλημα μερισμοῦ 10 δρ.: 5=2 δρ. Πρόβλημα μετρήσεως 5 δρ. εἰς τὰς 10 δρ.=2 φοράς). Δὲν ὑπάρχει ὅμως λόγος νὰ γίνεται τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν καθαυτὸ γραπτὴν ἀρίθμησιν, ἡ ὁποία ὡς μηχανισμὸς πρέπει νὰ ἔχῃ μίαν μόνον μορφὴν δι' ὅλα τὰ προβλήματα τῆς διαιρέσεως, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἀσκοῦνται εὐκολώτερα οἱ μαθηταί.

Διατύπωσις διεξοδική : Αἱ 2 Μ χωροῦν εἰς τὰς 4 Ε, ἤτοι εἰς τὰς 400 Μ. 200 φοράς. Γράφομεν λοιπὸν εἰς τὸ πηλίκον 2, τὸ ὁποῖον φανερώνει 2 Ε. 2×2 Ε=4 Ε, ὑπόλ. 0. Δίπλα εἰς τὸ 0 τῶν Ε γράφομεν τὰς 6 Δ. Αἱ 2 Μ χωροῦν εἰς τὰς 6 Δ, ἤτοι τὰς 60 Μ. 30 φοράς. Γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον 3, τὸ ὁποῖον φανερώνει 3 Δ. 2×3 Δ=6 Δ, ὑπόλ. 0. Δίπλα εἰς τὸ 0 γράφομεν τὰς 8 Μ., ποὺ ἀπομένουν. Αἱ 2 Μ εἰς τὰς 8 Μ χωροῦν 4 φοράς. 2×4=8, ὑπόλ. 0. Λοιπὸν αἱ 2 δρ. χωροῦν εἰς τὰς 468 δρ. 234 φοράς.

Διατύπωσις σύντομη : Τὸ 2 εἰς τὸ 4=2, ἑκατοντάδες.

2×2=4, ὑπόλ. 0.

Τὸ 2 εἰς τὸ 6=3, δεκάδες.

2×3=6, ὑπόλ. 0.

Τὸ 2 εἰς τὸ 8=4, μονάδες.

2×4=8, ὑπόλ. 0.

Λοιπὸν αἱ 2 δρ. χωροῦν εἰς τὰς 468 δρ. 234 φοράς.

Περιττὸν εἶναι τώρα νὰ τονισθῇ, ὅτι δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ διατηρήσῃ ἡ διδασκαλία ἐπὶ μακρὸν τὸν ἰδιαίτερον αὐτὸν τρόπον τῆς διατυπώσεως διὰ τὴν ἔγγραφον λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μετρήσεως, ὅτι δὲ ἀπεναντίας σκόπιμον εἶναι χάριν τῆς ἑνότητος νὰ συνηθίσῃ τοὺς μαθητὰς ὅσον τὸ δυνατὸν ἐνωρίτερα νὰ ἐφαρμόζουν καὶ εἰς αὐτὴν τὸν τρόπον τῆς διατυπώσεως, τὸν ὁποῖον θὰ ἐφαρμόζουν καὶ εἰς τὴν ἔγγραφον λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ μερισμοῦ.

2. Προβλήματα συμμιγῶν μὴ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Α. Τροπὴ εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως.

Πρόβλημα : Νὰ τραποῦν 56 δωδ. καὶ 9 κ. εἰς κομμάτια !

Διατύπωσις : Ἡ 1 δωδεκ.=12 κ.

Αἱ 56 δωδ.=56×12 κ. ἤτοι   56

12

112

56

672 κ.

672 κ.+9 κ.=681 κ.

Β. Τροπὴ εἰς μονάδας ἀνωτέρας τάξεως.

Πρόβλημα: Νὰ τραποῦν 583 κ. εἰς δωδεκάδας!

Διατύπωσις: 12 κ.=1 δωδ.

Τὰ 583 κ. εἶναι τόσαι δωδεκάδες, ὅσας φορὰς χωροῦν τὰ 12 κ. εἰς τὰ 583 κ. Διαιρῶ δι᾽ αὐτὸ τὰ 583 κ. μὲ τὰ 12 κ. 583 κ. : 12 κ.=48δ.7κ.

48
103
96
7 κ.

Γ. Πρόσθεσις.

Πρόβλημα:

12 ἡμ.	16 ὥρ.
—	18
6	—
+19	23 = 57 ὥρ. : 24=2 ἡμ. 9 ὥρ.
39 ἡμ.	9 ὥρ. 48
	9 ὥρ.

Διατύπωσις: Προσθέτω πρῶτα τὰς ὥρας καὶ κατόπιν τὰς ἡμέρας. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὡρῶν εἶναι 57. Τρέπω τώρα τὰς 57 ὥρας εἰς ἡμέρας. Τὰς διαιρῶ δι᾽ αὐτὸ μὲ τὸ 24. Γίνεται, ὅπως παριστάνεται ἀνωτέρω. Αἱ 57 λοιπὸν ὧραι εἶναι 2 ἡμ. καὶ 9 ὧραι. Γράφω τὰς 9 ὥρ. εἰς τὴν θέσιν τῶν ὡρῶν καὶ προσθέτω τὰς 2 ἡμέρας μὲ τὰς ἄλλας. Ἄθροισμα τῶν ἡμερῶν 39. Ἔτσι λοιπὸν εὑρίσκομεν 39 ἡμ. καὶ 9 ὥρας.

Δ. Ἀφαίρεσις.

Προβλήματα:

α)	β)	γ)
125 δωδ. 6 κ.	125 δ. — κ. (12)	125 δ. 3 κ. (12)
— 48 » 4 »	— 48 » 4 »	— 48 » 4 »
77 δ. 2 κ.	76 δ. 8 κ.	76 δ. 11 κ.

Διατύπωσις:

α) Ἀφαιροῦμεν πρῶτα τὰ κομμάτια καὶ κατόπιν τὰς δωδεκάδας κ. τ. λ.

β) Ἐπειδὴ ὁ μειωτέος δὲν ἔχει κομμάτια, παίρνομεν 1 δωδεκάδα του καὶ τὴν τρέπομεν εἰς κομμάτια. 1 δ.=12 κ. 12 κ. – 4 κ. = 8 κ. κ. τ. λ.

γ) Ἐπειδὴ ἀπὸ τὰ 3 κομμάτια τοῦ μειωτέου δὲν ἀφαιροῦνται τὰ 4 τοῦ ἀφαιρετέου, παίρνομεν 1 δωδ. τοῦ μειωτέου καὶ τὴν τρέπομεν εἰς κομμάτια. 12 κ. + 3 κ.=15 κ., — 4 κ.=11 κ. κ. τ. λ.

Ε. Πολλαπλασιασμός.

1 Πρόβλημα: 5 π. 6 ρ. Διατύπωσις: 6 ρ.×7=42 ρ.=5π.2 ρ.

× 7 Γράφομεν τὰ 2 ρούπια εἰς τὴν θέσιν

40 π. 2 ρ. τῶν ρουπίων κ.τ.λ.

2 Πρόβλημα: 35 π. 6 ρ.

× 23 =138 ρ. | 8

822 π. 2 ρ. 58 | 17π.2 ρ.

2 ρ.

105	ἢ	105
70		70
805		17
17		822π.
822		

Διατύπωσις: Πολλαπλασιάζομεν πρῶτα τὰ 6 ρ. μὲ τὸ 23. Γίνεται, ὅπως παριστάνεται ἀνωτέρω. Εὑρίσκομεν 138 ρ. Τὰ τρέπομεν εἰς πήχεις, διαιροῦντες μὲ τὸ 8. Γίνεται, ὅπως παριστάνεται. Τὰ 138 ρ.=17 π. 2 ρ. Γράφομεν τὰ 2 ρ. εἰς τὴν θέσιν τῶν ρουπίων. Τοὺς 17 π. θὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν πήχεων. Πολλαπλασιάζομεν τώρα τοὺς 35 π. μὲ τὸ 23. Γίνεται, ὅπως παριστάνεται ἀνωτέρω. Τὸ γινόμενον εἶναι 805 π. καὶ 17 π.=822 π. Λοιπὸν 35 π. καὶ 6 ρ.×23=822 π. καὶ 2 ρούπ.

ϛ. Διαίρεσις.

Πρόβλημα: 545 δωδ. : 4=;

Διατύπωσις: 545 δωδ. : 4=136 δωδ. 3 κ.

14
25
1 δωδ.
12
12 κ.].

3. Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

Πρόβλημα : 13 ἐργάτ. λαμβάν. δι᾽ 6 ἡμ. 4 145 δρ. ἡμερομίσθ.
8 » » » 8 ἡμ. X »

Διατύπωσις : Ἀφοῦ οἱ 13 ἐργάται λαμβάνουν 4145 δρ., ὁ 1 ἐργάτης λαμβάνει τὸ 13 μέρος αὐτῶν, ἤτοι $\frac{4145}{13}$ δρ. (γράφεται, ὅπως παριστάνεται παραπλεύρως) καὶ οἱ 8 ἐργάται τὸ ποσὸν αὐτὸ ×8 (γράφεται, ὅπως παριστάνεται παραπλεύρως). Τόσα λαμβάνουν οἱ ἐργάται αὐτοὶ δι᾽ 6 ἡμέρας. Διὰ 1 ἡμέραν θὰ λάβουν τὸ 6 μέρος τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ, ἤτοι τὸ ποσὸν αὐτό : 6 (γράφεται, ὅπως παριστάνεται) καὶ διὰ 8 ἡμέρας θὰ λάβουν τὸ τελευταῖον αὐτὸ ποσὸν ×8 (γράφεται, ὅπως παριστάνεται). Ἐπακολουθεῖ ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων κ.τ.λ.

$$\frac{4145 \text{ δρ.} \times 8 \times 8}{13 \quad \times 6.}$$

---

4. Η ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΤΥΠΩΣΙΝ ΤΩΝ ΣΚΕΨΕΩΝ ΑΠΟΦΥΓΗ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΟΜΟΥ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΙΚΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ.

Ἐὰν πρόκειται ἡ διατύπωσις τῶν σκέψεων κατὰ τὴν ἀρίθμησιν νὰ ἀσκῇ τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν σαφῆ νόησιν καὶ εἰς τὴν ὀρθὴν ἔκφρασιν, πρέπει νὰ ἐκτριβοῦν ἀπὸ τὴν σχετικὴν χρῆσιν ὡρισμένα πραγματικὰ μαζὶ καὶ γλωσσικὰ σφάλματα, τὰ ὁποῖα παρουσιάονται συνήθως εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν ἀριθμητ. σκέψεων καὶ διὰ τὴν ἄρσιν τῶν ὁποίων δὲν καταβάλλεται ἡ πρέπουσα μέριμνα. Τὰ κυριώτερα δὲ ἀπὸ τὰ σφάλματα αὐτὰ εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

1) Ἡ σύγχυσις ***ἀριθμοῦ*** καὶ ***ψηφίου***. Ἀριθμοὶ ὑπάρχουν ἄπειροι, ψηφία ὅμως μόνον 10. Δι᾽ αὐτὸ πρέπει νὰ λέγεται : «εἰς τὸν ἀριθμὸν 1583 τὸ ψηφίον 8 εὑρίσκεται εἰς τὴν δευτέρην θέσιν καὶ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν 90», «οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ γράφουν ὡραῖα ψηφία» κ.τ.λ.

2) Ἡ χρῆσις τοῦ ὅρου «***δανείζομαι***» εἰς τὴν ἔγγραφον ἀφαίρεσιν. Ἡ χρῆσις αὐτὴ δὲν εἶναι ὀρθὴ ἀπὸ πραγματικῆς ἀπόψεως, διότι, ὅ,τι κανεὶς δανείζεται, πρέπει καὶ νὰ τὸ ἀποδίδῃ, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν. Ἀντὶ λοιπὸν νὰ λέγωμεν «δανειζόμεθα μίαν δεκάδα» πρέπει νὰ λέγωμεν «παίρνομεν μίαν δεκάδα καὶ τὴν τρέπομεν εἰς μονάδας».

3) Ἡ σύγχυσις ***τῶν παραγόντων*** εἰς τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐὰν ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ ἅλατος στοιχίζῃ 5 δρ., αἱ 15 ὀκ. δὲν στοιχίζουν 5 φορὰς τὸ 15 (τὰς 15 ὀκάδας :), ἀλλὰ 15 φορὰς τὰς 5 δρ. Καὶ ἐὰν ἀκόμη πρόκειται μὲ τὴν ἐναλλαγὴν τῶν παραγόντων νὰ γίνῃ ***εὐκολία*** εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, πρέπει πρῶτα νὰ διατυπωθῇ ὁ ὀρθὸς πολλαπλασιασμὸς καὶ ἔπειτα νὰ δηλωθῇ, ὅτι χάριν εὐκολίας ἀλλάσσεται ἡ θέσις τῶν παραγόντων.

4) Ἡ σύγχυσις ***τοῦ μερισμοῦ*** καὶ ***τῆς μετρήσεως*** εἰς τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα τῆς διαιρέσεως. Λύοντες π. χ. οἱ μαθηταὶ τὸ πρόβλημα «ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ ἄρτου πωλεῖται 9 δραχμάς· πόσας ὀκάδ. θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 27 δραχμάς ;» δὲν πρέπει νὰ λέγουν «θὰ ἀγοράσωμεν τὸ 9 μέρος τῶν 27 (δραχμῶν ;) ἤτοι 3 ὀκάδας», ἀλλὰ «θὰ ἀγοράσωμεν τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς χωροῦν αἱ 9 δρ. εἰς τὰς 27 δρ.». Ἀπεναντίας δὲ λύοντες τὸ πρόβλημα «αἱ 3 ὀκ. τοῦ ἄρτου στοιχίζουν 27 δραχμάς· πόσον στοιχίζει ἡ 1 ὀκᾶ ;» δὲν πρέπει νὰ λέγουν «ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸ 3 εἰς τὸ 27», ἀλλὰ «ἡ 1 ὀκᾶ στοιχίζει τὸ 3 μέρος τῶν 27 δραχμῶν».

5) Ἡ ἐσφαλμένη χρῆσις τῶν ὅρων «***περισσότερον***» καὶ «***ὀλιγώτερον***», «***μεγαλύτερος***» καὶ «***μικρότερος***» κ. τ. λ. Ἐὰν ἡ 1 ὀκᾶ τῶν μήλων στοιχίζῃ 15 δρ., αἱ 3 ὀκ. δὲν στοιχίζουν 3 φορὰς περισσότερον, ἀλλὰ τὸ τριπλάσιον τῆς ὀκᾶς ἢ 3 φορὰς τόσον ὅσον ἡ 1 ὀκᾶ. Ἐὰν αἱ 3 ὀκ. τῶν μήλων στοιχίζουν 45 δρ., ἡ 1 ὀκᾶ δὲν στοιχίζει 3 φορὰς ὀλιγώτερον, ἀλλὰ τὸ 3 μέρος τῶν 45 δρ. Ὁ 60 δὲν εἶναι 5 φορὰς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 12 καὶ ὁ 12 δὲν εἶναι 5 φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν 60, ἀλλὰ ὁ μὲν 60 εἶναι 5 φορὰς τόσος, ὅσος ὁ 12 (ἢ πενταπλάσιος τοῦ 12), ὁ δὲ 12 εἶναι τὸ 5 μέρος τοῦ 60. Ἀπεναντίας ὀρθὴ εἶναι ἡ διατύπωσις «ὁ 60 εἶναι κατὰ 10 μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 50» κ.τ.λ.

6) Ἡ χρῆσις τοῦ «τί ;» ἀντὶ τοῦ «πόσον ;» (π. χ. «***τί*** στοιχίζουν 5 ὀκ. κάρβ. κ. τ. λ.» ἀντὶ τοῦ ὀρθοῦ «***πόσον*** στοιχίζουν κ. τ. λ.»).

7) Ἡ μὴ πρακτικὴ τοποθέτησις τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς τὴν πρώτην ἀρίθμησιν. Λύοντες π.χ. οἱ μαθηταὶ τῆς κατωτάτης βαθμίδος τὸ πρόβλημα «ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ ἅλατος στοιχίζει 5 δραχμάς·

πόσον στοιχίζουν αἱ 3 ὀκάδες;» δὲν πρέπει νὰ λέγουν «αἱ 3 ὀκάδες στοιχίζουν τὰς 5 δραχ. 3 φοράς», ἀλλὰ «αἱ 3 ὀκάδες στοιχίζουν 3 φορὰς τὰς 5 δραχμάς». Εἶναι ἀληθές, ὅτι εἰς τὴν Θεωρητικὴν Ἀριθμητικὴν ὁ πολλαπλασιαστέος προτάσσεται ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀλλὰ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ ἐν γένει εἰς τὴν συνήθη καὶ γνωστὴν εἰς τοὺς παῖδας χρῆσιν γίνεται τὸ ἀντίθετον, λέγεται δηλ. «αἱ 3 ὀκ. στοιχίζουν 3 φορὰς τὰς 5 δρ.». Δι' αὐτὸ λοιπὸν καὶ εἰς τὴν πρώτην ἀρίθμησιν πρέπει νὰ προτάσσεται ὁ πολλαπλασιαστής. Ἀργότερα φυσικά, καὶ ὡρισμένως ἀπὸ τὸ τρίτον σχολικὸν ἔτος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ὁ γραπτὸς πολλαπλασιασμός, εἰς τὸν ὁποῖον προτάσσεται ὁ πολλαπλασιαστέος ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστήν, ὀρθὸν εἶναι χάριν τοῦ ἑνιαίου νὰ γίνεται τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, νὰ λέγεται δὲ ἔτσι καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα «αἱ 3 ὀκ. στοιχίζουν τὰς 5 δρ. 3 φοράς, 5 δρ.×3»].

XVI. Η ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ.

Ποῖοι ἦσαν συνήθως εἰς παλαιοτέρους χρόνους οἱ καρποὶ τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας, μᾶς πληροφορεῖ ὁ *Jeremias Gotthelf* εἰς τὸ ἔργον του «Λῦπαι καὶ χαραὶ ἑνὸς διδασκάλου» (Leiden und Freuden eines Schulmeisters, 1856), εἰς τὸ ὁποῖον λέγει μεταξὺ ἄλλων καὶ τὰ ἑξῆς: «Καὶ ὅλα αὐτὰ ἐγίνοντο (εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς Ἀριθμητικῆς) μὲ τόσον κόπον καὶ τόσην βραδύτητα, διότι ποτὲ δὲν ἐδίδετο ὁ λόγος οὔτε διὰ τὸ παραμικρόν, διότι ποτὲ δὲν ἤξευραν οἱ μαθηταί, διατὶ ἔπρεπε νὰ κάμουν ἔτσι καὶ ὄχι ἀλλιῶς. Καὶ δι' αὐτὸ ἀκριβῶς ἐλησμονοῦσαν ἀμέσως, ὅ,τι ἐμάνθαναν. Ὄχι μόνον ἔπρεπε κάθε χειμῶνα νὰ κάμουν ὅλα ἀπὸ τὴν ἀρχὴν μὲ τὸν ἴδιον πάντοτε κόπον, ὄχι μόνον δὲν ἤξευραν τίποτε πλέον ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικήν, μόλις ἐτελείωναν τὸ σχολεῖον, ἀλλὰ καὶ ἐξεχνοῦσαν ἀκόμη τὴν μίαν πρᾶξιν χάριν τῆς ἄλλης καί, ὅταν ἦσαν εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, εἶχαν λησμονήσει πλέον ὅλως διόλου τὴν ἀφαίρεσιν. Ὅταν κάποτε εἰς κάποιας ἐξετάσεις ὁ κύριος ἐφημέριος ἠθέλησε νὰ μᾶς δώσῃ μίαν πρόσθεσιν, ὁ διδάσκαλος τοῦ εἶπε: «Συγγνώμην, αἰδεσιμώτατε! Ἔχομεν πολὺν καιρὸν νὰ κάμωμεν τέτοια προβλήματα· δι' αὐτὸ καὶ τὰ παιδιὰ δὲν θὰ τὰ ἐνθυμοῦνται πλέον· τώρα εἴμεθα εἰς τὴν διαίρεσιν». Τὸ πρᾶγμα δὲν ἐξένισε τοὺς προϊσταμένους· τὸ ηὗραν ὅλως διόλου φυσικόν, ἀφοῦ ἄλλωστε καὶ ὁ κύριος διοικητὴς εἶπε: «ἀκριβῶς τὸ ἴδιο ἐπάθαινα κι ἐγώ· καὶ σήμερα ἀκόμη λησμονῶ καθετί, ποὺ ἔχω πολὺν καιρὸν νὰ τὸ πιάσω»...». Ὁ Gotthelf θεωρεῖ ὡς αἴτια τῆς καταστάσεως αὐτῆς τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας τὰ ἑξῆς δύο, πρῶτον τὸ ὅτι δὲν ἐλαμβάνετο φροντὶς διὰ τὴν πραγματικὴν κατανόησιν τῆς ὕλης καὶ δι' αὐτὸ ἡ πρόσληψίς της ἐγίνετο ὅλως διόλου μηχανικὰ καὶ δεύτερον τὸ ὅτι δὲν ἐγίνετο **ἐπανάληψις** τῆς διδαχθείσης ὕλης. Τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω κακὰ δὲν ἐμφανίζεται πλέον σήμερα παρὰ σπανίως· ἀλλὰ ἡ πρέπουσα ἐπανάληψις τῆς διδαχθείσης ὕλης δὲν γίνεται καὶ σήμερα ἀκόμη ἀπὸ πολλοὺς διδασκάλους. Νομίζουν, ὅτι ἀρκεῖ καὶ ὑπεραρκεῖ νὰ κάμουν τοὺς παῖδας νὰ κατανοήσουν κάθε διδασκομένην πρᾶξιν καὶ κατόπιν νὰ τοὺς ἀσκήσουν εἰς αὐτήν, [θεωροῦν δὲ περιττὸν νὰ ἐπαναλάβουν εἰς τὸ μέλλον τὴν ἅπαξ διδαχθεῖσαν, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι κατ' ἀνάγκην θὰ ἐπαναληφθῇ κάποτε κατὰ τὴν πρόοδον τῆς διδασκαλίας. Διότι εἶναι ἀληθές, ὅτι εἰς τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς γίνεται συχνότερα παρὰ εἰς κάθε ἄλλο μάθημα ἐπανάληψις τῶν παλαιῶν ὑλῶν κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν νέων, διότι εἰς τὸ μάθημα αὐτὸ περισσότερον παρὰ εἰς κάθε ἄλλο κάθε ἑπομένη ὕλη συνδέεται στενὰ μὲ κάποιας προηγουμένας καὶ στηρίζεται ἐπάνω εἰς αὐτάς. Ἐν τούτοις ἡ πεῖρα μᾶς δεικνύει, ὅτι ἡ **ἐσωτερικὴ** αὐτὴ ἐπανάληψις τῶν διδαχθεισῶν ὑλῶν δὲν ἀρκεῖ καὶ ὅτι χρειάζεται καὶ **σκόπιμη, συστηματικὴ** καὶ **ἔγκαιρη** ἐπανάληψίς των, ἂν πρόκειται νὰ διατηροῦνται πάντοτε εἰς τὴν μνήμην καὶ νὰ χρησιμεύουν καὶ διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἑπομένων ὑλῶν. Συχνάκις ὁ μεταξὺ τῆς διδασκαλίας μιᾶς ὕλης καὶ τῆς ἐσωτερικῆς ἐπαναλήψεώς της ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας μιᾶς ἑπομένης ὕλης μεσολαβῶν χρόνος εἶναι τόσος, ὥστε ἡ ὕλη αὐτὴ νὰ ἔχῃ ἐντελῶς λησμονηθῆ ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Ἐννοεῖται δέ, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνεται πλέον λόγος οὔτε περὶ ἐπαναλήψεως τῆς ὕλης αὐτῆς, ἀλλὰ περὶ νέας διδασκαλίας.

της, ἡ ὁποία φυσικὰ θὰ ἀπαιτήσῃ πολὺ περισσότερον χρόνον ἀπὸ ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος θὰ ἐδαπανᾶτο, ἂν ἐπαναλαμβάνετο ἡ ὕλη αὐτὴ ἔγκαιρα, ἐφόσον δηλ. ὑπῆρχε ἀκόμη ὁπωσδήποτε ζωηρὰ εἰς τὴν συνείδησιν τῶν μαθητῶν, οὔτε περὶ χρησιμοποιήσεώς της διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ἐπ' αὐτῆς στηριζομένης ἀδιδάκτου ὕλης, τῆς ὁποίας ἡ διδασκαλία θὰ μείνῃ κατ' ἀνάγκην εἰς τὸ μέσον, διὰ νὰ γίνῃ ἐξ ἀρχῆς ἡ διδασκαλία τῆς παλαιᾶς, ἐπάνω εἰς τὴν ὁποίαν στηρίζεται. Ἂν π.χ. εἶναι ἀληθές, ὅτι κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν σειρὰν 1—1000, ἡ ὁποία γίνεται εἰς τὴν τρίτην τάξιν, θὰ ἐπαναληφθῇ κατ' ἀνάγκην ὁ Πυθαγόρειος πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς σειρᾶς 1—100, ὁ ὁποῖος διδάσκεται εἰς τὴν δευτέραν τάξιν, εἶναι ὅμως ἐξ ἴσου βέβαιον, ὅτι, ἐπειδὴ ἀπὸ τὸν χρόνον τῆς διδασκαλίας τοῦ Πυθαγορ. πίνακος μέχρι τοῦ χρόνου τῆς διδασκαλίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 θὰ ἔχῃ μεσολαβήσει ἀρκετὸς χρόνος, ἤτοι ὁ χρόνος τῶν σχολικῶν διακοπῶν καὶ ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὴν σειρὰν 1—1000, ὁ πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἂν δὲν γίνῃ συστηματικὴ ἐπανάληψίς του ἐν τῷ μεταξύ, ἤτοι κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὴν σειρὰν 1—1000, θὰ ἔχῃ κατὰ μέγα μέρος λησμονηθῆ, ὅταν θὰ ἀρχίσῃ ἡ διδασκαλία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν σειρὰν 1—1000, θὰ πρέπῃ δὲ νὰ διδαχθῇ ἐκ νέου τόσον διὰ νὰ γίνῃ πάλιν κτῆμα τῶν μαθητῶν, ὅσον καὶ διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν σειρὰν 1—1000. Προφανὲς εἶναι λοιπόν, ὅτι εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γίνεται εἰς τὴν ἀριθμητ. διδασκαλίαν καὶ σκόπιμη καὶ συστηματικὴ καὶ ἔγκαιρη ἐπανάληψις τῶν θεμελιωδεστέρων τοὐλάχιστον ἀπὸ τὰς διδαχθείσας ὕλας]. Ὅσοι διδάσκαλοι δὲν κάμνουν τέτοιας συστηματικὰς ἐπαναλήψεις, ἀλλ' ἀρκοῦνται, ὅπως εἴδαμεν, εἰς τὴν καλὴν διδασκαλίαν κάθε νέας ἀριθμητ. ὕλης καὶ εἰς τὴν συνδρομὴν τῆς ἐσωτερικῆς ἐπαναλήψεως, εὑρίσκονται συχνὰ ἀπατημένοι ὡς πρὸς τὴν πρόοδον τῶν μαθητῶν των. Παρατηροῦν μὲ ἔκπληξίν των ἀπὸ καιρὸν εἰς καιρόν, ὅτι πολλαὶ ἀπὸ τὰς γνώσεις, τὰς ὁποίας τόσον ὡραῖα ἔμαθαν οἱ μαθηταί των, δὲν διατηροῦνται πλέον εἰς τὴν μνήμην των καὶ εἶναι ὑποχρεωμένοι νὰ ὑποβάλλωνται εἰς τὸ τόσον ὀχληρὸν ἔργον

τῆς ἐκ νέου συστηματικῆς διδασκαλίας παλαιῶν καὶ ὡς τελείως πλέον γνωστῶν θεωρουμένων ὑλῶν. Καὶ εἰς αὐτὰς ἀκόμη τὰς ἀνωτάτας τάξεις συμβαίνει συχνὰ κατὰ τὴν λύσιν συνθέτων προβλημάτων, ἐνῷ ὅλα προχωροῦν καλά, νὰ προσκόπτουν ἔξαφνα οἱ μαθηταὶ εἰς κάποιον μικρὸν ἐμπόδιον καὶ νὰ μὴ ἠμποροῦν νὰ προχωρήσουν. Ἡ αἰτία φυσικὰ τοῦ πράγματος δὲν εἶναι ἄλλη παρὰ ὅτι ἔχουν λησμονήσει τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως κάποιας πράξεως, ἡ ὁποία ἴσως νὰ εἶναι εὐκολώτατη, ἔχει ὅμως λησμονηθῆ, διότι ἅπαξ διδαχθεῖσα δὲν ἔχει ποτὲ ἐπαναληφθῆ. [Δι' αὐτοὺς ἀκριβῶς τοὺς λόγους προχωροῦμεν ἀκόμη περισσότερον καὶ ζητοῦμεν ἀπὸ τὸν διδάσκαλον νὰ προβαίνῃ εἰς τὴν ἐπανάληψιν διδαχθεισῶν ὑλῶν καὶ πρὸ τοῦ χρόνου ἀκόμη, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁρίσει διὰ τὴν ἐπανάληψίν των, ἂν ὑποπτευθῇ, ὅτι αἱ ὕλαι αὐταὶ κινδυνεύουν νὰ λησμονηθοῦν]. Ἠμπορεῖ δὲ νὰ τοῦ γεννηθῇ ἡ ὑποψία αὐτὴ καὶ ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἄλλων μαθημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἐπίσης πρέπει νὰ ἔχῃ ἀνοικτοὺς τοὺς ὀφθαλμούς του, διὰ νὰ ἀνακαλύπτῃ τὰς ἀριθμητικὰς ἐλλείψεις τῶν μαθητῶν του, ἀκριβῶς ὅπως κάμνει διὰ τὰς γλωσσικάς.

[Διὰ νὰ γίνεται τώρα ἡ συστηματικὴ ἐπανάληψις τῶν διδαχθεισῶν ὑλῶν ὅσον τὸ δυνατὸν ἀνετώτερα,] ἀπαραίτητον εἶναι νὰ ἀφιερώνεται δι' αὐτὴν κατὰ κανόνα ὀλίγος χρόνος εἰς κάθε διδακτικὴν ὥραν [καὶ ὡρισμένως, εἰς τὸ διδακτικὸν στάδιον τῆς ἀσκήσεως]. Πέντε λεπτὰ θὰ ἀρκοῦν συνήθως διὰ τὴν ἐπανάληψιν, ἐν ἀνάγκῃ ὅμως ἠμποροῦν νὰ διατεθοῦν καὶ περισσότερα. [Δὲν πρέπει δὲ νὰ ἀντιτείνῃ κανείς, ὅτι, ἂν ἐξοδεύεται πολὺς χρόνος διὰ τὴν ἐπανάληψιν, δὲν θὰ μένῃ ἀρκετὸς διὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ νέου. Διότι ἡ δαπάνη αὐτὴ τοῦ χρόνου χρησιμεύει διὰ τὴν γρηγορώτερην, εὐκολώτερην καὶ ἀσφαλέστερην πρόσληψιν τῶν ἀδιδάκτων ὑλῶν (ἴδ. καὶ *Büttner*, ὅπ. ἀν., σ. 17). Εἶναι δὲ αὐτονόητον, ὅτι, ἐπειδὴ ὁ διὰ τὴν ἐπανάληψιν προσδιωρισμένος χρόνος εἶναι ἐν γένει ὀλίγος, πρέπει ὁ διδάσκαλος νὰ τὸν χρησιμοποιῇ ὅσον τὸ δυνατὸν τελειότερα πρὸς ἐκπλήρωσιν τοῦ ἐπιδιωκομένου σκοποῦ, ἀποφεύγων τοὺς πολλοὺς λόγους καὶ τὰς περιττὰς παρατηρήσεις καὶ θέτων προβλήματα σύντομα, λιτὰ εἰς λέξεις καὶ κατάλληλα νὰ ἀποβαίνουν ἀφετηρία ὁλοκλήρου σειρᾶς νέων προβλημάτων (ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 20)]. Ὅτι δὲ διὰ τὴν ἐπανάληψιν χρησιμεύει πολὺ καὶ ἡ διαδοχικὴ ἀρίθμησις, τὸ εἴδαμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος (ἴδ. ἀν. σελ.235). [Διὰ νὰ κινῆται δὲ περισσότερον τὸ διαφέρον τῶν παίδων, καλὸν εἶναι νὰ ἐπιδιώκεται ποικιλία εἰς τὴν γλωσσικὴν διατύπωσιν τῶν ἐπαναλαμβανομένων πράξεων. Ἡ πρᾶξις π. χ. 50—30=20 ἠμπορεῖ νὰ διατυπωθῇ «50 ἔξω 30 ἴσον (ἢ μένουν) 20», «30 ἀπὸ 50 ἴσον 20», «τὸ 50 εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ 30 κατὰ 20», «ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ 50 καὶ τοῦ 30 εἶναι 20» κ.τ.λ. (ἴδ. Büttner, ὅπ. ἀν.). Διὰ νὰ γίνεται δὲ ὅσον τὸ δυνατὸν σκοπιμώτερα ἡ ἐπανάληψις, πρέπει νὰ ἐκτελῆται σύμφωνα μὲ σχέδιον ὡρισμένον ἀπὸ πρὶν καὶ προσαρμοσμένον εἰς τὰς ἀνάγκας τῆς τάξεως]. Περιττὸν δὲ εἶναι τέλος νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἡ ἐπανάληψις θὰ ἐκτείνεται καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης καὶ εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν [καὶ ὅτι, ἐφόσον ὁ διδάσκαλος παρατηρεῖ, ὅτι οἱ μαθηταὶ μὲ τὴν συχνὴν ἐπανάληψιν ἔχουν γίνει πλέον τέλειοι κάτοχοι μιᾶς ἀριθμητικῆς ὕλης, πρέπει νὰ παύσῃ εἰς τὸ ἑξῆς νὰ τοὺς προκαλῇ εἰς τὴν ἐπανάληψίν της (ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν.)].

Πολλοὶ ἐπρότειναν, ὅπως εἰς τὰ σχολεῖα τὰ κατώτερα ἀπὸ τὰ ἑξατάξια δύο ἢ καὶ τρεῖς διαδοχικαὶ τάξεις συνενώνωνται πρὸς ἐπανάληψιν παλαιοτέρας καὶ γνωστῆς εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς τάξεις ὕλης. Ὁ *Steuer* (Methodik des Rechenunterrichts, σ. 91) καταφέρεται ἐναντίον τῆς συνενώσεως αὐτῆς, παρατηρῶν τὰ ἀκόλουθα: «Ἡ συνένωσις δύο τάξεων πρὸς κοινὴν ἐπανάληψιν δὲν μοῦ φαίνεται σκόπιμη, διότι οἱ παῖδες δύο σχολικῶν ἐτῶν διαφέρουν τόσον εἰς τὴν ἀριθμητικὴν δεξιότητα, ὥστε οἱ μαθηταὶ τῆς κατωτέρας τάξεως θὰ μειονεκτοῦν καὶ εἰς αὐτὴν ἀκόμη τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ δίδωνται προβλήματα μὴ ὑπερβαίνοντα τὰς δυνάμεις των. Οἱ μαθηταὶ τῆς ἀνωτέρας τάξεως θὰ ἠμποροῦν νὰ ἀποκρίνωνται γρηγορώτερα, δὲν θὰ ἔχῃ δὲ ὁ διδάσκαλος τὴν ὑπομονὴν νὰ περιμένῃ καὶ τοὺς ἄλλους, οὔτε ἄλλωστε θὰ θέλῃ νὰ δαπανᾷ τὸν ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀναμονὴν αὐτὴν χρόνον. Ἐὰν δὲ πάλιν ἀποφασίσῃ νὰ τοὺς περιμένῃ, θὰ ὑποφέρουν οἱ μαθηταὶ τῆς ἀνωτέρας τάξεως. Φυσικὰ δὲ τὰ ἄτοπα αὐτὰ θὰ ἐπαυξάνωνται, ἂν συνενώνωνται τρεῖς τάξεις».

Τὴν συνένωσιν τριῶν τάξεων ἀποκρούομεν καὶ ἐμεῖς, δὲν εἴμεθα ὅμως καὶ ἐναντίον τῆς συνενώσεως δύο διαδοχικῶν τάξεων,

διότι νομίζομεν, ὅτι τὰ προκύπτοντα ἀπὸ τὴν συνένωσιν αὐτὴν ὠφελήματα ὑπερθεματίζουν τὸ μειονέκτημα τῆς δαπάνης περισσοτέρου χρόνου. Εἰς τὰς ἐπαναλήψεις, τὰς ὁποίας θὰ κάμνουν μαζὶ οἱ μαθηταὶ τῶν δύο τάξεων, θὰ πρέπῃ βέβαια καὶ οἱ ἀσθενέστατοι μαθηταὶ τῆς ἀνωτέρας νὰ λύουν ὅλα τὰ διδόμενα προβλήματα. Ἡ πεῖρα τώρα μᾶς δεικνύει, ὅτι αἱ σχετικαί των προσπάθειαι δὲν διαρκοῦν ὀλιγώτερον χρόνον ἀπὸ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον δαπανοῦν διὰ τὸν ἴδιον σκοπὸν οἱ συνήθεις μαθηταὶ τῆς κατωτέρας τάξεως.

Αἱ θεμελιωδέστεραι τώρα ἀριθμητικαὶ καὶ πραγματικαὶ ὗλαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀνάγκην συχνῆς, διὰ νὰ μὴ εἴπωμεν διαρκοῦς, ἐπαναλήψεως, [διὰ νὰ ἐντυπωθοῦν τόσον στερεὰ εἰς τὴν μνήμην τῶν μαθητῶν καὶ νὰ ἀποβοῦν τόσον εὐδιάθεται, ὥστε νὰ χρησιμοποιοῦνται αἱ μὲν εὐκολώτεραι ἀπὸ αὐτὰς μὲ μηχανικὴν αὐτόχρημα εὐκολίαν, αἱ δὲ δυσκολώτεραι μὲ τὴν πρέπουσαν ἀσφάλειαν], εἶναι αἱ ἑξῆς:

[α) Ἀπὸ τὴν σειρὰν 1—20 τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν:

1. Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς τὴν σειρὰν αὐτήν.
2. Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς.

β) Ἀπὸ τὴν σειρὰν 1—100:

1. Ἡ πρόσθεσις εἰς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν 1—10 μὲ ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος.
2. Ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν 1—10 ὁμοίως.
3. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις διψηφίων.
4. Ὁ μικρὸς πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.
5. Αἱ διαιρέσεις αἱ δίδουσαι πηλίκον μονοψήφιον.
6. Ὁ πολλαπλασιασμὸς διψηφίου μὲ μονοψήφιον καὶ τὸ ἀντίθετον.
7. Αἱ διαιρέσεις αἱ δίδουσαι πηλίκον διψήφιον.
8. Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς εἰς τοὺς παράγοντάς των.

γ) ἀπὸ τὰς σειρὰς 1—1000 καὶ 1 μέχρι τῶν ἑκατομμυρίων:

1. Ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ πρόσθεσις τριψηφίων.
2. Ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ ἀφαίρεσις διψηφίων καὶ τριψηφίων ἀπὸ τὸν 1000 καὶ ἀπὸ τριψηφίους ἀριθμούς.

3. Ὁ ἀπὸ μνήμης καὶ ὁ γραπτὸς πολλαπλασιασμὸς διψηφίων.
4. Ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ διαίρεσις τοῦ 1000 καὶ τριψηφίων ἀριθμῶν μὲ μονοψηφίους, διψηφίους καὶ τριψηφίους.
5. Ἡ γραφὴ δυσκόλων πολυψηφίων ἀριθμῶν.
6. Ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις, καὶ ἰδίως ἡ διαίρεσις, μὲ πολυψηφίους ἀριθμούς. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις μὲ τὸν 10, 100, 1000.

δ) Ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς:
1. Τὰ νομίσματα, τὰ μέτρα καὶ τὰ σταθμά.

ε) Ἀπὸ τὰ κοινὰ κλάσματα.
1. Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς αὐτά.

Κατὰ ποῖον τώρα σχέδιον ἠμποροῦν νὰ ἐπαναλαμβάνωνται καλύτερα αἱ ἀνωτέρω ὕλαι, θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς διατάξεως τῆς ὕλης τοῦ κάθε σχολικοῦ ἔτους.]

XVII. ΣΥΛΛΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ.

1. ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΙΣΤΟΡΙΚΑΙ ΕΙΔΗΣΕΙΣ. ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ ΤΩΝ ΣΥΛΛΟΓΩΝ.

Παλαιότερα ἐγίνετο πολλὴ συζήτησις διὰ τὸ ζήτημα, ἂν αἱ συλλογαὶ ἀριθμητικῶν προβλημάτων εἶναι ἐν γένει ἀναγκαῖαι διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς Ἀριθμητικῆς. Σήμε α καὶ οἱ διδάσκοντες καὶ αἱ ἐπίσημαι ἀρχαὶ παραδέχονται σχεδὸν ὁμόφωνα, ὅτι αἱ συλλογαὶ αὐταί, [—ἐφόσον προϋποθέτουν διδαγμένον καὶ γνωστὸν εἰ τοὺς μαθητὰς τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν περιεχομένων εἰς αὐτὰς προβλημάτων καὶ ἔχουν σκοπὸν νὰ δίδουν μόνον εἰς τοὺς μαθητὰς εὐκαιρίαν, ὅπως ἀσκηθοῦν περισσότερον εἰς τὸν τρόπον αὐτὸν καὶ κάμουν καὶ τὴν πρέπουσαν ἐφαρμογήν του—], ἀνήκουν εἰς τὰ ἀναγκαιότατα διδακτικὰ μέσα τοῦ κατωτέρου σχολείου. Ἐξοικονομοῦν ὅλον τὸν χρόνον, τὸν ὁποῖον θὰ ἐδαπανοῦσε ὁ διδάσκαλος διὰ [νὰ γράψῃ εἰς τὸν πίνακα ἢ] νὰ ὑπαγορεύσῃ τὰ διδόμενα εἰς τοὺς μαθητὰς προβλήματα. Εἶναι δὲ ὅλως διόλου ἀπαραίτηται εἰς τὰ ὀλιγοτάξια καὶ μονοτάξια σχολεῖα, ὅπου ἐξυπηρε-

τοῦν τὴν σιωπηρὰν ἐπασχόλησιν τῶν μαθητῶν τῶν τάξεων ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι δὲν διδάσκονται ἀπὸ τὸν διδάσκαλον (ἴδ. κατωτέρω τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς διδασκαλίας τῆς Ἀριθμ. εἰς τὰ δημοτ. σχολεῖα τὰ κατώτερα ἀπὸ τὰ ἑξατάξια). Ἄλλωστε μὲ τὰς καλὰς συλλογὰς ἐξασφαλίζεται καὶ ἡ μεθοδικὴ καὶ ἄνευ χασμάτων πρόοδος τῆς διδασκαλίας κάθε τάξεως. Ἰδιαιτέρως δὲ χρήσιμαι ἀποδεικνύονται αἱ συλλογαὶ κατὰ τὰς ἀναπληρώσεις καὶ τὰς μεταβολὰς τοῦ διδακτικοῦ προσωπικοῦ τῶν σχολείων. Δι᾽ αὐτὸ καὶ αἱ σχολικαὶ ἀρχαὶ ἐπιβάλλουν τὴν χρῆσίν των. Αἱ Πρωσσικαὶ «Γενικαὶ Διατάξεις» κανονίζουν ὡς πρὸς τὰς συλλογὰς τὰ ἀκόλουθα: «Ὡς βάσις τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας εἰς ὅλα τὰ σχολεῖα πρέπει νὰ ὑπόκειται μία συλλογὴ ἀριθμητικῶν προβλημάτων, τῶν ὁποίων αἱ λύσεις θὰ περιέχωνται εἰς ἰδιαίτερον βιβλιάριον, προοριζόμενον μόνον διὰ τὸν διδάσκαλον». [Καὶ εἰς τὴν Ἑλλάδα δὲ σύμφωνα μὲ τὴν Ὑπουργικὴν ἀπόφασιν τῆς 16 Φεβρουαρίου 1924 εἰσάγεται μετ᾽ ἔγκρισιν εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον, καὶ ὡρισμένως πρὸς χρῆσιν τῶν 4 ἀνωτέρων τάξεών του, ὡς βοηθητικὸν βιβλίον «συλλογὴ ἀριθμητικῶν προβλημάτων»]. Κατὰ τὴν γνώμην μας τὸ βιβλίον τῆς συλλογῆς εἶναι ἐντελῶς μὲν περιττὸν κατὰ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος, εὐκταῖον δὲ διὰ τὸ δεύτερον, ἀναγκαῖον δὲ ἀπὸ τὸ τρίτον σχολικὸν ἔτος καὶ ἐφεξῆς.

Αἱ συλλογαὶ εἶναι μέσον ἀσκήσεως, ἐφαρμογῆς καὶ ἐπαναλήψεως πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν καὶ ὄχι μέσον διδασκαλίας διὰ τὰς χεῖρας τοῦ διδασκάλου. Ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των λοιπὸν δὲν ἠμποροῦν νὰ περιέχουν τίποτε ἄλλο παρὰ προβλήματα. Μολοντοῦτο ἔχει ἐγερθῆ ὡς πρὸς αὐτὰς τὸ ζήτημα, ἂν πρέπει νὰ περιέχουν ἀποκλειστικῶς προβλήματα ἢ ἐκτὸς αὐτῶν καὶ ἐπεξηγήσεις καὶ ἄλλας προσθήκας. Ὁ *Diesterweg* παραδέχεται τὸ πρῶτον. Σύμφωνα μὲ ὅσα λέγει εἰς τὸ ἔργον του «Wegweiser κτλ.» (4 ἔκδ., 2 τόμ., σ. 357) τὰ προβληματάρια τῶν μαθητῶν «πρέπει νὰ εἶναι μία εὔτακτη καὶ πλούσια συλλογὴ προβλημάτων χωρὶς ὁποιονδήποτε κανόνα, χωρὶς ὁδηγίας πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων καὶ χωρὶς λύσεις προτύπων παραδειγμάτων». Ἐπίσης δὲ καὶ ὁ *Bartholomäi* ἀποκρούει διαρρήδην τὰς προσθήκας αὐτάς. Τὴν ἴδιαν δὲ γνώμην ἔχει ὡς πρὸς τὸ πρᾶγμα καὶ ὁ *Steuer*.

Ἀπεναντίας ὁ *Berthold Hartmann* εἰς τὰ τεύχη τῆς συλλο γῆς του τῶν ἀριθμ. προβλημάτων («Rechenbuch») περιλαμβάνει ἐκτὸς τῶν προβλημάτων καὶ μερικὰς διασαφήσεις καὶ ὑποδείξεις, καθὼς καὶ λύσεις μερικῶν προτύπων παραδειγμάτων. Τὸ κάμνει δὲ αὐτὸ διὰ τοὺς ἑξῆς λόγους:

α) Διότι ἀκριβῶς εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἔχει μεγάλην σημασίαν ὁ τρόπος τῆς λύσεως, ἂν δὲ οἱ μαθηταὶ ἔχουν λησμονήσει τὸν κανονικὸν τρόπον, ἠμποροῦν νὰ τὸν ἐπανεύρουν εἰς τὴν συλλογὴν (ἴδ. ἀνωτέρω τὸ κεφάλαιον περὶ τοῦ κανονικοῦ τρόπου τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων κ.τ.λ.).

β) Διότι μὲ τὴν λύσιν τῶν προτύπων παραδειγμάτων καὶ τὰς διασαφήσεις ἠμποροῦν νὰ προληφθοῦν πολλαὶ ἐσφαλμέναι ἀντιλήψεις, [αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὴν διατύπωσιν τῶν προβλημάτων εἰς τὴν συλλογήν].

γ) Διότι μὲ τὰ ἴδια μέσα εἰσάγεται καὶ ἑνότης [ὡς πρὸς τὸν κανονικὸν τρόπον τῆς λύσεως κάθε εἴδους προβλημάτων] εἰς τοὺς μεγάλους σχολικοὺς ὀργανισμούς, καθὼς καὶ εἰς ὁλοκλήρους σχολικὰς περιφερείας.

[Ἐπίσης δὲ καὶ ὁ *Räther* (ὄπ. ἀνωτ., μέρ. 2, σελ. 29), μολονότι κατ' ἀρχὰς ἦτο σύμφωνος μὲ τὴν γνώμην τοῦ Diesterweg, ἐν τούτοις κατόπιν, διδαχθεὶς ἀπὸ τὴν πεῖραν, κατέληξεν εἰς τὴν γνώμην, ὅτι εὐκταῖον εἶναι εἰς κάθε ὁμάδα προβλημάτων τῆς συλλογῆς νὰ περιέχεται ὁ κανονικὸς τρόπος τῆς λύσεως ἑνὸς μόνον προβλήματος τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως, διότι μὲ τὸ μέσον αὐτὸ ὑποβοηθεῖται ἡ ἀποκατάστασις ἑνότητος εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν ἑνὸς σχολείου ἢ καὶ μιᾶς ὁλοκλήρου περιφερείας. Προσθέτει δὲ μάλιστα ὁ R., ὅτι τὸ μέσον αὐτὸ εἶναι αὐτόχρημα ***ἀναγκαῖον*** εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν πολλοὶ δυνατοὶ τρόποι τῆς γραπτῆς ἐκτελέσεως μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως, πρέπει δὲ οἱ μαθηταὶ νὰ ἀσκηθοῦν εἰς ἕνα μόνον ἀπὸ αὐτοὺς ὡς κανονικὸν (ἴδ. ἀνωτ. τὸ κεφάλαιον περὶ τοῦ κανονικοῦ τρόπου τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων κ.τ.λ.)].

2. Η ΓΝΩΜΗ ΜΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ, ΤΟΥΣ ΟΠΟΙΟΥΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΚΠΛΗΡΩΝΟΥΝ ΑΙ ΚΑΛΑΙ ΣΥΛΛΟΓΑΙ.

Αἱ καλαὶ συλλογαὶ πρέπει νὰ ἐκπληρώνουν κατὰ τὴν γνώμην μας τοὺς ἀκολούθους ὅρους:

[1. Πρέπει τὰ προβλήματά των νὰ ἔχουν διαταχθῆ εἰς ὁμάδας, ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς ὁποίας θὰ ἀναφέρεται εἰς ὡρισμένην ἀριθμητικὴν ὕλην ἀπὸ τὰς διδασκομένας εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον.

2. Πρέπει νὰ προϋποθέτουν, ὅτι αἱ ἀριθμητικαὶ ὗλαι, εἰς τὰς ὁποίας ἀναφέρονται αἱ διάφοροι ὁμάδες τῶν προβλημάτων των, εἶναι γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθητὰς ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν, καὶ δι' αὐτὸ νὰ παρουσιάζουν εἰς κάθε ὁμάδα] α) προβλήματα ἀσκήσεως εἰς τὴν σχετικὴν ἀριθμητικὴν ὕλην [μὲ συγκεκριμένους καὶ ἀφηρημένους ἀριθμούς], β) προβλήματα ἐφαρμογῆς τῆς ὕλης αὐτῆς εἰς τὸν πραγματικὸν πρακτικὸν βίον [καὶ τὰ πραγματικὰ μαθήματα] καὶ γ) προβλήματα ἐπαναλήψεως διδαγμένων, ἀλλὰ θεμελιωδῶν ἀριθμητικῶν ὑλῶν.

3. Πρέπει εἰς κάθε ὁμάδα νὰ περιλαμβάνωνται ἐπαρκῆ ὡς πρὸς τὸν ἀριθμόν, ἀλλὰ ὄχι καὶ περισσότερα ἀπὸ τὰ ἀναγκαιοῦντα καὶ περιττὰ προβλήματα.

4. Ἡ διάταξις τῶν ὁμάδων πρέπει νὰ εἶναι ὀρθὴ ἀπὸ μεθοδικῆς ἀπόψεως, (ἴδ. κατωτέρω τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς διατάξεως τῆς ὕλης τοῦ κάθε σχολικοῦ ἔτους), [ἀκόμη δὲ καὶ εὐσύνοπτη, διὰ νὰ ἠμπορῇ ὁ διδάσκαλος νὰ ἀλλάξῃ εὔκολα τὴν σειράν των, ἂν ἡ ἀλλαγὴ αὐτὴ ἐπιβάλλεται εἰς τὴν διδασκαλίαν του].

5. Μερικὰ ἀπὸ τὰ προβλήματα κάθε ὁμάδος θὰ εἶναι προβλήματα τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως, τὰ ὁποῖα θὰ λύουν οἱ μαθηταὶ ἐγγράφως μὲ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον λύονται ἀπὸ μνήμης. [Πρέπει δὲ νὰ ὑπάρχουν τέτοια προβλήματα εἰς κάθε ὁμάδα, διὰ νὰ ἔχουν οἱ μαθηταὶ ὑλικὸν ἐπασχολήσεως μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς ἀπὸ μνήμης ἐκτελέσεως κάθε ἀριθμητικῆς πράξεως καὶ πρὸ τῆς διδασκαλίας τῆς γραπτῆς ἐκτελέσεώς της]. Ἐν τούτοις τὸ κυριώτερον μέρος τῶν προβλημάτων τῆς ὁμάδος πρέπει νὰ ἀποτελοῦν τὰ προβλήματα τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως. Δὲν πρέπει νὰ λησμονῆται, ὅτι αἱ συλλογαὶ δὲν προορίζονται κυρίως

διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, ἡ ὁποία θὰ ἀσκῆται εἰς τὴν διδασκαλίαν καὶ διὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ δίδῃ ὁ διδάσκαλος ἰδικά του προβλήματα, ἀλλὰ διὰ τὴν γραπτὴν (ἴδ. καὶ τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς ἀπὸ μνήμης καὶ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως).

[6. Αἱ συλλογαὶ πρέπει νὰ περιέχουν μόνον τὰ προβλήματα, ὄχι δὲ καὶ τὸν τρόπον τῆς λύσεώς των ἢ καὶ μόνον τὸ ἐξαγόμενόν των. Ἐν τούτοις ἠμπορεῖ κατ' ἐξαίρεσιν εἰς κάθε ὁμάδα προβλημάτων νὰ περιέχεται ὁ κανονικὸς τρόπος τῆς λύσεως ἑνὸς μόνον προβλήματος τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως καὶ ἑνὸς τῆς ἀπὸ μνήμης.

7. Χάριν τῆς σιωπηρᾶς ἐπασχολήσεως τῶν μαθητῶν εἰς τὰ ὀλιγοτάξια καὶ μονοτάξια σχολεῖα καλὸν εἶναι εἰς τὰς κατηγορίας τῶν προβλημάτων τῆς ἀσκήσεως καὶ τῆς ἐπαναλήψεως κάθε ὁμάδος νὰ μὴ ὑπάρχουν μόνον μεμονωμένα προβλήματα, ἀλλὰ καὶ σειραὶ προβλημάτων] (ἴδ. καὶ τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς διδασκαλίας τῆς Ἀριθμ. εἰς τὰ δημοτ. σχολεῖα τὰ κατώτερα ἀπὸ τὰ ἑξατάξια).

8. Δὲν εἶναι ἔργον τῶν συλλογῶν, ὅπως δὲν εἶναι ἔργον καὶ τοῦ δημοτικοῦ σχολείου ἐν γένει, νὰ θέτουν προβλήματα μὲ πολλὰς καὶ ἐπιτηδευμένας δυσκολίας.

9. Τὰ προβλήματα πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογα μὲ τὴν ἀντίληψιν τῶν μαθητῶν ἀπὸ κάθε ἄποψιν, νὰ κινοῦν τὸ διαφέρον των καὶ νὰ τοὺς προάγουν οὐσιαστικὰ ἐπίσης ἀπὸ κάθε ἄποψιν.

10. Τὰ προβλήματα τῆς ἐφαρμογῆς πρέπει νὰ ἔχουν ἀξίαν διὰ τὸν πρακτικὸν βίον, [νὰ ἀναφέρωνται δηλ. εἰς πραγματικὰς σχέσεις του, γνωστὰς εἰς τοὺς μαθητάς, νὰ παρουσιάζουν τὰ ἀκριβῆ ἀριθμητικὰ στοιχεῖα τῶν σχέσεων αὐτῶν καὶ νὰ μὴ περιέχουν πολλὰς ἢ ἀνυπάρκτους εἰς τὸν πραγματικὸν βίον ἢ καὶ ἐπιτηδευμένας ἀριθμητικὰς δυσκολίας].

11. Αἱ συλλογαὶ πρέπει νὰ λαμβάνουν ὑπὸ σπουδαίαν ἔποψιν καὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐκλογῆς τῶν προβλημάτων ἀπὸ ὡρισμένους πραγματικοὺς κύκλους (ἴδ. καὶ τὸ κεφάλαιον περὶ πραγματικῆς ἀριθμήσεως) [καὶ δι' αὐτὸ εἰς κάθε ὁμάδα νὰ περιλαμβάνουν προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς ἕνα ἢ εἰς ὀλίγους καὶ χωρισμένους τὸν ἕνα ἀπὸ τὸν ἄλλον πραγματικοὺς κύκλους].

12. Αἱ συλλογαὶ πρέπει ἐπίσης νὰ λαμβάνουν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν διαφορὰν τῶν σκοπῶν, τοὺς ὁποίους ἐπιδιώκουν τὰ σχολεῖα τῶν

ἀρρένων καὶ τὰ σχολεῖα τῶν θηλέων, [καὶ δι' αὐτὸ εἰς κάθε ὁμάδα προβλημάτων νὰ περιέχουν καὶ μερικὰ προβλήματα θεραπεύοντα τὰς ἰδιαζούσας ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου τῶν θηλέων (ἴδ. καὶ τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς οἰκιακ. οἰκονομίας εἰς τὴν ἀριθμ. διδ. τῶν θηλέων).

13. Αἱ συλλογαὶ τέλος πρέπει νὰ ἐκπληρώνουν καὶ ὅλας τὰς ἀπαιτήσεις, τὰς ὁποίας ὀφείλουν ἐν γένει νὰ ἐκπληρώνουν καὶ ὅλα τὰ ἄλλα βιβλία τὰ προωρισμένα διὰ τὴν χρῆσιν τῶν μαθητῶν.

---

3. Η ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΛΛΟΓΩΝ.

Ὁ διδάσκαλος δὲν πρέπει νὰ νομίζῃ, ὅτι τὸ ἔργον του συνίσταται καὶ περιορίζεται εἰς τὸ νὰ προκαλῇ τοὺς μαθητὰς νὰ λύουν ὅλα ἀνεξαιρέτως τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὴν συλλογήν. Πρέπει νὰ μὴ ἐξαρτᾶται δουλικὰ ἀπὸ τὸ βιβλίον τῆς συλλογῆς, ἀλλὰ νὰ εἶναι ἀνώτερός του καὶ νὰ τὸ χρησιμοποιῇ μὲ ὅλην τὴν πρέπουσαν ἐλευθερίαν. Ἔχων ὡς ὁδηγούς του τὰς ἀντιληπτικὰς δυνάμεις τῶν μαθητῶν του καὶ τὰς ἐν γένει συνθήκας τοῦ σχολείου του ὀφείλει νὰ καθορίζῃ ἑκάστοτε, μὲ ποίαν ὁμάδα προβλημάτων τῆς συλλογῆς πρέπει νὰ ἀπασχολήσῃ τοὺς μαθητάς του καὶ ποῖα καὶ πόσα προβλήματα ἀπὸ αὐτὴν ἠμπορεῖ νὰ ἀναθέσῃ εἰς αὐτούς. Οἱ ὁδηγοί του ἐκεῖνοι θὰ τοῦ ὑποδεικνύουν νὰ παραλείπῃ μερικὰ προβλήματα ἀπὸ μερικὰς ὁμάδας ἢ καὶ ὁλοκλήρους ὁμάδας τῆς συλλογῆς, νὰ δίδῃ ἀντὶ αὐτῶν εἰς τοὺς μαθητὰς ἄλλα προβλήματα ἰδικά του, τέλος δὲ νὰ μὴ ἀκολουθῇ τὴν σειράν, μὲ τὴν ὁποίαν ἔχουν ταχθῆ αἱ ὁμάδες εἰς τὴν συλλογήν. [Ὅπως ὀρθότατα παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀν., σ. 30), ὅσον ἐλευθερώτερα χειρίζεται ὁ διδάσκαλος τὴν συλλογὴν τῶν προβλημάτων, τόσον ἐνεργότερον γίνεται τὸ διαφέρον του πρὸς τὸ ὑποκείμενον τῆς διδασκαλίας του καὶ τόσον περισσότερον αὐξάνει ἡ πεῖρα, τὴν ὁποίαν ἀποκομίζει διὰ τὸ μέλλον]. Ἡ πεῖρά του αὐτὴ θὰ τοῦ δεικνύῃ, ὅτι ὡρισμέναι ὁμάδες τῆς συλλογῆς δὲν ἠμποροῦν νὰ περατωθοῦν ὁλόκληραι ἐντὸς ἑνὸς ἔτους, δι' αὐτὸ δὲ δὲν θὰ ἐπιμένῃ εἰς τὴν ὁλοσχερῆ ἐξάντλησίν των. [Ἐφόσον ἄλλωστε οἱ μαθηταὶ θὰ ἀποβαίνουν ἱκανοὶ εἰς τὴν αὐτοτελῆ λύσιν ἑνὸς εἴδους προβλημάτων, θὰ εἶναι περιττὸν πλέον νὰ ἀπασχολοῦνται μὲ τὴν λύσιν καὶ ἄλλων τέτοιων προβλημάτων διὰ τὸν λόγον, ὅτι περιέχονται καὶ αὐτὰ εἰς τὴν συλλογήν. Ἐξ ἀντιθέτου, ἂν οἱ μαθηταὶ δὲν ἔχουν γίνει ἱκανοὶ νὰ λύουν ἕνα εἶδος προβλημάτων καὶ μετὰ τὴν ἐξάντλησιν ὅλων τῶν σχετικῶν προβλημάτων τῆς συλλογῆς, θὰ πρέπῃ νὰ ἀσκηθοῦν καὶ εἰς ἄλλα ἀκόμη διδόμενα ὑπὸ τοῦ διδασκάλου]. Σημειωτέον ἐπίσης, ὅτι ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ ἐπιτρέπεται νὰ χρησιμοποιῆται ἡ συλλογὴ διὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν μαθητῶν εἰς μίαν νέαν δι' αὐτοὺς ἀριθμητικὴν πρᾶξιν [καὶ ὅτι ποτὲ δὲν πρέπει ὁ διδάσκαλος νὰ ἀναθέτῃ εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν λύσιν προβλημάτων τῆς συλλογῆς, ἂν δὲν εἶναι βέβαιος, ὅτι οἱ μαθηταὶ ἔχουν κατανοήσει τέλεια ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τὴν σχετικὴν πρᾶξιν, μὲ τὴν ὁποίαν λύονται τὰ προβλήματα αὐτά. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀκόμη] πρέπει νὰ παρατηρῇ, μήπως μερικὰ ἀπὸ τὰ διδόμενα προβλήματα παρουσιάζουν ἰδιαιτέρας δυσκολίας καὶ νὰ μεριμνᾷ νὰ τὰς αἴρῃ, πρὶν ἀναθέσῃ εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν κατ' ἰδίαν εἰς τὸ σχολεῖον ἢ κατ' οἶκον λύσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν. Καλὸν δὲ εἶναι νὰ ὑπογραμμίζουν οἱ μαθηταὶ τὰς λέξεις ἐκείνας τῶν προβλημάτων, αἱ ὁποῖαι ἐπροκάλεσαν σχετικὰς ἐπεξηγήσεις τοῦ διδασκάλου. Τέλος δὲ πρέπει νὰ τονισθῇ, ὅτι ἐν γένει εἶναι ἐπάναγκες νὰ ἠξεύρῃ καλὰ ὁ διδάσκαλος τὴν συλλογὴν τῶν μαθητῶν του [καὶ ἀπὸ τὴν ἄποψιν τῆς μεθοδικῆς συνθέσεώς της καὶ ἀπὸ τὴν ἄποψιν τῶν πραγματικῶν κύκλων, ἀπο τοὺς ὁποίους λαμβάνονται τὰ προβλήματά της, διὰ νὰ ἠμπορῇ νὰ χρησιμοποιῇ μὲν ὅλα τὰ πλεονεκτήματα τῆς συλλογῆς, νὰ μὴ δυσκολεύεται δὲ εἰς τὴν διδασκαλίαν του ἀπὸ τὰ μειονεκτήματά της]. Ἰδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 32.

XVIII. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ

1. Η ΦΥΣΙΣ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ.

Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ εἶναι τὸ ἀντίθετον τῆς Πεσταλοτσιανῆς ἀρχῆς τῆς **καθαρᾶς** ἢ **ἀφῃρημένης** ἀριθμήσεως. Ἡ ἀρχὴ τοῦ Πεσταλότση ἀπαιτεῖ νὰ ἀριθμοῦν οἱ μαθηταὶ μὲ καθαρούς, μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμούς, διότι κατὰ τὴν γνώμην τοῦ μεγάλου Παιδαγωγικοῦ μόνον ἡ ἀρίθμησις αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ συντελέσῃ εἰς τὴν μόρφωσιν τῶν νοητικῶν δυνάμεων τῶν μαθητῶν. Ἀπεναντίας ἡ ἀρχὴ τῆς **πραγματικῆς** ἀριθμήσεως ἀπαιτεῖ νὰ συνδυάζεται ἡ ἀρίθμησις **μὲ πράγματα,** νὰ γίνεται μὲ πράγματα. Δὲν πρέπει ὅμως νὰ νομισθῇ, ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις, τὴν ὁποίαν ἐννοεῖ ἡ παοκειμένη ἀρχή, εἶναι τὸ ἴδιον πρᾶγμα μὲ τὴν συνήθη πραγματικὴν ἀρίθμησιν, τὴν γινομένην δηλ. μὲ ἐφηρμοσμένα προβλήματα. Διαφέρει ἀπὸ αὐτὴν καὶ ὡς πρὸς ἄλλα, τὰ ὁποῖα θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, καὶ κυρίως ὡς πρὸς τὸ ἑξῆς. Ἡ συνήθης δηλ. πραγματικὴ ἀρίθμησις ἐργάζεται εἰς κάθε ἀριθμητ. ὕλην μὲ προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς **τὰ διαφορώτατα πράγματα.** Μὲ κάθε πρόβλημα ὁ μαθητὴς εἰσάγεται κατ' αὐτὴν εἰς νέον κύκλον πραγμάτων. Ἁπλῆ ἐπισκόπησις τῶν συνήθων συλλογῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων δύναται νὰ πιστοποιήσῃ τὸ πρᾶγμα. Ἔτσι π.χ. εἰς τὴν σελ. 107 τοῦ 7 τεύχους τῆς συλλογῆς τοῦ Hentschel παραθέτονται τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τὴν ἔνδυσιν πτωχῶν παιδίων, εἰς τὸν χάρτην τὸν περιλαμβανόμενον εἰς βιβλία, εἰς τὴν περίμετρον ἑνὸς τροχοῦ, εἰς τὸν τόκον, εἰς τιμὰς σίτου, εἰς ἑβδομαδιαίους μισθούς, εἰς τὸ δημόσιον χρέος ἐπὶ Φρειδερίκου τοῦ πρώτου, εἰς τὴν διανομὴν κουλουριῶν, εἰς τὸν ἀριθμὸν πορτοκαλιῶν καὶ εἰς τὰς ὥρας τῆς πορείας ἑνὸς ἀγροτικοῦ ταχυδρόμου. Εἰς τὴν σελ. 28 τοῦ 2 τεύχους τῆς συλλογῆς τῶν Heinze καὶ Hübner παρουσιάζονται ἀλληλοδιαδόχως εἰς τοὺς μαθητὰς ἕνα γαλακτοδοχεῖον, ἡ ἀλλαγὴ νομισμάτων, κάποια παιδικὴ ἀσθένεια, ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν ἑνὸς σχολείου, ἕνας κῆπος ὀπωροφορόρων δέδρων, τὸ κατάστημα ἑνὸς μικρεμπόρου, τὸ περιεχόμενον ἑνὸς πίθου, ἡ πώλησις αὐγῶν, τὰ χρέη, τὰ στοιχεῖα τοῦ ἀναγνωσματαρίου, ἡ ἡλικία δύο ἀδελφῶν, κονδύλια, φύλλα μὲ εἰκόνας, τιμαὶ αὐγῶν, ὁ ἐργατικὸς μισθός, ἡ ἀγορὰ καφφέ, ὁ κουμπαρᾶς, αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος, μολυβδοκόνδυλα, καθέκλαι, θρανία, αἱ ζημίαι ἑνὸς κήπου καὶ οἱ στοῖχοι ἑνὸς βιβλίου. Σημειωτέον δέ, ὅτι οἱ συγγραφεῖς τῶν παρομοίων συλλογῶν εἶναι καὶ ὑπερήφανοι διὰ τὴν «πολυμέρειαν» τῶν ἔργων των, χωρὶς νὰ φαντάζωνται, [ὅτι οἱ μαθηταί, ἐφόσον δὲν ἐμμένουν εἰς ἕνα κύκλον πραγμάτων, ἀλλὰ μεταπηδοῦν μὲ κάθε πρόβλημα ἀπὸ ἕνα κύκλον εἰς ἄλλον, δὲν ἀριθμοῦν ὄντως ***μὲ πράγματα***. Διότι εἶναι γεγονός], ὅτι οἱ μαθηταὶ δὲν δίδουν εἰς τὸ τέλος καμίαν προσοχὴν εἰς τὸ πραγματικὸν περιεχόμενον τοῦ κάθε προβλήματος, τὸ θεωροῦν δὲ ὡς μίαν δυσάρεστην προσθήκην, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ταχύτερον, διὰ νὰ φθάσουν εἰς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις. Ἀπεναντίας ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις, ὅπως ἐννοεῖται ἀπὸ τὴν προκειμένην ἀρχήν, ἐργάζεται ***εἰς κάθε ἀριθμητικὴν ὕλην*** μὲ προβλήματα ἀναφερόμενα ***εἰς ἕνα ἑνιαῖον καὶ μεγάλον πραγματικὸν κύκλον***. Τέτοιοι πραγματικοὶ κύκλοι εἶναι π.χ. ἡ οἰκογένεια, ἡ αὐλὴ τῆς οἰκίας, ἡ αἴθουσα τῆς διδασκαλίας, ὁ σχολικὸς κῆπος, τὸ χαρτοπωλεῖον, τὸ ταχυδρομεῖον κ.τ.λ. Ἔτσι ἡ προκειμένη πραγματικὴ ἀρίθμησις εἶναι ἡ μόνη ἀξία τοῦ ὀνόματος αὐτοῦ, διότι μόνον αὐτὴ λαμβάνει σοβαρῶς ὑπ' ὄψιν τοὺς διαφόρους πραγματικοὺς κύκλους, ἐξετάζουσα χωριστὰ τὸν καθένα των ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν ἄποψιν, ἡ ὁποία κατ' ἐξοχὴν παρουσιάζεται εἰς αὐτόν].

Εἰς τὴν ἱστορικὴν ἐξέλιξιν τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως ἠμποροῦν νὰ διακριθοῦν δύο βαθμίδες. Εἰς μὲν τὴν πρώτην ἀπὸ αὐτὰς προέχει περισσότερον ἡ ἄποψις τῆς χρησιμότητος διὰ τὸν πρακτικὸν βίον, εἰς δὲ τὴν δεύτερην ὁ παιδαγωγικὸς σκοπός.

---

2. ΟΙ ΠΡΟΔΡΟΜΟΙ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ.

Ὡς ***πρόδρομοι τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως*** ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὁ *Rochow* καὶ ὁ *Villaume* καὶ ἀπὸ τοὺς ἀντιπάλους τῆς εἰδολογικῆς ἀρχῆς τοῦ Πεσταλότση ὁ *Stephani* καὶ ὁ *Graser*. Ὁ Rochow ἀποδίδει ἐντελῶς ἰδιαίτερην σημασίαν εἰς τὰ «ἐφηρμοσμένα προβλήματα, τὰ λυόμενα μὲ λογαριασμοὺς χρησίμους εἰς τὸν βίον». Τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἔδιδε, ἐλάμβαναν ὑπ' ὄψιν τὰς πραγματικὰς σχέσεις τοῦ οἰκονομικοῦ βίου. Ὁ δὲ Villaume παρατηρεῖ τὰ ἀκόλουθα : «τὰ προβλήματα πρέπει νὰ λαμβάνωνται πάντοτε ἀπὸ τὸν κύκλον τῆς ἐμπειρίας τῶν παίδων. Τὸ μέγεθος τῶν ἀγρῶν, τὸ μῆκος μιᾶς ὁδοῦ, τὸ ποσὸν τῆς τροφῆς τὸ διδόμενον εἰς τὰ ζῷα, τὸ ποσὸν τῶν λαχανικῶν, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς ἕνα κῆπον ὡρισμένου μεγέθους κ.τ.τ. δίδουν ὑλικὸν πρὸς σχηματισμὸν πολλῶν καὶ συνθέτων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ ἐπαρκέσουν πρὸς ἄσκησιν τῶν παίδων» (Praktisches Handbuch für Lehrer, 1780). Μετὰ τὸν μονομερῆ τονισμὸν τοῦ εἰδολογικοῦ σκοποῦ τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας ἀπὸ τὴν σχολὴν τοῦ Πεσταλότση ὑποστηρίζεται ἐντονώτερα ὁ ὑλικὸς σκοπὸς ἀπὸ τοὺς ἀντιπάλους τῆς σχολῆς αὐτῆς. Ἔτσι ὁ Stephani ἐκλέγει τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην μόνον ἐπὶ τῇ βάσει πρακτικῶν ἀπόψεων. Εἰς τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἔργου του «Ausführliche Anweisung zum Rechenunterricht» παρέχει μέγαν ἀριθμὸν προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς τὸν ἐπαγγελματικὸν βίον, καθὼς καὶ εἰς τὴν Ἱστορίαν καὶ τὴν Γεωγραφίαν. Ἐπίσης δὲ καὶ ὁ Graser εἰς τὸ ἔργον του «Elementarschule fürs Leben» ἀπαιτεῖ, ὅπως ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς, καθὼς καὶ κάθε ἄλλου μαθήματος, ἐξυπηρετῇ προπάντων τὸν βίον. «Ἡ ἄσκησις», λέγει ὁ Graser, «πρέπει νὰ γίνεται πάντοτε εἰς ὕλην παρουσιαζομένην εἰς τὸν βίον ἢ ἀναφερομένην εἰς αὐτόν, ἡ δὲ ὕλη αὐτὴ πρέπει νὰ ἀναζητῆται εἰς ὅλα τὰ μαθήματα».

Οἱ ἀνωτέρω Παιδαγωγικοί, καθὼς καὶ ἄλλοι ὁμόφρονές των, τονίζουν ἐν γένει τὴν ἀξίαν τῆς ἀριθμήσεως διὰ τὸν βίον. Ἡ καθαυτὸ ὅμως πραγματικὴ ἀρίθμησις ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον κατὰ τὴν 5 καὶ 6 δεκαετηρίδα τοῦ 19 αἰῶνος διὰ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Stumpf, τοῦ Eussner, ἰδίως δὲ τοῦ Erzinger καὶ τοῦ Eisenlohr, τοῦ Goltzsch καὶ τοῦ Theel. Ἀργότερα προσθέτεται εἰς αὐτοὺς καὶ ὁ Salberg. Ὅλοι οἱ Μεθοδικοὶ αὐτοὶ τονίζουν τὴν ἀξίαν τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως ἰδίως ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς χρησιμότητος.

3. Η ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ ΙΔΙΩΣ ΩΣ ΧΡΗΣΙΜΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΠΡΑΚΤΙΚΟΝ ΒΙΟΝ.

Ὁ *Erzinger* ἐδημοσίευσε τὸ 1854 τὸ βιβλίον «Übungsbeispiele aus dem Leben für das Leben» (Παραδείγματα ἀσκήσεων ἀπὸ τὸν βίον καὶ διὰ τὸν βίον). Ὁ πρόλογος τοῦ βιβλίου αὐτοῦ ἔχει συνταχθῆ ἀπὸ τὸν *Eisenlohr,* διευθυντὴν τότε εἰς τὸ Nürtingen. Ὁ Eisenlohr παραπονεῖται, διότι ἡ ἀριθμητικὴ δεξιότης, ἡ ὁποία ἀποκτᾶται εἰς τὸ σχολεῖον, δὲν χρησιμεύει εἰς τὸν βίον· ὑπαίτιον δὲ τοῦ πράγματος αὐτοῦ εἶναι κατὰ τοῦτο τὸ σχολεῖον, «καθόσον διδάσκει μὲν τοὺς παῖδας ***νὰ ἀριθμοῦν***, ἀλλ' ὄχι καὶ ***νὰ λογαριάζουν,*** ἀσκεῖ μὲν αὐτοὺς εἰς τὸ νὰ ἐργάζωνται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καθ' ἑαυτούς, ἀλλ' ὄχι καὶ εἰς τὸ ***νὰ ἐξετάζουν τὰ πράγματα ἀπὸ τῆς ἀριθμητικῆς των ἀπόψεως καὶ νὰ τὰ ἀντιλαμβάνωνται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξετάσεως αὐτῆς πρεπόντως***. Πλῆθος βιοτικῶν σχέσεων, εἰς τὰς ὁποίας εἰσέρχονται οἱ μέχρι τοῦδε μαθηταί μας καὶ ἐντὸς τῶν ὁποίων κινοῦνται καθημερινῶς πρὸς ἱκανοποίησιν τῶν διαφόρων των ἀναγκῶν, πρὸς ἄσκησιν τῶν ἐπαγγελματικῶν των ἐργασιῶν κ τ.λ., μένει εἰς τὸ σχολεῖον ἀπαρατήρητον. Ἀκόμη δὲν ἔχει κατανοηθῆ καλά, ποῖον πλοῦτον σχετικῶν προβλημάτων προσφέρει ἡ ὅλη ζωὴ τῆς φύσεως καὶ ὁ κοινωνικὸς βίος τῶν ἀνθρώπων».

Ὁ *Goltzsch* ἐδημοσίευσε τὸ 1858 μὲ τὸν *Theel* τὸ ἔργον «Der Rechenunterricht in der Volksschule» εἰς 2 μέρη. Τὸ 2 μέρος ἔχει συνταχθῆ ἀπὸ τὸν Goltzsch καὶ φέρει τὸν τίτλον «Der verbundene Zahl - Sach - und Messunterricht in der Oberklasse der Volksschule» (Ἡ συνδυασμένη διδασκαλία τῶν ἀριθμῶν, τῶν πραγμάτων καὶ τῆς μετρήσεως εἰς τὴν ἀνωτέραν βαθμίδα τοῦ δημοτ. σχολείου). Ὁ G. ἀναπτύσσει εἰς τὸ μέρος αὐτό, ὅτι, ὅπως εἰς τὸν βίον αἱ ἀριθμητικαὶ παραστάσεις καὶ σχέσεις δὲν παρουσιάζονται μόναι των, ἀλλὰ πάντοτε μαζὶ μὲ τὰς παραστάσεις τῶν πραγμάτων, ἔτσι καὶ ***ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς πρέπει νὰ ἐκτείνεται καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς καὶ εἰς τὰ πράγματα.*** «Τὸ ὑποκείμενον τῆς διδασκαλίας εἶναι κυρίως ***αἱ ποικιλώταται πραγματικαὶ σχέσεις, ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας γίνεται καὶ πρέπει νὰ γίνεται εἰς τὸν βίον ἐφαρμογὴ τῶν παραστάσεων καὶ σχέσεων τῶν ἀριθμῶν***».

Τὸ βιβλίον ἔχει τὸ ἑξῆς περιεχόμενον : 1 μέρος : ***Τὰ ἁπλᾶ ἀριθμητικὰ προβλήματα***. 1. Μέτρησις τοῦ χρόνου. 2. Μέτρα τῶν πραγμάτων καὶ τῶν ὑλῶν. 3. Μέτρα τῆς ἀξίας. 4. Ἀπόκτησις καὶ χρῆσις τῆς ἰδιοκτησίας. 5. Ἀνταλλαγὴ τῆς ἰδιοκτησίας ἢ ἀγορὰ καὶ πώλησις. 6. Ὑποχρεώσεις πρὸς τὴν πολιτείαν. 7. Χρῆσις τῆς ξένης ἰδιοκτησίας (ἐνοίκιον, μίσθωμα, τόκος χρημάτων). 8. Ἑταιρικαὶ ἐπιχειρήσεις πρὸς πορισμὸν κέρδους. 9. Κοινοτικὰ βάρη καὶ κοινοτικαὶ εἰσπράξεις. 10. Μῖξις ὑλῶν. 11. Μέτρησις ἐπιφανειῶν. —2 μέρος : ***Τὰ σύνθετα ἀριθμητικὰ προβλήματα***. 1—5 περίπου καθὼς εἰς τὸ πρῶτον μέρος. 6. Ἡ τοκοφορία τοῦ χρήματος. 7. Ἑταιρικαὶ ἐπιχειρήσεις πρὸς πορισμὸν κέρδους. 8. Μέτρησις στερεῶν.

Ἄξιον σημειώσεως εἶναι ἀκόμη, ὅτι οἱ G. καὶ T. ἀποδίδουν εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ ***ἠθικὴν μορφωτικὴν ἀξίαν*** καὶ ὅτι μεταξὺ τῶν ἰδεῶν των ὑπάρχει καὶ ἡ ἰδέα ***τῆς συγκεντρώσεως.*** Αἱ δύο αὐταὶ ἀρχαί, ἐντονώτερα μόνον ἐκφρασμέναι, ἀποτελοῦν τὸ κύριον χαρακτηριστικὸν τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως, ὅπως τὴν ἀντιλαμβάνεται, καθὼς θὰ ἴδωμεν, ἡ Ἑρβαρτιανὴ σχολή.

Μὲ τοὺς Goltzsch καὶ Theel συντάσσεται ἀργότερα καὶ ὁ *Salberg*. Ὁ S. ἐδημοσίευσε τὸ 1874 τὸ ἔργον «Die Sachrechnen—Methode» (Ἡ μέθοδος τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως). Ἡ μεταξὺ τῶν Μεθοδικῶν ἐκείνων καὶ τοῦ Salberg ὑπάρχουσα διαφορὰ ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι ὁ τελευταῖος χρησιμοποιεῖ τὰ πράγματα ἰδίως ὡς ***μέσα ἐποπτείας*** πρὸς σχηματισμὸν τῶν παραστάσεων τῶν ἀριθμῶν, ἐνῷ ἐκεῖνοι τὰ ἐχρησιμοποιοῦσαν ***χάριν τῆς ἰδίας των ἀξίας***. Ὡς «πράγματα» δὲ θεωρεῖ ὁ S. τὰ εἰς τὴν κοινὴν χρῆσιν εὑρισκόμενα νομίσματα, μέτρα καὶ σταθμά. Πρέπει δὲ νὰ παρατηρηθῆ ἐπίσης, ὅτι ὁ S. τονίζει καὶ ***τὴν αὐτενέργειαν*** τῶν μαθητῶν. Ὁ *Jänicke* (Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts, σ. 68) χαρακτηρίζει ὡς «ἐπιτήδευσιν», ὅ,τι ἀπὸ τὸ ἔργον τοῦ Salberg ἀνήκει εἰς αὐτὸν τὸν ἴδιον. Ἀπεναντίας ὁ *Hartmann* (ὅπ. ἀν., σελ. 108) ἀποδίδει μεγαλύτερην ἀξίαν εἰς αὐτόν, παρατηρῶν τὰ ἀκόλουθα : «Ἡ ἐκκίνησις τῆς διδασκαλίας ἀπὸ τὰ πράγματα ἐξεγείρει καὶ προάγει τὸ διαφέρον· ἡ σύντονη πρόκλησις τῆς αὐτενεργείας δίδει κατεύθυνσιν εἰς τὴν βούλησιν· ἡ δὲ διαρκὴς κατὰ τὰς ἐφαρμογὰς ἀναδρομὴ εἰς τὰ ἴδια ἀκριβῶς πράγματα, τὰ ὁποῖα ὑπῆρξαν καὶ ἡ ἀφετηρία τῆς διδασκαλίας, ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ὠφελιμωτάτην συγκέντρωσιν. Ὅ,τι ἰδίως δὲν ἐτόνισεν ἀκόμη ὁ Salberg ἢ δὲν ἐτόνισε μὲ τὴν πρέπουσαν δύναμιν καὶ ἀκρίβειαν, εἶναι τὸ τελευταῖον ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω σημεῖα, ἤτοι ***ἡ συγκέντρωσις καὶ τοῦ σκοποῦ τῆς διδασκαλίας καὶ τῶν μέσων της εἰς ἕνα ἀντικείμενον»***.

Συλλογαὶ προβλημάτων ἐφαρμόζουσαι τὴν πραγματικὴν ἀρίθμησιν σύμφωνα μὲ τὴν ἀντίληψιν τῆς περιόδου αὐτῆς ἐδημοσιεύθηκαν ἀπὸ τοὺς Götz (1820), Eussner (1844), Stumpf (1845), Härlin (1852), Gräfe (1852) καὶ Erzinger (1854).

---

4. Η ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ ΙΔΙΩΣ ΩΣ ΕΝΕΧΟΥΣΑ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΝ ΑΞΙΑΝ.

Τὴν πραγματικὴν ἀρίθμησιν ὡς ἐνέχουσαν ἰδίως παιδαγωγικὴν ἀξίαν ἀπαιτεῖ πρώτη ἡ Ἑρβαρτιανὴ σχολή, ὡρισμένως δὲ πρῶτος ὁ ἴδιος ὁ Ἕρβαρτος, κατόπιν δὲ οἱ ὀπαδοί του Dörpfeld, Ziller, Rein καὶ Pickel, Sachse, Wendt, Lomberg, Teupser, Stucki, Göbelbecker, ἰδίως δὲ ὁ B. Hartmann.

Ὁ ***Ἕρβαρτος*** (Umriss pädagogischer Vorlesungen) ἀναπτύσσει, ὅτι καὶ ἡ ἐμβριθεστάτη μαθηματικὴ διδασκαλία δεικνύεται ἀπαιδαγώγητη, ἐφόσον σχηματίζει εἰς τὴν ψυχὴν τῶν παίδων ἰδιαίτερον παραστατικὸν κύκλον, ἀποχωρισμένον ἀπὸ τοὺς ὑπολοίπους. Δι' αὐτὸ πρέπει ὅλαι αἱ μαθηματικαὶ σπουδαὶ συμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς Ἀριθμητικῆς τοῦ δ. σχολείου νὰ συνδυάζωνται μὲ τὴν γνῶσιν τῆς φύσεως καὶ ἑπομένως μὲ τὴν ἐμπειρίαν, διὰ νὰ εὑρίσκουν ἔτσι εἴσοδον εἰς τὸν παραστατικὸν κύκλον τῶν μαθητῶν. Ἡ ἐφηρμοσμένη Μαθηματικὴ ἀποδίδει κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Ἑρβάρτου πολὺ περισσοτέρους καρπούς, ὅταν τὸ ἀντικείμενον τῆς ἐφαρμογῆς εἶναι γνωστὸν εἰς τοὺς ἀριθμοῦντας καὶ προσελκύῃ δι' αὐτὸ τὸ διαφέρον των.

Ὁ *Dörpfeld* (Grundlinien einer Theorie des Lehrplans) ὑποστηρίζει ἐντονώτατα τὴν σύνδεσιν τῆς Ἀριθμητικῆς (καθὼς καὶ τῆς Ὠδικῆς καὶ τῆς Ἰχνογραφίας) μὲ τὰ πραγματικὰ μαθήματα (τὴν Ἱστορίαν, τὴν Γεωγραφίαν καὶ τὴν Φυσιογνωσίαν). Ἡ ἐπικοινωνία αὐτὴ μεταξὺ τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ τῶν πραγματικῶν μαθημάτων εἶναι κατὰ τὴν γνώμην τοῦ D. ὠφέλιμη καὶ εἰς ἐκείνην καὶ εἰς αὐτά. «Τὸ κέρδος τῶν πραγματικῶν μαθημάτων συνίσταται εἰς τὸ ὅτι αἱ σχέσεις, τὰς ὁποίας ἀπεικονίζουν, γίνονται μὲ τὸ φῶς τῶν ἀριθμῶν σαφέστεραι καὶ ἐποπτικώτεραι. Οἱ ἀριθμοὶ ἔχουν κατιτὶ τὸ ἐντελῶς ἰδιαίτερον· ἐνυπάρχει εἰς αὐτοὺς ἰδιάζουσα διαφωτιστικὴ δύναμις. Ἐνώπιον τῶν ἀριθμῶν δὲν ἐξαφανίζεται μόνον, ὅπως συνηθίζουν νὰ λέγουν, κάθε συναίσθημα, ἀλλὰ καὶ κάθε ὁμίχλη καὶ νεφέλη· εἰσάγουν παντοῦ τὴν ἐνάργειαν καὶ τὴν ἀκρίβειαν . . . Τὸ κέρδος πάλιν τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας συνίσταται εἰς τὸ ὅτι γίνεται ποικιλώτερη, ζωντανώτερη καὶ περισσότερον διαφέρουσα». Πῶς ἠμπορεῖ ἡ ἀριθμητ. διδασκαλία νὰ συνδεθῇ μὲ τὰ ἄλλα μαθήματα, καταδεικνύει ὁ D. μὲ παραδείγματα, τὰ ὁποῖα ἔχει λάβει ἀπὸ τὸ φυτικὸν καὶ ζῳϊκὸν βασίλειον, ἀπὸ τὸ βασίλειον τῶν ὀρυκτῶν, ἀπὸ τὴν Φυσικήν, τὴν Χημείαν, τὴν Γεωγραφίαν καὶ τὴν Ἱστορίαν. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι ὁ D. ***τάσσεται ὑπὲρ τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως, διότι τὴν ἐπιβάλλει ἡ ἰδέα τῆς συγκεντρώσεως***, τῆς ὁποίας ἡ πραγματοποίησις κατορθώνεται μὲ αὐτήν.—Μὲ τὸν Dörpfeld συμφωνεῖ ἐν γένει καὶ ὁ *Räther* (πρβ. τὸ ἔργον του «Theorie und Praxis κ.τ.λ.» καὶ τὰ τεύχη τῆς συλλογῆς ἀριθμητ. προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχει ἐκδόσει μὲ τὸν *Wohl* καὶ τὰ ὁποῖα περιέχουν εἰς ἰδιαίτερα τμήματα κα προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τὰ διάφορα μαθήματα).

Ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις ἐπιβάλλεται ἀπὸ τὴν συγκέντρωσιν τῆς διδασκαλίας, φρονεῖ καὶ ὁ *Ziller* (Materialien zur speciellen Pädagogik von T. Ziller, σ. 227 καὶ 228), λέγων παρόμοια μὲ τὸν Dörpfeld. «Ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ ἡ Γεωμετρία», παρατηρεῖ ὁ Ziller, «πρέπει νὰ ἀντλοῦν πάντοτε τὸ περιεχόμενόν των ἀπὸ τὰς πραγματικὰς ὕλας, ἤτοι τὰς φρονηματιστικάς, τὰς φυσιογνωστικὰς καὶ τὰς γεωγραφικάς, τὰς ὁποίας καὶ καθορίζουν ἀκριβέστερα ἀπὸ τῆς εἰδολογικῆς, τῆς ἀριθμητικῆς των ἀπόψεως. Ἔτσι αἱ μὲν πραγματικαὶ ὗλαι ἀποκτοῦν ἀκρίβειαν καὶ εὐκρίνειαν, ἡ δὲ Ἀριθμητικὴ καὶ ἡ Γεωμετρία γίνονται περισσότερον διαφέρουσαι». Πάντοτε ὅμως ὀφείλει ἡ διδασκαλία κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Ζ. νὰ ἀφορμᾶται ἀπὸ τέτοιας πραγματικὰς ὕλας, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς ἐμπειρίας τῶν παίδων καὶ σχετίζονται μὲ ἀνάγκας παρουσιασθείσας κατ' αὐτήν. Προσθέτει δὲ ὁ Ziller, ὅτι κάθε τέτοια ὕλη πρέπει νὰ λαμβάνη τὴν μορφὴν ἑνὸς προβλήματος, **τὸ ὁποῖον καὶ θὰ ἀποτελῇ τὴν ἀφετηρίαν τῆς διδασκαλίας.** Τὸ θεμελιῶδες αὐτὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι ἐντελῶς συγκεκριμένον καὶ **ἡ ὅλη μεθοδ. ἑνότης ὀφείλει νὰ κινῆται εἰς τὸν πραγματικὸν κύκλον, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀνήκει.** Ἡ ἄμεσος διαδοχὴ προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς ποικιλωτάτους παραστατικοὺς κύκλους πρέπει νὰ ἀποφεύγεται.

Τὰς περὶ τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως γνώμας τοῦ Ziller συμμερίζεται σειρὰ ὅλη Παιδαγωγικῶν.

[Ἔτσι ὁ *Sachse* (Rechenunterricht und Rechenbuch, Jahresbericht 1884 über das Gymnasium zu Jena, Jena, 1884), ὁ ὁποῖος τάσσεται ὑπὲρ τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας τῆς βασιζομένης ἐπὶ Ἑρβαρτιανῶν ἀρχῶν, παρατηρεῖ ὡς πρὸς τὴν πραγματικὴν ἀρίθμησιν ἰδιαιτέρως τὰ ἀκόλουθα: «Ἂν πρόκειται ἡ ἀριθμ. διδασκαλία νὰ ὠφελήσῃ τὴν σύγχρονον διδασκαλίαν τῶν ἄλλων μαθημάτων, πρέπει νὰ παύσῃ τελείως ὁ φοβερὸς συμφυρμὸς τῶν ἐφηρμοσμένων προβλημάτων, ὁ ὁποῖος ἐπικρατεῖ ἕως τώρα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς συλλογάς. Πρέπει νὰ προηγῆται μία εὔτακτη σειρὰ προβλημάτων ἀπὸ τὴν Πατριδογνωσίαν, νὰ ἐπακολουθῇ εἰς αὐτὴν ἄλλη σειρὰ προβλημάτων ἀπὸ τὴν Φυσιογνωσίαν, κατόπιν ἄλλη ἀπὸ τὴν Γεωγραφίαν, τὴν Ἱστορίαν κ. οὕτ. καθ. Ἀπὸ αὐτὰ δὲ συγχρόνως ἐξάγεται, ὅτι ἡ πληθώρα τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα λαμβάνονται ἀπὸ τὸν ἀγοραῖον βίον, πρέπει νὰ περιορισθῇ εἰς τὸ δικαιολογημένον ὅριον».

Ὁ *Wendt* διατυπώνει τὴν γνώμην του περὶ τῶν πραγματικῶν κύκλων τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας εἰς μίαν διατριβήν του καταχωρισμένην εἰς τὸ Περιοδικὸν «Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht» (1889, ἀρ. 32—36). Ὑποδεικνύει εἰς αὐτὴν τὸ μεγάλον πλῆθος τῶν καταλλήλων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἠμπορομοῦν νὰ ληφθοῦν ἀπὸ τὴν Φυσικήν, τὴν Χημείαν, τὴν Ὀρυκτολογίαν, τὴν Βοτανικήν, τὴν Ζῳολογίαν καὶ τὴν Γεωγραφίαν. Ὡς πρὸς δὲ τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς τὰς συνήθεις συλλογάς, παρατηρεῖ, ὅτι αὐτὰ εἶναι κατὰ μέγα μέρος προβλήματα μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμούς, τὰ ὁποῖα περικαλύπτουν οἱ συγγραφεῖς τῶν συλλογῶν μὲ ἕνα πενιχρότατον πραγματικὸν ἐπένδυμα, διὰ νὰ φανῇ, ὅτι πρόκειται περὶ πρακτικῆς ἐφαρμογῆς. Οἱ μαθηταὶ ὅμως εἶναι εὐφυέστεροι ἀπὸ ὅσον πιστεύουν οἱ συγγραφεῖς. Δὲν ἐνδιαφέρονται διὰ τὸ πραγματικὸν ἐπένδυμα, ἀναγινώσκουν τὰς λέξεις ἐπιτροχάδην ἢ καὶ καθόλου, προσπαθοῦν δὲ ἀπεναντίας νὰ εὕρουν γρήγορα ἢ καὶ νὰ μαντεύσουν ἀκόμη, ποῖος ἀπὸ τοὺς περιεχομένους ἀριθμοὺς εἶναι ὁ διαιρετέος, ποῖος ὁ ἀφαιρετέος κ.τ.λ.].[1]

Ὁ *Teupser*, διευθυντὴς σχολείου εἰς τὴν Λειψίαν, ἐτάχθη κατ' ἀρχὰς ὑπὲρ τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως ἀποβλέπων κυρίως εἰς τὴν συγκέντρωσιν. Εἰς τὸ 21 καὶ 23 «Jahrbuch des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik» (1889 καὶ 1891) πραγματεύεται περὶ τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας τοῦ 2 σχολ. ἔτους καὶ δεικνύει, πῶς πρέπει νὰ διαμορφωθῇ εἰς τὴν πρᾶξιν ἡ διδασκαλία αὐτὴ ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν φρονηματιστικὴν ὕλην τοῦ ἰδίου ἔτους, ἤτοι μὲ τὸν Ῥοβινσῶνα. Ἀργότερα ἐν τούτοις, ἀντιληφθεὶς εὐρύτερα τὴν πραγματικὴν ἀρίθμησιν, ἐτάχθη **ὑπὲρ τῶν προβλημάτων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸν βίον τῆς στενωτέρας πατρίδος.** Κατὰ τὸ 1899 ἐδημοσίευσε τὸ ἔργον του «Wegweiser zur Bildung heimatlicher Rechenaufgaben» (Ὁδηγὸς πρὸς σχηματισμὸν προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς τὴν στενωτέραν πατρίδα, Leipzig, Hahn). Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ἔχει παραθέσει πλῆθος προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐκλεγῇ ἐπὶ τῇ βάσει πραγματικῶν ἀπόψεων καὶ ἀναφέρονται εἰς τὸν βίον τῆς Λειψίας. Μέγα μέρος τῶν προβλημάτων αὐτῶν ἠμπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ὑπὸ ἄλλας τοπικὰς συνθήκας. Οἱ σχετικοὶ πραγματικοὶ κύκλοι ἔχουν διαταχθῇ ὡς ἑξῆς: Α. Ἀπὸ τὸν οἰκογενειακὸν βίον. Β. Ἡ

[1] Τὰ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ἔχουν ληφθῆ ἀπὸ παλαιοτέραν ἔκδοσιν τῆς Μεθοδικῆς τοῦ Rude.

ἀπαρίθμησις, ἡ μέτρησις καὶ ἡ στάθμησις. Γ. Ἀπὸ τὸν **σχολικὸν** βίον. Δ. Ἀπὸ τὴν πατρίδα (τὴν Λειψίαν). Ε. Ἀπὸ τὸν **ἐπαγγελματικὸν** βίον. ϛ. Ἀπὸ τὸν κοινοτικὸν βίον (κάτοικοι, **κοινοτικὴ** περιουσία, οἰκονομικὴ διοίκησις τῆς κοινότητος, μέτρα **κοινοτικῆς** προνοίας καὶ φιλανθρωπίας). Ζ. Ἀπὸ τὴν **συγκοινωνίαν** (σιδηρόδρομοι, ταχυδρομεῖον, τροχιόδρομοι). Η. Ἀπὸ τὸν **πολιτειακὸν** βίον τῆς Σαξωνίας. Θ. Ἀπὸ τὸν πολιτειακὸν βίον **τῆς ὅλης** ἐπικρατείας. Ὁ Τ. δεικνύει ἐπίσης, πῶς πρέπει νὰ **διαταχθοῦν** αἱ ὗλαι αὐταὶ καὶ ἀπὸ τῆς ἀριθμητικῆς, τῆς **συστηματικῆς ἀπόψεως**. Ἐδημοσίευσε προσέτι καὶ τὸ ἔργον «Methodische Lehrgänge des elementaren Unterrichts», καθὼς καὶ σχετικὴν μὲ τὸ ἔργον αὐτὸ συλλογὴν προβλημάτων (Leipzig, Hahn, 1901). Καὶ εἰς τὰ ἔργα αὐτὰ ἀσκεῖται καθ' ὅλην τὴν γραμμὴν ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις.

Ὁ *Stucki*, ἐπιθεωρητὴς δημοτ. σχολείων εἰς τὴν Βέρνην, φρονοῦν ἐπίσης, ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις ἐπιβάλλεται ἀπὸ τὴν ἰδέαν τῆς συγκεντρώσεως, ἐδημοσίευσε τὸ 1892 σχετικὸν ἔργον ἐπιγραφόμενον «Rechnen im Anschluss an den Realunterricht (Ἡ ἀρίθμησις προσαρμοζομένη εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν πραγματικῶν μαθημάτων, Bern, 1892, Schmid, Franke u.C.). Τὸ ἔργον αὐτὸ προορίζεται διὰ τὴν μεσαίαν βαθμίδα τοῦ δημοτ. σχολείου, διατάσσονται δὲ οἱ πραγματικοὶ κύκλοι εἰς αὐτὸ ὡς ἑξῆς: Α. Ἀπὸ τὴν βοτανικὴν διδασκαλίαν. Β. Ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῆς Ζωολογίας. Γ. Ἀπὸ τὴν Πατριδογνωσίαν. Δ. Ἀπὸ τὴν Γεωγραφίαν. Παραθέτομεν ἐδῶ λεπτομερέστερα τὸ περιεχόμενον τοῦ τελευταίου τμήματος: 1. Τὸ ὑψίπεδον τῆς Βέρνης: α) οἱ κρυσταλλόπαγοι (13 προβλήματα), β) τὰ ὑψώματα (14 προβλήματα), γ) τὰ ὕδατα (18 προβλήματα), δ) αἱ πλουτοπαραγωγικαὶ πηγαὶ (25 προβλήματα). 2. Τὸ καντόνιον τῆς Βέρνης: α) μέγεθος καὶ κάτοικοι (17 προβλήματα), β) αἱ πλουτοπαραγωγικαὶ σχέσεις (18 προβλήματα, γ) ἡ ἐκπαίδευσις (9 προβλήματα). 3. Ἀπὸ τὰ παλαιότατα καντόνια (26 προβλήματα). 4. Τὸ καντόνιον τῆς Ζυρίχης (22 προβλήματα).

Ὁ *Göbelbecker*, διδάσκαλος εἰς τὴν Κωνσταντίαν (Das rechenunterrichtliche Sachprincip κ.τ.λ., σ. 92, Leipzig, Nemnich, 1901) μεταχειρίζεται ὡς πραγματικὴν βάσιν τῆς διδα-

σκαλίας τῆς Ἀριθμητικῆς (καὶ τῆς μὲ αὐτὴν συνδεομένης Καταστιχογραφίας καὶ Ἐμπορικῆς Ἀλληλογραφίας) τὴν Πατριδογνωσίαν, τὴν Ἱστορίαν καὶ τὴν Γεωγραφίαν. Ἡ ἀριθμητ. διδασκαλία ὀφείλει νὰ ἀφορμᾶται ἀπὸ τὰ πραγματικὰ αὐτὰ μαθήματα καὶ νὰ ἐπαναφέρῃ πάλιν τοὺς μαθητὰς εἰς αὐτά. Τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα πρέπει νὰ διατάσσωνται κατὰ τὸ δυνατὸν κατὰ πραγματικοὺς κύκλους.

Τέσσαρες διδάσκαλοι τοῦ Reutlingen, οἱ *Weit*, *Rais*, *Heininger* καὶ *Zluhan*, ἐδημοσίευσαν ἕνα ἔργον ἐπιγραφόμενον «Das Sachrechnen nach seiner geschichtlichen Entwicklung, seiner psychologischer Begründung und seiner methodischen Gestaltung» (Ἡ ἱστορικὴ ἐξέλιξις, ἡ ψυχολογικὴ θεμελίωσις καὶ ἡ μεθοδικὴ διαρρύθμισις τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως, σελ. 110, Cannstatt, Hopf, 1904). Αἱ πηγαί, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀντλοῦν οἱ συγγραφεῖς αὐτοὶ τὴν ὕλην τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως εἶναι: ἡ μέλισσα, ὁ βάμβαξ, τὸ θερμόμετρον, ἡ λίμνη τῆς Κωνσταντίας, ἡ κότα, τὰ παλαιὰ μεθόρια Ῥωμαϊκὰ ὀχυρώματα, ὁ παλαιὸς στρατιωτικὸς φόρος, ἡ δεκάτη, ὁ τριακονταετὴς πόλεμος, ἡ τυπογραφία, ἡ Γαλλικὴ ἐπανάστασις, ὁ Γαλλογερμανικὸς πόλεμος καὶ ἡ Ἱερὰ Ἱστορία τῆς Παλαιᾶς καὶ Καινῆς Διαθήκης.

Ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις ἐπιβάλλεται ἀπὸ ***τὴν συγκέντρωσιν*** τῆς διδασκαλίας, φρονοῦν καὶ οἱ *Rein* καὶ *Pickel*, οἱ ὁποῖοι ὅμως τονίζουν συγχρόνως, ὅτι μὲ αὐτὴν ἐνισχύεται μὲν καὶ ***τὸ ἄμεσον διαφέρον τῶν παίδων πρὸς τὴν ἀρίθμησιν***, ἐξυπηρετεῖται δὲ ἐν γένει καὶ ὁ ὕψιστος σκοπὸς τῆς διδασκαλίας, ἤτοι ***ἡ μόρφωσις τοῦ χαρακτῆρος***. Οἱ Παιδαγωγικοὶ αὐτοὶ ἀσκοῦν τὴν πραγματικὴν ἀρίθμησιν εἰς ὅλας τὰς τάξεις τοῦ δημοτ. σχολείου, συνδέουν δὲ τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην ἰδίως μὲν μὲ τὴν ὕλην τῶν πραγματικῶν μαθημάτων, καὶ μάλιστα τῶν φρονηματιστικῶν (π.χ. μὲ τὴν ὕλην τῶν παραμυθιῶν κατὰ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος καὶ μὲ τὴν ὕλην τοῦ Ῥοβινσῶνος κατὰ τὸ δεύτερον) καὶ τῆς Φυσιογνωσίας, ἀλλὰ καὶ μὲ τὸν κύκλον τῆς ἐμπειρίας τῶν μαθητῶν. Θεμελιώδης δὲ ἀπαίτησίς των εἶναι, ὅπως ὁ διδάσκαλος ἐπεξεργάζεται κάθε μεθοδικὴν ἑνότητα τῆς Ἀριθμητικῆς ***ἀφορμώμενος ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον πραγματικὸν κύκλον καὶ κινούμενος καθ' ὅλην τὴν ἐπεξεργασίαν της ἐντὸς αὐ-***

τοῦ. Ἐν πάσῃ ὅμως περιπτώσει ὁ R. καὶ ὁ P. ἀναγνωρίζουν, ὅτι ἡ σύνδεσις τῶν ἀριθμητ. ὑλῶν μὲ ὡρισμένους πραγματικοὺς κύκλους δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀσκήσῃ καμίαν ἐπίδρασιν εἰς τὸν καθορισμὸν τῆς ἐπαλληλίας των, διότι αἱ ἀριθμητικαὶ ὕλαι εὑρίσκονται εἰς ἀδιάσπαστον καὶ συστηματικὴν ἀλληλουχίαν, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἔχῃ τελείως προκαθορισθῇ, πρὶν γίνῃ ὁποιαδήποτε σκέψις περὶ συνδέσεως τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων μὲ τοὺς πραγματικοὺς κύκλους.

[Ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀμέσως ἀνωτέρω Παιδαγωγικοὺς φρονεῖ καὶ ὁ *Lomberg*, ὁ ὁποῖος ἐδημοσίευσε σχετικὴν διατριβὴν εἰς τὸ Περιοδικὸν «Pädagogische Studien, 1890, τεῦχ. 4 καὶ 1891, τεῦχ. 1 καὶ 2). Εἰς τὴν διατριβὴν αὐτὴν ἀναπτύσσει ὁ L., ὅτι στηρίζοντες τὴν Ἀριθμητικὴν εἰς ὡρισμένους πραγματικοὺς κύκλους ἀνταποκρινόμεθα πρῶτα εἰς αὐτὴν τὴν φύσιν τῆς ἀριθμήσεως, ἡ ὁποία ὡς νοητικὴ ἐργασία ἔχει ἀνάγκην νὰ στηριχθῇ ἐπάνω εἰς συγκεκριμένας ἐποπτείας. [Ἔτσι] τὴν σύνδεσιν τῆς ἀριθμήσεως μὲ τὰ πράγματα ἐπιβάλλει αὐτὴ **ἡ καλλιέργεια τοῦ διαφέροντος, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν ἀρχὴν στρέφεται μόνον πρὸς τὰ πράγματα, πρέπει δὲ ἀπὸ αὐτὰ νὰ μεταδοθῇ καὶ εἰς τοὺς ἀριθμούς.** Τὴν ἴδιαν ἐπίσης ἀπαίτησιν προβάλλει καὶ **ὁ πρακτικὸς βίος**, εἰς τὸν ὁποῖον ποτὲ δὲν ἀριθμοῦμεν μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμούς. Εἰς αὐτὸν δὲ κυρίως ἀποβλέπουσα ἡ ἀριθμητ. διδασκαλία ὀφείλει νὰ ἐκλέξῃ τὰς ὕλας της ἰδίως ἀπὸ τὸν κύκλον τῆς ἐργασίας τῶν ἀνθρώπων, ἤτοι ἀπὸ τὴν οἰκιακὴν οἰκονομίαν, ἀπὸ τὸ ἐργαστήριον, ἀπὸ τὴν ἀγοράν, ἀπὸ τὸ ἐμπόριον, ἀπὸ τὴν γεωργίαν καὶ ἀπὸ τὴν κοινοτικὴν καὶ κρατικὴν διοίκησιν. Ἐξ ἄλλου **ἡ ἀρχὴ τῆς συγκεντρώσεως** ἐπιβάλλει κατὰ τὴν γνώμην τοῦ L., ὅπως ἀρκετὸν μέρος τῶν προβλημάτων ληφθῇ ἀπὸ τὰ πραγματικὰ μαθήματα. Κάθε μεθοδικὴ ἑνότης πρέπει νὰ εἰσάγεται μὲ ἕνα θεμελιῶδες πρόβλημα, ὅλα δὲ τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα θὰ λύωνται κατὰ τὴν ἐπεξεργασίαν της, πρέπει νὰ ἀποτελοῦν ὁμάδα ἑνιαίαν ἀπὸ πραγματικῆς ἀπόψεως].[1]

---

[1] Τὰ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ἔχουν ληφθῆ ἀπὸ παλαιοτέραν ἔκδοσιν τῆς Μεθοδικῆς τοῦ Rude.

Διεξοδικώτατα ἔχει διαπραγματευθῇ τὸ ζήτημα τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως ὁ *B. Hartmann*, ὁ σπουδαιότερος Μεθοδικὸς τῆς Ἀριθμητικῆς τῆς Ἑρβαρτιανῆς σχολῆς. Εἰς τὸ πολλάκις μνημονευθὲν ἔργον του «Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule κ.τ.λ.» ἐξετάζει τὸ προκείμενον ζήτημα ἀπὸ θεωρητικῆς ἀπόψεως, εἰς δὲ τὰ τεύχη τῆς συλλογῆς του τῶν ἀριθμητ. προβλημάτων (Rechenbuch), τὰ ὁποῖα ἔχει συντάξει μαζὶ μὲ τὸν *Ruhsam*, ὑποτυπώνει σχέδιον πρακτικῆς ἐφαρμογῆς τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως εἰς τὰ 8 σχολικὰ ἔτη τοῦ δημοτ. σχολείου πρὸς ἄμεσον διδακτικὴν χρῆσιν.

Ὁ Hartmann φρονεῖ ἀδιστάκτως, ὅτι ἀπὸ τὴν σύνδεσιν τῆς ἀριθμήσεως μὲ καταλλήλους πραγματικὰς ὕλας προκύπτουν τὰ ἑξῆς ἀγαθά:

α) Ἐξεγείρεται τὸ ἄμεσον διαφέρον τῶν μαθητῶν καὶ διὰ τὰς καθαρῶς ἀριθμητικὰς ὕλας.

β) Προσλαμβάνουν ἐνάργειαν καὶ ἀκρίβειαν καὶ αἱ πραγματικαὶ γνώσεις τῶν μαθητῶν αἱ συνδεόμεναι μὲ τὰς ἀριθμητικάς.

γ) Διευκολύνεται ἡ ψυχολογικὴ πορεία τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας.

δ) Προοδοποιεῖται ἡ δρᾶσις τῶν παίδων ὡς ἠθικῶν χαρακτήρων, διότι ἐξασφαλίζεται δι' αὐτοὺς ἡ διὰ μόνης τῆς ἀριθμητικῆς ἐξετάσεως ἐπιτυγχανομένη τελεία γνῶσις τῶν πραγμάτων, ἤτοι τῶν μέσων τῆς ἐκπληρώσεως τῶν ἠθικῶν των σκοπῶν.

ε) Εὐοδώνεται καὶ ἡ πραγμάτωσις τῆς ἰδέας τῆς συγκεντρώσεως.

[Αἱ δύο μεγάλαι πηγαί, ἀπὸ τὰς ὁποίας θὰ ἀντλοῦνται τὰ πράγματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θὰ ἀφορμᾶται καὶ μὲ τὰ ὁποῖα θὰ ἀσχολῆται ἡ ἀρίθμησις, πρέπει νὰ εἶναι κατὰ τὴν γνώμην τοῦ H. ἡ περιβάλλουσα τοὺς παῖδας **φύσις** καὶ **ὁ ἀνθρώπινος βίος**, ὅπως γίνονται γνωστὰ εἰς αὐτοὺς εἴτε ἀπὸ **τὴν ἰδικήν των ἐμπειρίαν**, εἴτε ἀπὸ **τὴν διδασκαλίαν τῶν πραγματικῶν μαθημάτων.** Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς πηγὰς θὰ σχηματίζωνται οἱ διάφοροι πραγματικοὶ κύκλοι, **εἰς τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ὁποίους θὰ κινῆται ἡ διδασκαλία κάθε μεθοδικῆς ἑνότητος τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους τῆς ἐπεξεργασίας της].** Παραθέτομεν ἐδῶ χάριν παρδ. τοὺς πραγματικοὺς κύκλους, ἐντὸς τῶν

ὁποίων σκόπιμον εἶναι νὰ κινῆται κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Η. ἡ
ἀριθμητ. διδασκαλία τῆς πρώτης τάξεως τοῦ δημοτ. σχολείου
Καὶ οἱ κύκλοι αὐτοὶ λαμβάνονται ἀπὸ τὰς μνημονευθείσας δύο με-
γάλας πηγὰς καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν εἰς τὴν τάξιν αὐτὴν διδασκομένην
φρονηματιστικὴν ὕλην (π.χ. τὰ παραμύθια), ὅπως ἀπαιτοῦν ἀρ-
κετοὶ ἀπὸ τοὺς ὀπαδοὺς τοῦ Ziller. Ἀναφέρονται εἰς πράγματα
τῆς φύσεως καὶ τοῦ βίου, τὰ ὁποῖα ἢ γνωρίζουν οἱ παῖδες ἀπὸ
τὴν ἰδικήν των ἐμπειρίαν ἢ μανθάνουν ἀπὸ τὸ μάθημα τῆς Πρα-
γματογνωσίας. Ἔτσι τὰ πραγματικὰ στοιχεῖα, μὲ τὰ ὁποῖα εἰσά-
γει ὁ Η. τοὺς μικροὺς μαθητὰς εἰς τὸν πρῶτον σχηματισμὸν τῶν
ἀριθμῶν 1—10, εἶναι τὰ ἀκόλουθα: 1. Τὸ ἀριθμητικὸν κιβώ-
τιον (ἀριθμ. 1). 2. Οἱ ἴδιοι οἱ μαθηταί, καθόσον ἐξετάζεται τὸ
ζήτημα, τί ἔχουν 2 φορὰς εἰς τὸ σῶμά των (ἀριθμ. 2). 3. Τὰ
τρία παράθυρα τῆς σχολικῆς αἰθούσης (ἀριθμ. 3). 4. Οἱ 4 τοῖχοι
τῆς ἴδιας αἰθούσης (ἀριθμ. 4). 5. Τὰ 5 δάκτυλα τῆς χειρὸς (ἀ-
ριθμ. 5) 6. Αἱ 6 ἡμέραι τῆς σχολικῆς ἑβδομάδος (ἀριθμ. 6). 7.
Αἱ 7 ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος (ἀριθμ. 7). 8. Οἱ 8 κτύποι τοῦ ὡρο-
λογίου κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς πρωϊνῆς διδασκαλίας (ἀριθμ. 8). 9.
Ἡ παιδία τῶν κώνων (συνηθεστάτη εἰς τὴν Γερμανίαν, ἀριθμ.
9). 10. Τὰ μικρὰ νομίσματα μέχρι τοῦ δεκαλέπτου συμπεριλαμ-
βανομένου (ἀριθμ. 10).[1] [Οἱ δὲ πραγματικοὶ κύκλοι, μὲ τοὺς ὁποί-
ους ὁ Η. συνδέει τὴν διδασκαλίαν τῶν μεθοδικῶν ἑνοτήτων τῆς
κυρίως ἀριθμήσεως εἰς τὴν τάξιν αὐτήν, εἶναι οἱ ἑξῆς: 1. Εἰς τὸ
σχολεῖον (μεθοδ. ἑνότης τῆς προσθέσεως). 2. Εἰς τὸ σπίτι (ἀφαί-
ρεσις). 3. Εἰς τὸν κῆπον (ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις μαζί). 4.
Εἰς τὸν λειμῶνα (ἡ ἀνάλυσις). 5. Εἰς τὸ δάσος (ἡ συμπλήρωσις).
6. Εἰς τὸν ἀγρὸν (ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ συμπλήρωσις μαζί). 7. Ἐπα-

[1] Μερικοὶ ἀντιτάσσουν, ὅτι, ἐφόσον χρησιμοποιοῦνται ὡς πραγματικὰ
στοιχεῖα τῆς ἀριθμήσεως αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος ἢ καὶ αὐτοὶ οἱ κτύποι
τοῦ ὡρολογίου, δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνεται λόγος περὶ πραγματικῆς, ἀλλὰ μό-
νον περὶ φαινομενικῆς ἐποπτείας. Ἐν τούτοις πρέπει νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι
ὁ Η., ὅπως θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω, χρησιμοποιεῖ τὰ ἀνωτέρω μνη-
μονευθέντα πραγματικὰ στοιχεῖα ὡς ἀφετηρίαν τῆς διδασκαλίας, ἀμέσως
δὲ μεταπίπτει ἀπὸ αὐτὰ εἰς τοὺς κύβους τοῦ ἀριθμητ. κιβωτίου, τοὺς
ὁποίους καὶ μεταχειρίζεται ὡς ἐποπτικὸν μέσον.

νάληψις ὅλων τῶν μέχρι τοῦδε διδαχθέντων πραγματικῶν κύκλων καὶ μεθοδ. ἑνοτήτων. 8. Εἰς τὴν οἰκογένειαν (πρόσθεσις τριῶν προσθετέων). 9. Εἰς τὴν οἰκογένειαν (διπλῆ ἀφαίρεσις). 10. Τὰ ζῶα τοῦ σπιτιοῦ (ἡ σύνθετη πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις μαζί)].

Ἀξία τώρα σημειώσεως εἶναι καὶ ἡ γνώμη, τὴν ὁποίαν διατυπώνει διὰ τὸ προκείμενον ζήτημα ὁ Beetz (Der vereinfachte Rechenunterricht, Jena, 1891 καὶ Kritische Beiträge zu den Tagesströmungen im elementaren Rechenunterricht, Gotha, 1891. Πρβ. καὶ Pädagogische Warte, 1903, τεῦχ. 19, σ. 929). Καὶ ὁ Beetz τάσσεται ὑπὲρ τῆς διατάξεως τῶν προβλημάτων κατὰ πραγματικοὺς κύκλους. Τονίζει ὅμως συγχρόνως καὶ τὰ ἀκόλουθα. Ἐν πρώτοις ὑπενθυμίζει, ὅτι ἄλλο πρᾶγμα εἶναι ἡ κατὰ πραγματικοὺς κύκλους διάταξις τῶν προβλημάτων καὶ ἄλλο ἡ διάταξις τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ἡ ὁποία φυσικὰ πρέπει νὰ κανονίζεται ὄχι ἀπὸ τὰ πραγματικὰ στοιχεῖα, ἀλλὰ ἀπὸ τὴν φύσιν αὐτῆς τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης (ἤτοι τῶν ἀριθμῶν, τῶν ἀριθμητ. πράξεων καὶ τῶν σχέσεων τῶν μεγεθῶν). Εἰς τὸ σημεῖον βέβαια αὐτὸ δὲν ὑπάρχει διχογνωμία μεταξὺ τοῦ Beetz καὶ τῶν πλείστων ὀπαδῶν τῆς Ἑρβαρτιανῆς σχολῆς. Ἡ διχογνωμία παρουσιάζεται εἰς ἄλλο σημεῖον, τὸ ὁποῖον τονίζει ἀκολούθως ὁ Β. Ὁ Beetz δηλ. εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἡ ἀριθμητ. διδασκαλία δὲν πρέπει νὰ ἀφορμᾶται ἀπὸ τὰ πραγματικὰ στοιχεῖα, ὅτι δὲ μόνον ἡ ἐφαρμογὴ σκόπιμον εἶναι νὰ γίνεται εἰς τὰ πράγματα. [Ἐντελῶς δὲ ἰδιαιτέρως πρέπει νὰ τηρῆται ἡ ἀρχὴ αὐτὴ κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Β. εἰς τὴν πρώτην ἀρίθμησιν καὶ μάλιστα κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν 10 πρώτων ἀριθμῶν. Εἶναι ὅλως διόλου παράλογον ἀπὸ ψυχολογικῆς ἀπόψεως, φρονεῖ ὁ Beetz, νὰ θέλωμεν νὰ μεταφέρωμεν τὸ διαφέρον τῶν παίδων ἀπὸ τὰ γνωστά των πραγματικὰ στοιχεῖα εἰς τὰς ὅλως διόλου ἀκόμη ἀγνώστους εἰς αὐτοὺς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν. Ἀπεναντίας τὸ διαφέρον των πρὸς τὰ πράγματα θὰ ἐμποδίσῃ τὴν γένεσιν τοῦ διαφέροντος πρὸς τὰς ἀριθμητικὰς ἐννοίας. Ὅσον δὲ μεγαλύτερον εἶναι τὸ διαφέρον των πρὸς τὰ πράγματα, τόσον μικρότερη θὰ εἶναι ἡ ἑκουσία των προσοχὴ πρὸς τοὺς ἀριθμούς. Τὸ πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὴν ἀρίθμησιν διαφέρον ἠμπορεῖ νὰ γεννηθῇ μόνον διὰ τῆς ἀμέσου ἐποπτείας ἁπλῶν καὶ ἀδιαφόρων πραγμάτων

(, όπως είναι π.χ. αἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν, αἱ σφαῖραι, οἱ κῦβοι, τὰ ξυλάρια κ.τ.λ.) καὶ τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων αὐτῶν, διὰ τῆς ἐποπτείας δὲ ἐξασφαλίζεται καὶ ἡ γνῶσις καὶ ἡ κατανόησις τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Μόνον δὲ ἀφοῦ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν γνωρίσουν καὶ κατανοήσουν καλὰ οἱ μαθηταὶ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰς ἐπ' αὐτῶν πράξεις, θὰ ἠμπορῇ νὰ γίνῃ καὶ ἐφαρμογὴ τῶν σχετικῶν γνώσεών των ἐπάνω εἰς γνωστοὺς πραγματικοὺς κύκλους

Εἰς τοὺς δισχυρισμοὺς αὐτοὺς τοῦ Beetz ἀντιπαρατηρεῖ ὁ Hartmann (ὅπ. ἀν., καθὼς καὶ εἰς τὸ περιοδικὸν Neu Bahnen, Gotha, 1891, τεῦχ. 3), ὅτι οὔτε αὐτὸς οὔτε οἱ ὁμόφρονές του μεταβιβάζουν τοὺς μικροὺς μαθητὰς κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς πρώτης ἀριθμήσεως ἀπὸ τὸν πραγματικὸν κύκλον ***ἀμέσως*** εἰς τὰς ἐντελῶς ἀκόμη ἀγνώστους εἰς αὐτοὺς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ πάντοτε δι' ἑνὸς διαμέσου σταθμοῦ, ἤτοι διὰ τῆς ἐξετάσεως ἑνὸς ὡρισμένου μέσου τῆς ἐποπτείας, ὁποῖον εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν κιβώτιον τοῦ Tillich. Ἀπὸ τὰ πράγματα φέρονται οἱ μικροὶ μαθηταὶ εἰς τὸ διάμεσον ὄργανον τῆς ἐποπτείας καὶ ἀπὸ αὐτὸ εἰς τὸν ἀριθμὸν καὶ τὰς σχετικὰς μὲ αὐτὸν πράξεις. Ἔτσι τὸ ὑπὲρ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῆς ἀριθμήσεως διαφέρον τῶν μαθητῶν αὐτῶν ἐξεγείρεται διὰ τῆς ἀκολούθου ὁδοῦ :

1. Διαφέρον πρὸς τὸν πραγματικὸν κύκλον.
2. Μεταβίβασις τοῦ διαφέροντος αὐτοῦ εἰς τὸ διάμεσον ὄργανον τῆς ἐποπτείας.
3. Διαφέρον πρὸς τὰς ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι γίνονται ἐπάνω εἰς τὸ ἐποπτικὸν αὐτὸ μέσον.
4. Μεταβίβασις τοῦ διαφέροντος αὐτοῦ εἰς τὸν ἀριθμὸν καὶ τὰς σχετικὰς μὲ αὐτὸν πράξεις.

Ἀκολουθουμένη τώρα ἡ ὁδὸς αὐτὴ ἐπάνω εἰς τὰ εἰδολογικὰ στάδια διανύεται ὡς ἑξῆς :

1. Ἀφετηρία ἀπὸ τὸν πραγματικὸν κύκλον (σκοπός).
2. Προπαρασκευαστικὸς διάλογος ἐν συνδυασμῷ μὲ τὸ διάμεσον ὄργανον τῆς ἐποπτείας (προπαρασκευὴ ἢ ἀνάλυσις).
3. Πρόσκτησις τοῦ νέου ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ μέσου αὐτοῦ τῆς ἐποπτείας (προσφορὰ ἢ σύνθεσις).

4. Ἄλλαι ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ μέσου αὐτοῦ ἢ καὶ χωρὶς αὐτὸ καὶ ἐξαγωγὴ τοῦ γενικοῦ (σύνδεσις καὶ σύστημα).
5. Ἐφαρμογὴ τοῦ νέου εἰς τὸν πραγματικὸν κύκλον (ἐφαρμογὴ ἢ μέθοδος)].

Ἡ ἰδική μας γνώμη ὡς πρὸς τὴν πραγματικὴν ἀρίθμησιν συνοψίζεται εἰς τὰ ἑξῆς :

[1. Εἶναι ἀναμφίβολον, ὅτι μὲ τὴν πραγματικὴν ἀρίθμησιν διευκολύνεται μὲν σημαντικὰ ἡ ἀνάπτυξις ***τοῦ ἀριθμητικοῦ διαφέροντος*** τῶν μαθητῶν, διότι, ὅπως ἔχομεν παρατηρήσει καὶ εἰς ἄλλο μέρος τοῦ παρόντος ἔργου (ἴδ. ἀν. σελ.203), τὸ πρὸς τὰ γνωστά των πράγματα διαφέρον θὰ μεταβιβασθῇ καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰς ἐπ' αὐτῶν πράξεις, κατορθώνεται δὲ καὶ ἡ καλλιέργεια ***τοῦ πρακτικοῦ διαφέροντος*** τῶν μαθητῶν καὶ ἡ προπαρασκευή των διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ μέλλοντος πρακτικοῦ βίου, ἐνισχύεται δὲ προφανῶς καὶ ***τὸ ἠθικὸν διαφέρον*** των, καθόσον μὲ τὴν ἀρίθμησιν αὐτὴν μανθάνουν τελειότερα καὶ τὰ πράγματα, ἤτοι τὸ μέσον τῆς πραγματώσεως κάθε ἠθικοῦ σκοποῦ, τέλος δὲ εὐοδώνεται καὶ ***ἡ συγκέντρωσις*** τῆς ὅλης διδασκομένης ὕλης, ἡ ὁποία, καθὼς εἶναι γνωστόν, συντελεῖ εἰς τὴν εὐκολωτέραν ἀφομοίωσίν της καὶ εἰς τὴν ἀποκατάστασιν ἑνότητος εἰς τὸν ὅλον παραστατικὸν κύκλον τῶν μαθητῶν. Ἐφόσον δὲ ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις ἐξυπηρετεῖ ὅλους αὐτοὺς τοὺς σκοπούς, εἶναι προφανές, ὅτι πρέπει νὰ ἀσκῆται εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον].

2. Τὰ πράγματα, εἰς τὰ ὁποῖα θὰ ἀναφέρωνται τὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα, σκόπιμον εἶναι νὰ λαμβάνωνται ἀφ' ἑνὸς μὲν ***ἀπὸ τὰ εἰς τὸ σχολεῖον διδασκόμενα πραγματικὰ μαθήματα***, διὰ νὰ κατορθώνεται ἔτσι καὶ ἡ ἐπιθυμητὴ συγκέντρωσις, ἀφ' ἑτέρου δὲ ***ἀπὸ τὸν πρακτικὸν βίον***, διὰ νὰ καλλιεργῆται ἔτσι καλύτερα καὶ τὸ πρακτικὸν διαφέρον τῶν παίδων.

3. Ἀπὸ ὁποιανδήποτε ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω πηγῶν καὶ ἂν λαμβάνεται τὸ πραγματικὸν ὑλικὸν τῶν ἀριθμ. προβλημάτων, πρέπει νὰ ἀναφέρεται κατὰ προτίμησιν εἰς ***τὴν στενωτέραν πατρίδα τῶν μαθητῶν***, ἐφόσον δὲ εἶναι δυνατόν, νὰ ἀνήκῃ πλέον εἰς τὸν κύκλον τῶν γνώσεων καὶ τῆς ἐμπειρίας των καὶ δι' αὐτὸ νὰ εὑρίσκῃ ἕτοιμον τὸ παντοειδὲς διαφέρον των. Ἀλλὰ καὶ ἂν αἱ παρουσιαζόμεναι εἰς τοὺς μαθητὰς κατὰ τὴν ἀριθμητ. διδασκαλίαν

πραγματικαὶ σχέσεις δὲν εἶναι ἀκόμη γνωσταὶ εἰς αὐτούς, ὅπως θὰ συμβαίνῃ μὲ ἀρκετὰς πραγματικὰς σχέσεις ἀναφερομένας εἰς τὸν μέλλοντα πρακτικόν των βίον, πρέπει αἱ σχέσεις αὐταὶ νὰ συσχετίζωνται μὲ ἄλλας γνωστὰς εἰς αὐτοὺς καὶ νὰ εἶναι ὁπωσδήποτε ἀνάλογοι μὲ τὰς ἀντιληπτικάς των δυνάμεις, διὰ νὰ ἠμποροῦν νὰ ἐξεγείρουν τὸ διαφέρον των. Ἐν πάσῃ δὲ περιπτώσει **ἡ διασάφησις τῶν πραγματικῶν αὐτῶν σχέσεων δὲν πρέπει νὰ περιορίζῃ τὴν καθαυτὸ ἀρίθμησιν.**

4. Δὲν χωρεῖ βέβαια καμία ἀμφιβολία, ὅτι οἱ ἀνωτέρω μνημονευθέντες σκοποί, διὰ τοὺς ὁποίους ἀσκεῖται ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις, ἐξυπηρετοῦνται ἐν γένει καλύτερα, ἂν **τὰ εἰς τὸ ποικίλον πραγματικὸν ὑλικὸν ἀναφερόμενα ἀριθμ. προβλήματα διατάσσωνται κατὰ ἑνιαίους πραγματικοὺς κύκλους καὶ ἂν κάθε ἀριθμητικὴ μεθοδικὴ ἑνότης κινῆται ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους τῆς ἐπεξεργασίας της ἐπάνω εἰς ἕνα τέτοιον κύκλον.** Αὐτὸ ὅμως φυσικὰ κάθε ἄλλο σημαίνει παρὰ ὅτι ἡ διαδοχὴ τῶν ἀριθμητικῶν μεθοδικῶν ἑνοτήτων θὰ κανονίζεται ἀπὸ τοὺς πραγματικοὺς αὐτοὺς κύκλους. Θὰ κανονίζεται μόνον ἀπὸ τὴν φύσιν τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, [μόνον δὲ μετὰ τὸν κανονισμὸν αὐτὸν θὰ συνδέεται μὲ κάθε ἀριθμητ. ἑνότητα ἐκεῖνος ὁ πραγματικὸς κύκλος, ὁ ὁποῖος παρέχει ὑλικὸν πρὸς σχηματισμὸν προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰς ἀριθμητ. πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρόκειται νὰ διδαχθοῦν μὲ τὴν ἐν λόγῳ ἀριθμητ. ἑνότητα. Εἶναι δὲ αὐτονόητον, ὅτι ὁ ἴδιος πραγματικὸς κύκλος θὰ ἠμπορῇ νὰ συνδεθῇ μὲ περισσοτέρας τῆς μιᾶς καὶ ἀσχέτους ὡς πρὸς τὸ περιεχόμενον ἀριθμητικὰς ἑνότητας, ἐφόσον δύναται νὰ τὰς ἐξυπηρετήσῃ.

5. Ἡ κατὰ τὸν ἀνώτερω τρόπον ἐφαρμογὴ τῆς ἀρχῆς τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως εἶναι βέβαια δυνατὴ εἰς ὅλας τὰς τάξεις τοῦ δημοτ. σχολείου. Ἐν τούτοις δὲν εἶναι σκόπιμον νὰ γίνεται καὶ κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς πρώτης ἀριθμήσεως, ἰδίως δὲ κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν πρώτων ἀριθμῶν καὶ τῶν σχετικῶν ἀριθμητ. πράξεων. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ εὑρίσκομεν πολὺ εὐλόγους τὰς ἀντιρρήσεις τοῦ Beetz. Ὁ σχηματισμὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν καὶ ἡ ἐκτέλεσις τῶν σχετικῶν ἀριθμητ. πράξεων δὲν πρέπει νὰ ἀφορμᾶται ἀπὸ τὰ πράγματα τοῦ κύκλου τῆς ἐμπειρίας

τῶν παίδων, διότι τὰ πράγματα αὐτά, καὶ ἀφοῦ γίνῃ ἡ ἀπὸ αὐτὰ μετάβασις εἰς τὸ μέσον τῆς ἐποπτείας, ὡς ἐνδιαφέροντα τοὺς παῖδας θὰ περισποῦν συνεχῶς τὴν προσοχήν των καὶ θὰ τὴν ἀποστρέφουν ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς ἐκείνας ἐργασίας, ἀπεναντίας δὲ πρέπει νὰ βασίζεται εἰς τὴν ἐποπτείαν ἁπλῶν καὶ ἀδιαφόρων ἀντικειμένων, ὁποῖα εἶναι αἱ σφαῖραι τοῦ ἀριθμητηρίου, οἱ κῦβοι τοῦ ἀριθμητ. κιβωτίου κ.τ.λ. (ἴδ. καὶ ἀν. σελ. 79 καὶ 105). Ἄλλωστε πρὸς σχηματισμὸν τῶν πρώτων ἀριθμῶν καὶ ἐκτέλεσιν τῶν σχετικῶν πράξεων δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ προβάλλωμεν εἰς τοὺς μικροὺς μαθητὰς **ἐφηρμοσμένα προβλήματα**, διότι θὰ ζητοῦμεν ἔτσι ἀπὸ αὐτοὺς πράγματα ἀνώτερα ἀπὸ τὰς δυνάμεις των, ἀφοῦ, καθὼς ἠξεύρομεν, μὲ τὴν θέσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν ζητοῦνται ἀπὸ τοὺς μαθητὰς δύο ἐργασίαι, πρῶτον μὲν νὰ εὕρουν, ποίαν ἀριθμητ. πρᾶξιν πρέπει νὰ ἐκτελέσουν, ἔπειτα δὲ νὰ σκεφθοῦν, πῶς πρέπει νὰ τὴν ἐκτελέσουν. Τὸ ὀρθότερον εἶναι νὰ προβάλλωμεν διὰ τὸν μνημονευθέντα σκοπὸν εἰς τοὺς μαθητὰς **προβλήματα μὲ συγκεκριμένους ἀριθμούς**, ὁποῖα εἶναι τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὰ ἀντικείμενα τῶν μέσων τῆς ἐποπτείας, διότι μὲ τὴν θέσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν θὰ ζητῆται ἀπὸ τοὺς μαθητὰς μία μόνον ἐργασία, ἤτοι ἡ ἐκτέλεσις μιᾶς δοθείσης πράξεως (ἴδ. καὶ ἀν. σελ. 201). Μόνον δὲ ἀφοῦ μὲ τὴν λύσιν τέτοιων προβλημάτων ἐξασφαλισθῇ ἡ γνῶσις τοῦ διδασκομένου ἀριθμοῦ καὶ τῶν σχετικῶν ἀριθμητ. πράξεων, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ προβάλλωνται εἰς τοὺς μαθητὰς εἴτε πρὸς στερέωσιν εἴτε πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἀποκτηθεισῶν γνώσεων καὶ ἐφηρμοσμένα προβλήματα, τὰ ὁποῖα φυσικὰ σκόπιμον εἶναι κατόπιν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα νὰ ἀνήκουν εἰς ἕνα ἑνιαῖον πραγματικὸν κύκλον. Εὐνόητον δὲ εἶναι, ὅτι, ὅσον περισσότερον εἰσάγονται οἱ μαθηταὶ εἰς τὸν μηχανισμὸν τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν καὶ ὅσον δεξιώτεροι γίνονται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, τόσον γενικωτέρα θὰ ἠμπορῇ νὰ γίνεται ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀρχῆς τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως, ἐκτεινομένη ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἕως τὸ τέλος τῆς ἐπεξεργασίας κάθε μεθοδικῆς ἑνότητος.

6. Εἰς ὁποιανδήποτε ἔκτασιν καὶ ἂν ἀσκῆται ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις, εἶναι προφανές, ὅτι κατὰ τὴν διδασκαλίαν κάθε μεθοδικῆς ἑνότητος θὰ δίδωνται εἰς τοὺς μαθητὰς κατὰ τὸ στάδιον

τῆς ἀσκήσεως τοῦ διδαχθέντος νέου πρὸς λύσιν καὶ προβλήματα μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς—τὰ ὁποῖα, καθὼς εἴδαμεν ἀμέσως ἀνωτέρω, θὰ χρησιμοποιοῦνται κατὰ τὴν πρώτην ἀρίθμησιν καὶ διὰ *τὴν εἰσαγωγὴν* τῶν μαθητῶν εἰς τὸ νέον—, καθὼς καὶ προβλήματα μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς (ἴδ. καὶ ἀν. σ. 202) Φυσικὰ δὲ τὰ πρὸς ἄσκησιν τοῦ διδαχθέντος νέου διδόμενα εἰς τοὺς μαθητὰς προβλήματα μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς σκόπιμον εἶναι νὰ ἀναφέρωνται εἰς τὰ ἴδια πράγματα, εἰς τὰ ὁποῖα θὰ ἀναφέρωνται καὶ τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα τῆς ἴδιας μεθοδικῆς ἑνότητος].

Συλλογαὶ προβλημάτων, εἰς τὰς ὁποίας ἐφαρμόζεται μὲ μεγαλύτερην ἢ μικρότερην ἀκολουθίαν ἡ πραγματικὴ ἀρίθμησις, εἶναι μεταξὺ ἄλλων αἱ συλλογαὶ τῶν Hartmann καὶ Ruhsam, τῶν Klauke καὶ Klein, τῶν Thieme καὶ Schlosser, τοῦ Magnus, τοῦ Kentenich, τῶν Schaeffer καὶ Weidenhammer, τῶν Räther καὶ Wohl, τοῦ Steuer, καθὼς καὶ ἡ τοῦ Beetz μὲ τὰς ῥηθείσας ἐπιφυλάξεις.

Ὡς πρὸς δὲ τὴν πραγματικὴν ἀρίθμησιν ἴδε ἐκτὸς τῶν ἐργασιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μνημονευθῆ ἀνωτέρω, καὶ τὰς ἑξῆς: *Lomberg*, Rechenaufgaben für das 4 Schuljahr im Anschluss anden geographischen Unterricht εἰς τὸ περιοδ. Evangel. Schulblatt, ἔτ. 33, τευχ. 6 καὶ 8 καὶ τὴν 26 Einladungsschrift des Herbartvereins für Rheinland und Westphalen.—*Lavtar*, Der Rechenunterricht in der Volksschule, Laibach, 1888.—*Fitzga*, Die natürliche Methode des Rechenunterrichts in der Volks—und Bürgerschule, 2 μέρη, 1893 καὶ 1898, Wien.—*Edmund Hartmann*, Anleitung zur Behandlung des Rechnens mit benannten Zahlen in fragendentwickelnden Lehrform, Giessen, 1896.

XIX. Ο ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΒΙΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΝ.

[Ὁποιανδήποτε γνώμην καὶ ἂν σχηματίσῃ κανεὶς περὶ τῆς ἀρχῆς τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως, ἕνα ἐν τούτοις πρᾶγμα θὰ εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ παραδεχθῇ, ὅτι δηλ. ἡ ἀρίθμησις πρέπει νὰ γίνεται μὲ πράγματα καὶ ὅτι ἡ πλουσιώτερη πηγή, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἠμπορεῖ νὰ ἀντλήσῃ τὰ πραγματικά της στοιχεῖα, εἶναι αἱ ποικίλαι σχέσεις τοῦ πραγματικοῦ πρακτικοῦ βίου, ἐντὸς τῶν ὁποίων κινοῦνται ἀπὸ τοῦδε ὅλοι οἱ μαθηταὶ καὶ θὰ κινηθοῦν ἀκόμη ἐνεργότερα καὶ εὐρύτερα ἀργότερα, ὅταν θὰ ἐξέλθουν πλέον ἀπὸ τὸ σχολεῖον. Ἂν ἡ ἀσχολία τῶν παίδων μὲ τὰ προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου συντελῇ, καθὼς εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, εἰς τὴν ἀνάπτυξιν καὶ τοῦ καθαυτὸ ἀριθμητικοῦ καὶ τοῦ ἠθικοῦ διαφέροντός των, μὲ αὐτὴν καὶ μόνον εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάπτυξις τοῦ πρακτικοῦ των διαφέροντος καὶ ἡ προπαρασκευή των διὰ τὰς ἀριθμητικὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου]

Ὀρθότατα δι᾽ αὐτὸ τὸ Πρωσσικὸν ὑπουργικὸν Διάταγμα τῆς 31 Ἰανουαρίου 1908 ἀπαιτεῖ τὰ ἀκόλουθα: «Ἰδιάζουσα σημασία πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸ ζήτημα, ὅπως κατὰ τὴν ἐκλογὴν τῶν προβλημάτων λαμβάνωνται ὑπ᾽ ὄψιν **αἱ σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου.** Ἀπὸ τὴν κατώτερην ἀκόμη βαθμίδα πρέπει νὰ δίδωνται ἐφηρμοσμένα προβλήματα, ἀναφερόμενα εἰς τὰς πραγματικὰς καὶ εἰς τοὺς παῖδας τῆς βαθμίδος αὐτῆς ἀντιληπτὰς καὶ οἰκείας σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου. Ἰδίως ὅμως εἰς τὰς ἀνωτέρας βαθμίδας πρέπει οἱ διδάσκαλοι ἀποβλέποντες εἰς τὰς σχέσεις, εἰς τὰς ὁποίας θὰ εἰσέλθουν ἀργότερα οἱ μαθηταί των, νὰ δίδουν εἰς αὐτοὺς ἐφηρμοσμένα προβλήματα, λαμβανόμενα ἀπὸ τὰς ποικίλας σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου (ὁποῖαι εἶναι π. χ. αἱ σχέσεις τοῦ οἰκιακοῦ βίου, τοῦ γεωργικοῦ, τοῦ βιομηχανικοῦ, τοῦ ἐμπορικοῦ, αἱ σχέσεις τῆς συγκοινωνίας κ. τ. λ.)· ἐντελῶς δὲ ἰδιαιτέρως πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ᾽ ὄψιν ἐπὶ τοῦ προκειμένου αἱ ἰδιαίτεραι συνθῆκαι τοῦ κάθε τόπου... Αὐτονόητον δὲ εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ μανθάνουν οἱ μαθηταὶ καλὰ τὰ ἰσχύοντα νομίσματα, μέτρα καὶ σταθμά. Εἰς καταλλήλους δὲ περιστάσεις καλὸν εἶναι νὰ γίνωνται εἰς τοὺς μαθητὰς μὲ ἁπλῆν μορφὴν καὶ σχετικαὶ οἰκονομικαὶ διδαχαὶ (ἀναφερόμεναι π.χ. εἰς τὴν οἰκονομίαν τοῦ οἴκου, τῆς κοινότητος, τοῦ κράτους, εἰς τὸ ζητήματα τῶν ἀσφαλειῶν κ.τ.λ. ».

Μολονότι αἱ ἀνωτέρω ἀπαιτήσεις δὲν εἶναι νέαι, ἐν τούτοις δὲν εἶναι ἀνωφελὲς νὰ ὑπενθυμίζωνται ἀπὸ τὰς ἐπισήμους ἀρχὰς εἰς τοὺς ἀναλαμβάνοντας τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν. Διότι δὲν εἶναι ἀσύνηθες νὰ τὰς λησμονοῦν, παρασυρόμενοι ἰδίως ἀπὸ τὰς ἐν χρήσει συλλογὰς προβλημάτων, πολλαὶ ἀπὸ τὰς ὁποίας παρεξηγοῦσαι τὴν ἔννοιαν τοῦ πρακτικοῦ βίου φθάνουν εἰς μονομερείας καὶ ὀπισθοδρομικότητας. Ἔτσι τὰ διὰ τὴν ἀνωτέραν βαθμίδα προωρισμένα τεύχη ἀρκετῶν συλλογῶν δὲν περιέχουν σχεδὸν τίποτε ἄλλο παρὰ μόνον προβλήματα ἐμπορικῆς φύσεως, ὡσὰν νὰ ἐπρόκειτο ὅλοι οἱ μαθηταὶ νὰ μορφωθοῦν εἰς ἐμπόρους, ἐνῷ συγχρόνως παρουσιάζουν καὶ καταπληκτικὴν ἄγνοιαν τῶν μορφῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων κινεῖται πράγματι ἡ ἐμπορικὴ ἀρίθμησις. Ἄλλαι πάλιν συλλογαί, ἀποβλέπουσαι εἰς τὴν ἱκανοποίησιν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρων ἀπόψεων, περιέχουν γενικὰ καὶ ἀόριστα, **σχηματικὰ** προβλήματα, ὁποῖα π.χ. εἶναι τὰ ἀκόλουθα: 1 πῆχ. στοιχίζει 9,50 δρ. Πόσον στοιχίζουν οἱ 3 πήχ.; —1 ὀκᾶ στοιχίζει 3,65 δρ. Πόσον στοιχίζουν αἱ 5 ὀκάδες; Ἀλλὰ εἰς τὸν πραγματικὸν βίον δὲν ἀγοράζομεν οὔτε 3 πήχεις, ἀλλὰ 3 πήχεις πανί, ὕφασμα κ. τ. λ., οὔτε 5 ὀκάδας, ἀλλὰ 5 ὀκ. ἅλας, ἄλευρον κ. τ. λ.

Τὰ προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογα ἀπὸ ὅλας τὰς ἀπόψεις, μεταξὺ τῶν ὁποίων σπουδαία εἶναι καὶ ἡ ἄποψις τῶν τιμῶν, μὲ τὰς σχέσεις τοῦ τόπου, ἤτοι τῆς στενωτέρας πατρίδος τῶν μαθητῶν, καθὼς καὶ μὲ τὸν βιοτικόν των κύκλον. Ὀφείλει δὲ ὁ διδάσκαλος κατὰ τὸν σχηματισμὸν καὶ τὴν θέσιν τῶν προβλημάτων νὰ ἀφορμᾶται ἀπὸ τὰς ἐμπειρίας, τὰς ὁποίας ἔχουν συλλέξει οἱ ἴδιοι οἱ μαθηταὶ ὡς πρὸς τὰς ἀγορὰς καὶ πωλήσεις, ὡς πρὸς τὴν ἀλληλογραφίαν, ὡς πρὸς τὰ ταξίδια, ὡς πρὸς τὰς διαφόρους ἐργασίας κ.τ.λ. καὶ νὰ τοὺς προκαλῇ νὰ λέγουν οἱ ἴδιοι τὰς τιμὰς τῶν ὠνίων, τὰ ποσὰ τῶν ἡμερομισθίων, τὰ ταχυδρομικὰ τέλη τῶν ἐπιστολῶν καὶ δεμάτων κ. τ. λ. Ὁσάκις δὲ οἱ μαθηταὶ δὲν θὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ τὸ κάμουν αὐτό, θὰ προσέρχεται ὁ διδάσκαλος εἰς βοήθειάν των μὲ τὴν πλούσιαν ἐμπειρίαν του. Συχνὰ θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ σχηματίζουν μόνοι των σχετικὰ προβλήματα (ἴδ. καὶ ἀνωτ., σελ. 204) ἢ τοὐλάχιστον νὰ συμμετέχουν εἰς τὸν σχηματισμόν των. Τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα ἠμποροῦν νὰ διασαφήσουν ἀρκετὰ τὸ πρᾶγμα. 1) Ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι οἱ μαθηταὶ τῆς ἀνωτέρας βαθμίδος τοῦ δημ. σχολείου τῆς Μακεδονικῆς πόλεως Α. ἀσχολοῦνται μὲ τὰ προβλήματα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ποσοστῶν καὶ ὡρισμένως τοῦ τόσον τοῖς °/₀ ἐπάνω εἰς τὰς διαφόρους σχέσεις τοῦ βίου. Οἱ μαθηταὶ γνωρίζουν ἴσως ἤ, ἂν δὲν γνωρίζουν μὲ ἀκρίβειαν, μανθάνουν τώρα ἀπὸ τὸν διδάσκαλον, ὅτι ἡ πόλις των κατὰ τὴν 1 Δεκεμβρίου 1920 εἶχε 6118 κατοίκους, ἀπὸ τοὺς ὁποίους οἱ 5316 ἦσαν χριστιανοὶ ὀρθόδοξοι, οἱ 279 Ἀθίγγανοι Μουσουλμᾶνοι καὶ οἱ 593 Ἰουδαῖοι καὶ ὅτι κατὰ τὴν 1 Δεκεμβρίου 1915 ὁ ἀριθμὸς τῶν κατοίκων της ἀνήρχετο εἰς 5475. Ἐπίσης μανθάνουν, ὅτι ἡ πόλις ἔχει 377 ἀγροικίας, ἀπὸ τὰς ὁποίας εἰς τὰς 247 γίνεται καὶ κτηνοτροφία. Εἰς τὰς τελευταίας αὐτὰς ἀγροικίας συντηροῦνται 390 ἵπποι, 486 βόες, 2310 πρόβατα καὶ 242 χοῖροι. Ἐπὶ τῇ βάσει τώρα τῶν ἀνωτέρω πληροφοριῶν ἠμποροῦν νὰ σχηματισθοῦν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διδασκάλου καὶ νὰ λυθοῦν τὰ ἑξῆς προβλήματα: 1. Πόσοι τοῖς °/₀ εἶναι οἱ χριστιανοὶ κάτοικοι τῆς πόλεως, πόσοι τοῖς °/₀ οἱ Μουσουλμᾶνοι καὶ πόσοι τοῖς °/₀ οἱ Ἰουδαῖοι; 2. Εἰς πόσον τοῖς °/₀ ἀνέρχεται ἡ αὔξησις τῶν κατοίκων κατὰ τὸ 1920 ἐν συγκρίσει μὲ τὸ 1915; 3. Πόσοι κάτοικοι ἀναλογοῦν κατὰ μέσον ὅρον εἰς κάθε ἀγροικίαν; 4. Πόσαι τοῖς °/₀ ἀπὸ τὰς ἀγροικίας καταγίνονται καὶ μὲ τὴν κτηνοτροφίαν; 5. Πόσα κτήνη ἀπὸ κάθε εἶδος ἀναλογοῦν κατὰ μέσον ὅρον εἰς κάθε ἀγροικίαν; 2) Ἐπίσης οἱ μαθηταὶ μανθάνουν ἀπὸ τὸν διδάσκαλον, ὅτι κατὰ τὸ ἔτος 1926 ἐσφάγηκαν καὶ ἐξετάσθηκαν ἀπὸ τὸν ἀστυκτηνίατρον εἰς τὴν πόλιν Α. 726 βόες, 1088 μόσχοι, 2558 πρόβατα καὶ 215 χοῖροι, ὅτι ἀπὸ αὐτὰ εὑρέθηκαν προσβλημένα ἀπὸ φυματίωσιν 184 βόες, 3 μόσχοι, 75 πρόβατα καὶ 15 χοῖροι καὶ ὅτι ἐν συγκρίσει μὲ τὸ ἔτος 1925 ἐσφάγηκαν ὀλιγώτεροι μὲν 235 βόες, 281 μόσχοι καὶ 35 χοῖροι, περισσότερα δὲ 258 πρόβατα. Ἀπὸ τὰς πληροφορίας αὐτὰς σχηματίζουν οἱ μαθηταὶ τὰ ἀκόλουθα προβλήματα: 1. Πόσοι τοῖς °/₀ βόες εἶχαν προσβληθῆ ἀπὸ τὴν φυματίωσιν; Πόσοι τοῖς °/₀ μόσχοι, πρό βατα, χοῖροι ; (Ἐδῶ γίνεται καὶ σύντομη ἐπίκαιρη διδαχὴ διὰ τὴν φυματίωσιν τῶν κτηνῶν). 2. Πόσοι τοῖς % ὀλιγώτεροι βόες, μόσχοι, χοῖροι ἐσφάγηκαν ἐν συγκρίσει μὲ τὸ 1925 ; (Αἴτια τοῦ πράγματος !) κ.τ.λ.—Σημειωτέον ἐπίσης, ὅτι ἠμπορεῖ ὁ διδάσκαλος νὰ ἀναθέτῃ συχνὰ εἰς τοὺς μαθητὰς νὰ προπαρασκευάζουν κατ' οἶκον τὸ ὑλικὸν τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα θὰ λυθοῦν εἰς τὸ σχολεῖον. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ζητοῦν πληροφορίας ἀπὸ τοὺς γονεῖς των διὰ κάθε ἀριθμητικὸν στοιχεῖον τῶν προβλημάτων, τὸ ὁποῖον δὲν θὰ γνωρίζουν, π.χ. διὰ τὴν τιμὴν ἑνὸς πράγματος, διὰ τὸ ποσὸν ἑνὸς ἡμερομισθίου κ.τ.λ.

Κύκλοι τοῦ πρακτικοῦ βίου καὶ τῆς ἐμπειρίας, οἱ ὁποῖοι αὐτόχρημα ἐπιβάλλουν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν μέγιστον ἀριθμὸν προβλημάτων, εἶναι π.χ. οἱ ἀκόλουθοι :

1. Ἡ οἰκιακὴ ἐν γένει οἰκονομία καὶ ἡ διάταξις τῶν καταστίχων τῶν ἐσόδων καὶ ἐξόδων τοῦ οἴκου, τὰ ὁποῖα κρατοῦν οἱ γονεῖς. Τὰ περισσότερα ἀπὸ τὰ κεφάλαια τῆς οἰκιακῆς οἰκονομίας ἀποτελοῦν καὶ ἰδιαιτέρους κύκλους (ἴδ. ἀμέσως κατωτέρω !), ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ὁποίους προσφέρει ἰδιαίτερα προβλήματα εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν.

2. Ἡ ἀγορὰ καὶ ἡ πώλησις τῶν τροφίμων καὶ ἄλλων χρησίμων ἀντικειμένων. Ἐπὶ τοῦ προκειμένου σπουδαῖον εἶναι νὰ συνηθίσουν οἱ μαθηταὶ νὰ μανθάνουν τὰς τιμὰς τῆς ἀγορᾶς. Ἐπίσης δὲ πρέπει νὰ μάθουν νὰ ἀντιλαμβάνωνται τὴν ἐξάρτησιν τῶν τιμῶν αὐτῶν ἀπὸ τὴν προσφορὰν καὶ τὴν ζήτησιν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ κατορθωθῇ χωρὶς πολλὴν δυσκολίαν. Ὡσαύτως ἠμπορεῖ νὰ διασαφηθῇ εἰς τοὺς μαθητὰς μὲ κατάλληλα παραδείγματα καὶ ἡ σημασία τοῦ χρήματος ὡς ἀνταλλακτικοῦ μέσου καὶ ὡς μέτρου τῆς ἀξίας.

3. Αἱ δαπάναι τῶν γονέων διὰ τὰ τέκνα των (διὰ τὰ ἐνδύματα, τὴν ὑπόδεσιν, τὰ βιβλία, τὴν γραφικὴν ὕλην των κ.τ λ.).

4. Ἡ ἐγκατάστασις καὶ ἡ συντήρησις τῆς κατοικίας, τὸ ἐνοίκιον καὶ ἡ σχέσις του μὲ τὸ εἰσόδημα.

5. Τὰ ἔξοδα τῆς θερμάνσεως τῆς κατοικίας (τιμαὶ τῶν διαφόρων καυσίμων ὑλῶν).

6. Τὰ ἔξοδα τοῦ φωτισμοῦ τῆς κατοικίας (πετρέλαιον, οἰνόπνευμα, φωταέριον, ἠλεκτρικὸν φῶς).

7. Αἱ γεωργικαί, βιοτεχνικαί, βιομηχανικαὶ κ.λ.π. ἀσχολίαι τῶν γονέων.

8. Ἡ σιδηροδρομικὴ καὶ ἡ ἀτμοπλοϊκὴ συγκοινωνία (τὰ δρομολόγια, αἱ τιμαὶ τῶν εἰσιτηρίων τῶν διαφόρων θέσεων διὰ παιδία καὶ ἐνήλικας κ.τ.λ.).

9. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ ἄλλους τόπους, ἰδίως γειτονικοὺς ἢ ἀποτελοῦντας κέντρα τῆς συγκοινωνίας. Εἰς πόσον χρόνον ἠμπορεῖ νὰ φθάσῃ κανεὶς εἰς τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς τόπους αὐτοὺς μὲ τὸν σιδηρόδρομον, μὲ τὸ ἀτμόπλοιον, μὲ τὸ αὐτοκίνητον, μὲ τὴν ἄμαξαν, μὲ τὸ ποδήλατον, ἔφιππος, πεζῇ κ.τ.λ.

10. Τὰ ἡμερομίσθια καὶ οἱ μισθοὶ τῶν τεχνιτῶν, τῶν χειρωνάκτων, τῶν ἐργατῶν ἐργοστασίων, τῶν ὑπαλλήλων κ.τ.λ.

11. Αἱ ἐργατικαὶ ἀσφάλειαι, καθὼς ἡ ἀσφάλεια εἰς περίπτωσιν ἀσθενείας, δυστυχήματος, ἀνικανότητος, γήρατος, ἡ ἀσφάλεια τῶν ἐπιζώντων συγγενῶν κ. τ. λ. Ἀφορμὴν εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν ἀνωτέρω ἀσφαλειῶν καὶ τὴν λύσιν τῶν σχετικῶν προβλημάτων ἠμποροῦν νὰ δώσουν αἱ ἀποδείξεις τῆς καταβολῆς τῶν σχετικῶν ἀσφαλίστρων.

12. Αἱ ἀσφάλειαι τῆς ζωῆς, αἱ ἀσφάλειαι κατὰ τοῦ πυρός, τῆς θαλάσσης, τῆς χαλάζης κ.τ.λ. Ἀφορμὴν εἰς τὴν σχετικὴν ἐξέτασιν ἠμποροῦν νὰ δώσουν καὶ εἰς τὰς προκειμένας περιπτώσεις αἱ ἀποδείξεις τῆς καταβολῆς τῶν ἀσφαλίστρων.

13. Τὰ παντὸς εἴδους ταμιευτήρια, αἱ τράπεζαι, αἱ ἑταιρεῖαι καὶ τὸ χρηματιστήριον (ἀποταμίευσις καὶ καταθέσεις, δάνεια, μετοχαί, τιμαὶ τῶν νομισμάτων κ.τ.λ.).

14. Ἡ κοινοτικὴ καὶ ἡ δημοσία οἰκονομία (κοινοτικοὶ καὶ δημόσιοι φόροι, φορολογικὴ δήλωσις, φορολογικὸν δελτίον, τὰ ταχυδρομικὰ καὶ τηλεγραφικὰ τέλη, τὰ δημόσια δάνεια καὶ αἱ ὁμολογίαι κ.τ.λ.).

Ἴδε καὶ τὰ ἑξῆς σχετικὰ ἔργα: *Teupser*, Wegweiser zur Bildung heimatlicher Rechenaufgaben, 156 σ., 3 ἔκδ., Leipzig, Hahn, 1913, 2, 50 μ. καὶ δεμ. 3 μ.—*Petri* u. *Gieseler*, Warum und wie sind die Kinder zum selbstständigen Bilden und Lösen der Rechenaufgaben, welche ihnen das spätere Leben stellt, anzuhalten ?, 4 ἔκδ., Arsnsberg, Stahl, 1911, δεδ. 1,60 μ. — *Deng*, 230 praktische Rechenaufgaben, wie das Leben bietet und wie sie das Leben braucht, ἔκδ. διὰ τοὺς διδασκάλους 1 μ., διὰ τοὺς μαθητὰς 20 λ., Laibach, Verlag der Blätter für den Abteilungsunterricht, 1908. — *Lang*, Bodenständiger Rechenunterricht. Eine Sammlung von zahlenmässigen Angaben aus allen Gebieten menschlichen Lebens als Hilfsbuch für den Rechenunterricht aller Schulen, Langensalza, Kortkamp, 1912, 6. 50 μ.

XX. Η ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΚΑΙ Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ.

Ὅτι ἡ Πολιτικὴ Οἰκονομία ἐνδιαφέρει ἀπὸ τὴν ἀριθμητικήν της ἄποψιν σπουδαιότατα τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν, ἐξάγεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι ὅλα σχεδὸν τὰ κεφάλαιά της σχετίζονται μὲ τὸν πρακτικὸν βίον. Οἱ περισσότεροι κύκλοι τοῦ πρακτικοῦ βίου, ἀπὸ τοὺς ὁποίους, καθὼς εἴδαμεν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ἠμπορεῖ καὶ ὀφείλει κατὰ τὴν γνώμην μας νὰ ἀντλῇ ἡ ἀριθμ. διδασκαλία τὰ προβλήματά της, ἀνάγονται εἰς τὴν Πολιτικὴν Οἰκονομίαν. Μερικοὶ ἀπὸ αὐτοὺς ἠμποροῦν νὰ ἀπασχολήσουν αὐτὴν ἀκόμη τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν τῶν κατωτέρων τάξεων τοῦ δημοτ. σχολείου, οἱ περισσότεροι ὅμως εἶναι κατάλληλοι διὰ τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν τῶν ἀνωτέρων τάξεών του. Ὅ,τι δὲ φρονοῦμεν ἐμεῖς ἐπὶ τοῦ προκειμένου, εἶναι καὶ γνώμη τῶν περισσοτέρων Μεθοδικῶν τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας. Ὅλαι αἱ ἐργασίαι, τὰς ὁποίας ἐμνημονεύσαμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου, ἀντιπροσωπεύουν τὴν γνώμην αὐτήν. Ὁ *Büttner* παραθέτει εἰς τὸ τεῦχος V τῆς ἐκδόσεως C τῆς συλλογῆς του μεταξὺ ἄλλων ὁμάδας προβλημάτων ἀναφερομένας εἰς τὴν οἰκιακὴν οἰκονομίαν, εἰς τὴν κοινοτικὴν οἰκονομίαν, εἰς τὴν δημοσίαν οἰκονομίαν, εἰς τὸ χρηματιστήριον, εἰς τὸ ταμιευτήριον, εἰς τὰς ἑταιρείας, εἰς τὰς ἀσφαλείας (τῆς ζωῆς, τοῦ κεφαλαίου, κατὰ τοῦ πυρός, τῆς χαλάζης, τῶν δυστυχημάτων) καὶ εἰς τὴν κρατικὴν ὑπὲρ τῶν ἐργατῶν πρόνοιαν. Ἐπίσης δὲ καὶ ἄλλαι συλλογαὶ προβλημάτων περιλαμβάνουν τέτοιας ὕλας. Ἔτσι εἰς τὴν νέαν ἐπεξεργασίαν τῆς συλλογῆς τοῦ *Braune*, ἡ ὁποία ἔγινε ἀπὸ

τὸν *Hanft* (Das Rechenbuch für Volks—und Mittelschulen, ἔκδ. B) περιλαμβάνονται προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τὸν οἰκονομικὸν βίον τῆς οἰκογενείας, τοῦ σχολείου, τῆς κοινότητος, τῆς εὐρυτέρας πατρίδος καὶ τοῦ κράτους, καθὼς καὶ εἰς τὴν συγκοινωνίαν καὶ τὴν φύσιν ἀπὸ τὴν οἰκονομικήν των ἄποψιν. Εἰς τὸ 8 τεῦχος τῆς συλλογῆς τῶν *Küffner* καὶ *Lang* (Rechenbuch für Volksschulen, Bucher) περιέχονται προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς ποικίλας ὕλας ἀπὸ τὴν Πολιτικὴν Οἰκονομίαν, καθὼς τὸ κέρδος καὶ τὴν ὀρθὴν οἰκιακὴν οἰκονομίαν, τὴν ἀποταμίευσιν, τὸ κοινοτικὸν ταμεῖον, τὰς οἰκονομικὰς διατάξεις τῆς κοινότητος, τὴν ἐπαγγελματικὴν δρᾶσιν τῶν μελῶν τῆς κοινότητος, τὸ δημόσιον ταμεῖον, τὰς οἰκονομικὰς διατάξεις τοῦ κράτους, τὸν δημόσιον βίον, τὴν στατιστικὴν κ.τ.λ.

Ὅ,τι ἑπομένως ἔχομεν νὰ ἐξετάσωμεν εἰς τὸ προκείμενον κεφάλαιον, δὲν εἶναι τὸ ζήτημα, ἂν ἡ ἀριθμ. διδασκαλία πρέπει νὰ λαμβάνῃ τὰ προβλήματά της καὶ ἀπὸ τὴν Πολιτ. Οἰκονομίαν, διότι τὸ ζήτημα αὐτὸ ἔχει λυθῆ ἀπὸ τὸ προηγούμενον ἀκόμη κεφάλαιον, ἀλλὰ τὸ ζήτημα, ἂν ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν προβλημάτων αὐτῶν πρέπει νὰ μεταδίδωνται εἰς τοὺς μαθητὰς καὶ θεωρητικαὶ γνώσεις ἀπὸ τὴν Πολιτικὴν Οἰκονομίαν. Δὲν χωρεῖ βέβαια καμία ἀμφιβολία, ὅτι, ἐφόσον θὰ διδάσκωνται καὶ τέτοια προβλήματα, θὰ εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γίνωνται εἰς τοὺς μαθητάς, καὶ μάλιστα τῶν ἀνωτέρων τάξεων, αἱ σχετικαὶ θεωρητικαὶ διασαφήσεις. Ἐννοεῖται ὅμως, ὅτι αἱ διασαφήσεις αὐταὶ πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιληπτικὰς δυνάμεις τῶν μαθητῶν, νὰ εἶναι σύντομαι καὶ νὰ μὴ καταπνίγουν τὴν κυρίως ἀρίθμησιν καὶ νὰ περιορίζωνται—καὶ εἰς αὐτὰς ἀκόμη τὰς ἀνωτέρας τάξεις—εἰς τὰ στοιχειωδέστατα τῆς Πολιτικῆς Οἰκονομίας. Θεωρητικαὶ ἀναπτύξεις διαφόρων ἐννοιῶν τῆς Πολιτικῆς Οἰκονομίας (π. χ. τῆς ἐννοίας τῆς ἐργασίας, τοῦ κεφαλαίου κ.τ.λ.) δὲν ἔχουν θέσιν εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον. Ἐν γένει δὲ δὲν πρέπει νὰ γίνεται σκέψις, ὅπως διδαχθῇ εἰς αὐτὸ ἔστω καὶ κατὰ προσέγγισιν συστηματικὰ ἡ Πολιτικὴ Οἰκονομία ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας. Εἰς τὰς σχετικάς του διδαχὰς ἂς ἀφορμᾶται ὁ διδάσκαλος ὅσον τὸ δυνατὸν ἐποπτικώτερα ἀπὸ τὰ διάφορα στοιχεῖα τῆς οἰκιακῆς οἰκονομίας, ἀπὸ τὸ κατάστιχον τῶν ἐσόδων καὶ ἐξόδων τῆς μητρός, ἀπὸ τὰ ἐπαγγελματικὰ βιβλία τοῦ πατρός, ἀπὸ τὸ σχολικὸν ἢ ἄλλο ταμιευτήριον, ἀπὸ μίαν ἀπόδειξιν καταβολῆς κάποιων ἀσφαλίστρων, ἀπὸ μίαν φορολογικὴν δήλωσιν ἢ ἕνα φορολογικὸν δελτίον, ἀπὸ τὰ δελτία τῆς ἐμπορικῆς κινήσεως καὶ τοῦ χρηματιστηρίου τὰ δημοσιευόμενα εἰς τὰς ἐφημερίδας κ.τ.λ. Μὲ αὐτὰ ἠμποροῦν νὰ συνδεθοῦν κατάλληλα ἡ οἰκονομικὴ κίνησις καὶ τοῦ ἄλλου ἐπαγγελματικοῦ βίου, ὁ οἰκονομικὸς βίος τῆς κοινότητος καὶ τοῦ κράτους. Ὁ διδάσκαλος πρέπει νὰ φροντίζῃ νὰ συναθροίζῃ κατάλληλον στατιστικὸν ὑλικὸν (π.χ. ἀπὸ ἐπισήμους ἀπογραφάς, ἀπὸ εἰδικὰς ἐφημερίδας καὶ περιοδικὰ κ.τ.λ.). Ἀναπτύσσεται δὲ σημαντικὰ ἡ αὐτενέργεια τῶν μαθητῶν, ἂν ἐπὶ τῇ βάσει τέτοιου ὑλικοῦ σχηματίζουν μὲ τὴν ὁδηγίαν τοῦ διδασκάλου διάφορα προβλήματα καὶ ἔπειτα τὰ λύουν. Πῶς πρέπει νὰ γίνεται ἡ ἐργασία αὐτή, εἴδαμεν σύντομα καὶ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ἠμπορεῖ δὲ νὰ ἴδῃ καλύτερα ὁ ἀναγνώστης εἰς τὰ ἔργα, τὰ ὁποῖα ἐμνημονεύσαμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἴδιου κεφαλαίου. Τὰ ἔργα ἰδίως τοῦ *Teupser* καὶ τοῦ *Lang* περιλαμβάνουν μέγα πλῆθος ὑλῶν τῆς Πολιτ. Οἰκονομίας, αἱ ὁποῖαι δίδουν ἀφορμὴν εἰς τὸν σχηματισμὸν ἀξιολόγων προβλημάτων. — Ὁ *Büttner* συνιστᾷ καὶ τὴν ἐξαγωγὴν θεμελιωδῶν **οἰκονομικῶν ἀληθειῶν**, ὁποῖαι εἶναι π.χ. αἱ ἑξῆς: Τὰ ἔξοδα πρέπει νὰ κανονίζωνται σύμφωνα μὲ τὰ ἔσοδα. — Συμφέρον μας εἶναι νὰ ἀγοράζωμεν τοῖς μετρητοῖς. — Φρόντιζε νὰ ἔχῃς πάντοτε κάποιον μικρὸν ἀπόθεμα διὰ μίαν ὥραν ἀνάγκης κ. τ. λ. Νομίζομεν, ὅτι, ἐφόσον ἡ διδασκαλία γίνεται καλά, κατ' ἀνάγκην θὰ ἀναπτύξῃ ὀρθὴν κρίσιν ὡς πρὸς τὰ οἰκονομικὰ πράγματα καὶ ἱκανότητα πρὸς πρακτικὴν δρᾶσιν εἰς δοθεῖσαν εὐκαιρίαν. Πρβ. *Sperschneider*, Bürgerkundliches Rechnen und Denken in der Fortbildungs—und Volksschule. Eine Handreichung für den Lehrer, Saafeld, Sperschneider, 1 μ.

Ἕνα ἀπὸ τὰ ζητήματα τῆς Πολιτ. Οἰκονομίας, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξετάζεται ἰδιαιτέρως εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον, ἑπομένως καὶ εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν του, εἶναι τὸ ζήτημα **τῶν ἐργατικῶν ἀσφαλειῶν** (ἴδ. καὶ τὸ προηγούμενον κεφάλαιον !). Βέβαια δὲν εἶναι ἔργον τοῦ διδασκάλου νὰ διδάξῃ εἰς τοὺς μαθητὰς ὅλας τὰς διατάξεις τοῦ νόμου, τὰς σχετικὰς μὲ τὰς ἐργατικὰς

ἀσφαλείας. Πάντως ὅμως πρέπει νὰ γνωρίσῃ εἰς αὐτοὺς τὰς σπουδαιοτέρας, αἱ ὁποῖαι δὲν ὑπερβαίνουν τὴν ἀντιληπτικὴν δύναμιν τῶν μαθητῶν. Τὸ οὐσιῶδες ἄλλωστε εἶναι οἱ σχετικοὶ λογαριασμοί, αὐτοὶ δὲ δὲν ἀπαιτοῦν νέας ἀριθμητικὰς πράξεις διὰ τὴν ἀνωτέραν βαθμίδα τοῦ δημ. σχολείου, εἰς τῆς ὁποίας τὴν διδακτέαν ὕλην ἀνήκουν αἱ ἀσφάλειαι. Θεωροῦμεν δὲ τὴν ὕλην αὐτὴν τόσον σπουδαίαν, ὥστε νομίζομεν, ὅτι πρέπει νὰ διδάσκεται εἰς ὅλα τὰ δημ. σχολεῖα, ἀκόμη καὶ εἰς ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα λειτουργοῦν μὲ τὰς δυσμενεστέρας συνθήκας. Οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ κατανοήσουν καὶ νὰ μάθουν νὰ ἐκτιμοῦν τὴν πρόνοιαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ Κράτος διὰ τοὺς ἐργάτας. Εὐτυχῶς σήμερα κάθε καλὴ συλλογή, προωρισμένη διὰ τὴν ἀνωτέραν βαθμίδα τοῦ δημ. σχολείου, περιέχει διδαχὰς καὶ προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τὰς ἐργατικὰς ἀσφαλείας. Ὁ *Büttner* εἰς τὸ συχνὰ μνημονευθὲν ἔργον του «Anleitung κ. τ. λ.» ἀφιερώνει ἰδιαίτερον κεφάλαιον διὰ τὸ προκείμενον ζήτημα (σελ. 286—302 τῆς 24 ἐκδ. τοῦ 1920).

XXI. Η ΟΙΚΙΑΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΝ ΤΩΝ ΘΗΛΕΩΝ.

Κατὰ τὸν Μεσαίωνα δὲν ἐδιδάσκετο ἡ Ἀριθμητικὴ εἰς τὰ κοράσια. Ἀλλὰ καὶ ἀργότερα, ἀφότου πλέον ἄρχισε νὰ διδάσκεται ὁπωσδήποτε εἰς τὰ σχολεῖα τῶν θηλέων, ἡ διδασκαλία της ἐπεριορίζετο εἰς τὴν μετάδοσιν μερικῶν πενιχρῶν γνώσεων. Ἀπὸ τοὺς χρόνους τοῦ Πεσταλότση κατὰ πρῶτον ἀρχίζει νὰ θεωρῆται ἡ Ἀριθμητικὴ ὡς ἕνα ἀπὸ τὰ ἀπαραίτητα μαθήματα καὶ τοῦ σχολείου τῶν θηλέων, χωρὶς ἐν τούτοις νὰ παρουσιάζῃ ἡ διδασκαλία της καμίαν διαφορὰν ἀπὸ τὴν γινομένην εἰς τὰ σχολεῖα τῶν ἀρρένων. Μόλις κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους ἀρχίζει νὰ καταβάλλεται ἡ προσπάθεια, ὅπως ληφθοῦν καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν ὑπ' ὄψιν αἱ ἰδιαίτεραι ἀνάγκαι τῶν θηλέων.

Ἔτσι ἐπιζητεῖται σήμερα ἡ εἰσαγωγὴ τῶν μαθητριῶν καὶ τῶν δημοτικῶν καὶ τῶν ἀνωτέρων σχολείων εἰς τὴν ἀρίθμησιν τὴν σχετιζομένην μὲ τὴν Οἰκιακὴν Οἰκονομίαν. Εἶναι ἀληθές, ὅτι μερικαὶ ἀπὸ τὰς μαθητρίας τοῦ δημοτ. σχολείου εἶναι ἀναγκασμέναι ἀργότερα νὰ ἐργασθοῦν εἰς ἐργοστάσια ἢ νὰ ἐπιδοθοῦν εἰς γεωργικὰς ἐργασίας, εἰς εἰδικὰ γυναικεῖα ἐπαγγέλματα κ.τ.λ. Ἀλλὰ ἡ ἀριθμητ. διδασκαλία τοῦ δημοτ. σχολείου τῶν θηλέων δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ μεριμνήσῃ ἰδιαιτέρως διὰ τὰς ἀσχολίας αὐτάς, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἐπιδοθῇ ἕνα μέρος μόνον ἀπὸ τὰς ἀποφοίτους του, διότι οἱ σχετικοὶ μὲ τὰς ἀσχολίας αὐτὰς λογαριασμοὶ εἶναι τόσον εὔκολοι, ὥστε κάθε ἐργάτρια, ἡ ὁποία ἔχει παρακολουθήσει κανονικὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ δημοτ. σχολείου, ἠμπορεῖ νὰ ἐπαρκέσῃ εἰς αὐτοὺς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀριθμητικῶν γνώσεων, τὰς ὁποίας ἔχει ἀποκτήσει εἰς τὸ σχολεῖον ἐκεῖνο. Διαφορετικὰ ὅμως ἔχει τὸ πρᾶγμα ὡς πρὸς τὴν Οἰκιακὴν Οἰκονομίαν, ἡ ὁποία θὰ ἀπασχολήσῃ εἰς τὸ μέλλον ὅλας σχεδὸν τὰς μαθητρίας. Ἡ κανονικὴ διεύθυνσις τῶν πραγμάτων τοῦ οἴκου δὲν εἶναι δυνατὴ χωρὶς ποικιλωτάτους λογαριασμούς. Βέβαια καὶ εἰς τοὺς λογαριασμοὺς αὐτοὺς δὲν παρουσιάζονται συνηθέστατα μεγάλοι ἀριθμοὶ καὶ δύσκολαι πράξεις. Ἐν τούτοις τὰ πραγματικὰ ἀντικείμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται, εἶναι ποικιλώτατα.

Τὰ προβλήματα τῆς Οἰκιακῆς Οἰκονομίας, ὅπως εἴδαμεν καὶ εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ τοῦ πρακτικοῦ βίου εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν, (ὅπου οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς σημειωθέντας κύκλους τῆς Οἰκιακῆς Οἰκονομίας ἔχουν ἀναγραφῇ κυρίως διὰ τὰ θήλεα μόνον) ἀναφέρονται ἰδίως εἰς τὴν συντήρησιν καὶ ἀνανέωσιν τῶν ἐπίπλων καὶ σκευῶν τῶν δωματίων καὶ τοῦ μαγειρείου τῆς οἰκίας, εἰς τὴν συντήρησιν καὶ τὴν ἀνανέωσιν τῶν ἐνδυμάτων καὶ τῶν ἀσπρορρούχων, εἰς τὴν προμήθειαν τῶν τροφίμων, εἰς τὴν προμήθειαν τῶν μέσων τῆς θερμάνσεως καὶ τοῦ φωτισμοῦ, εἰς τὴν μέριμναν διὰ τὴν ὑγείαν καὶ τὴν ἀναψυχὴν τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας, εἰς τὴν καταβολὴν τῶν φόρων, τῶν ἀσφαλειῶν (πυρός, ζωῆς κ.τ.λ.) κ.τ.τ.

Ἐπίσης πρέπει νὰ καταβάλλεται προσπάθεια, ὅπως αἱ μαθήτριαι εἰσάγωνται εἰς τὴν ἁπλογραφικὴν τήρησιν τῶν καταστίχων τῆς οἰκίας. Πάντως πρέπει νὰ μάθουν νὰ συντάσσουν τὸν προϋπολογισμὸν τοῦ οἴκου, νὰ κρατοῦν τὸ ἡμερολόγιον τῶν ἐσόδων καὶ ἐξόδων καὶ νὰ κλείουν τὴν κάθε χρῆσιν. Σχετικὰ μὲ τὰ ἀνωτέρω ζητήματα παραπέμπομεν εἰς τὰ ἀκόλουθα ἔργα: *Mang*, Praktische Anleitung zur häuslichen Buchführung, Emmendingen, Dölter, 1893. — *Schuster* καὶ *Kretschmar*, Das Rechnen im Haushalte, Plauen, 1897.—Wegweiser zum häuslichen Glück, M.=Gladbach, Riffarth, — *Küffner* καὶ *Lang*, Hauswirtschaftliche und gewerbliche Buchführung für Fortbildungsschulen, Würzburg, Bucher.

Σημειωτέον ἀκόμη ἰδιαιτέρως, ὅτι πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν ἀπὸ τὸν διδάσκαλον αἱ τιμαὶ τοῦ τόπου. Εἰς ὅσα δὲ σχολεῖα τῶν θηλέων καὶ εἰς ὅσας τάξεις των διδάσκεται ἰδιαιτέρως ἡ Οἰκιακὴ Οἰκονομία, πρέπει ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς νὰ συσχετίζεται στενώτατα μὲ τὴν διδασκαλίαν τῆς Οἰκιακῆς Οἰκονομίας.

Δὲν ἐγκρίνομεν νὰ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ σχολεῖα τῶν θηλέων συλλογαὶ προβλημάτων, εἰς τὰς ὁποίας λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ πρακτικαὶ ἀνάγκαι μόνον τῶν ἀρρένων. Προτιμότεραι φυσικὰ ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν εἰδικὴν ἔκδοσιν διὰ τὰς ἀνωτέρας τάξεις τῶν σχολείων τῶν θηλέων. Τὸ καλύτερον ὅμως ἀπὸ ὅλα εἶναι νὰ χρησιμοποιοῦνται καὶ ἀπὸ τὰς μεσαίας ἀκόμη τάξεις τῶν σχολείων αὐτῶν εἰδικαὶ συλλογαί, λαμβάνουσαι ὑπ' ὄψιν τὰς ἰδιαιτέρας ἀνάγκας τῶν θηλέων. Ἐφόσον δὲ πρόκειται διὰ μικτὰ σχολεῖα, εἰς μὲν τὰς μεσαίας τάξεις των ἠμποροῦν νὰ δίδωνται καὶ εἰς τὰ δύο φῦλα τὰ ἴδια προβλήματα, εἰς τὰς ἀνωτέρας ὅμως πρέπει νὰ δίδωνται εἰς τὸ καθὲν καὶ ἰδιαίτερα προβλήματα. Τὸ πρόγραμμα τοῦ Μονάχου τοῦ 1912 ὁρίζει ὡς κύριον ἔργον τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας τῆς ὀγδόης τάξεως τῶν σχολείων τῶν θηλέων «τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τοὺς λογαριασμοὺς τοῦ οἰκοκυρικοῦ καὶ τοῦ ἐπαγγελματικοῦ βίου τῆς γυναικός, συσχετιζομένην στενὰ μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν πρακτικῶν μαθημάτων». Τὸ θεμελιῶδες πρόγραμμα τῶν δημοτικῶν σχολείων τοῦ Gross—Berlin τοῦ 1914 δὲν κάμνει καμίαν διάκρισιν μεταξὺ τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης τῶν ἀρρένων καὶ τῶν θηλέων.

XXII. ΤΑ ΑΙΤΙΑ ΤΩΝ ΠΕΝΙΧΡΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ.

Ἀπὸ πολὺν χρόνον διατυπώνεται καὶ διαρκῶς ἕως σήμερον ἐπαναλαμβάνεται τὸ παράπονον, ὅτι οἱ καρποὶ τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας εἶναι πολὺ πενιχροὶ συγκρινόμενοι μὲ τὸν δαπανώμενον δι' αὐτὴν χρόνον. Πράγματι δὲ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀρνηθῇ κανείς, ὅτι ἡ μομφὴ αὐτὴ εἶναι δικαιολογημένη διὰ τὰ περισσότερα τοὐλάχιστον σχολεῖα. Ἐννοεῖται τώρα, ὅτι ἡ διαπίστωσις τοῦ περιέργου, ἀλλὰ καὶ λυπηροῦ αὐτοῦ φαινομένου δὲν ἔχει καμίαν ἀξίαν, ἐφόσον δὲν ἀνευρίσκονται καὶ τὰ αἴτιά του. Διότι φυσικὰ ἡ ἄρσις τοῦ κακοῦ δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ, ἂν δὲν ἀρθοῦν τὰ αἴτιά του, ἡ δὲ ἐξάλειψις πάλιν τῶν αἰτίων δὲν εἶναι δυνατή, ἐφόσον παραμένουν ἄγνωστα.

Ποικίλα εἶναι τὰ αἴτια τῆς πενιχρότητος τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας. Μερικὰ ἀπὸ αὐτὰ παρουσιάζονται εἰς τὸ ἕνα σχολεῖον, ἄλλα δὲ πάλιν εἰς τὸ ἄλλο· τὸ συνηθέστερον δὲ εἶναι, ὅτι εἰς κάθε σχεδὸν σχολεῖον παρουσιάζονται πολλὰ μαζί. Εἶναι δὲ τὰ κυριώτερα ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἑξῆς:

α) Εἰς μερικὰ σχολεῖα ***οἱ μαθηταὶ τῶν κατωτέρων τάξεων ἐξαρτῶνται ὑπερβολικὰ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἐποπτείας.*** Ἐφόσον βοηθοῦνται ἀπὸ αὐτό, ἠμποροῦν ὁπωσδήποτε νὰ λύουν τὰ προτεινόμενα προβλήματα, ἂν λείψῃ ὅμως ἡ συνδρομή του, περιπίπτουν εἰς τελείαν ἀμηχανίαν. Ἰδίως δὲ συμβαίνει τὸ κακὸν αὐτό, ὅπου μεταχειρίζονται ὡς μέσον ἐποπτείας τὰ δάκτυλα.

β) Ἀλλοῦ πάλιν γίνεται μὲν ἡ ἀναγκαία μόνον αἰσθητοποίησις καὶ δίδονται πρὸς λύσιν καὶ ἐφηρμοσμένα προβλήματα, δὲν γίνεται ὅμως ἀρκετὴ ***ἄσκησις*** [ἢ δὲν γίνεται ἡ πρέπουσα ἐπανάληψις τῶν διδαχθεισῶν ὑλῶν]. Ἀκριβῶς ὅμως ἡ ἄσκησις [καὶ ἡ ἐπανάληψις] ἔχουν μεγίστην σπουδαιότητα εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν.

γ) Εἰς πολλὰ πάλιν σχολεῖα γίνεται ἡ ἀρίθμησις κατὰ μέγιστον μέρος ἢ σχεδὸν ἀποκλειστικὰ μὲ ***ἀφῃρημένους ἀριθμούς.*** Ἔτσι ὅμως καταπνίγεται τὸ διαφέρον, δὲν ἠμποροῦν δὲ οἱ μαθηταὶ νὰ λύουν ἐφηρμοσμένα προβλήματα.

δ) Εἰς μερικὰ σχολεῖα [προσφέρει ὁ ἴδιος ὁ διδάσκαλος τὸ νέον εἰς τοὺς μαθητάς, ***χωρὶς νὰ τοὺς ἀφήνῃ νὰ τὸ εὑρίσκουν αὐτενεργοῦντες***, ἤ, καὶ ἂν τοὺς προκαλῇ εἰς τὴν εὕρεσίν του,] τοὺς βοηθεῖ καὶ τοὺς χειραγωγεῖ εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν βῆμα πρὸς βῆμα. Ἔτσι οἱ μαθηταὶ δὲν μανθάνουν νὰ ἐργάζωνται μὲ αὐτοτέλειαν, δι' αὐτὸ δὲ κάθε πρόβλημα, ποὺ παρουσιάζει ἔστω καὶ τὴν παραμικρὰν δυσκολίαν, δὲν ἠμποροῦν νὰ τὸ λύσουν χωρὶς τὴν βοήθειαν τοῦ διδασκάλου.

ε) Μερικοὶ διδάσκαλοι δὲν λαμβάνουν ὑπ' ὄψιν, ὅτι χρειάζεται ἰδιαίτερη μέριμνα διὰ τοὺς μαθητὰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ***ἀσθενῆ τὴν μνήμην τῶν ἀριθμῶν*** καὶ δι' αὐτὸ δὲν ἠμποροῦν νὰ μάθουν εὔκολα ἀριθμητικὰς ὕλας (,ὅπως εἶναι π. χ. ὁ πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ), διὰ τὴν ἐκμάθησιν τῶν ὁποίων χρειάζεται ἡ συνεργασία τῆς μνήμης.

ϛ) Συχνὰ ***ἀπατᾶται ὁ διδάσκαλος*** ὡς πρὸς τὴν πρόοδον τῶν μαθητῶν του. Ἐρωτᾷ μόνον τοὺς ὑψώνοντας τὸ δάκτυλον, δι' αὐτὸ δὲ οἱ [βραδεῖς, οἱ] ἀδέξιοι καὶ οἱ ὀκνηροὶ ἢ δὲν ἐργάζονται καθόλου ἢ τοὐλάχιστον δὲν καταβάλλουν, ὅσας πρέπει προσπαθείας. Ὁ διδάσκαλος φαντάζεται, ὅτι ὅλοι οἱ μαθηταί του κατέχουν τὰ διδαχθέντα [ἐξ ἴσου μὲ τοὺς ἐρωτωμένους, δι' αὐτὸ δὲ προχωρεῖ πολὺ ἐνωρίτερα ἀπὸ τὸ πρέπον εἰς τὴν διδασκαλίαν νέων ὑλῶν. Ἐννοεῖται, ὅτι μετ' ὀλίγον ἀνακαλύπτει μὲ μεγάλην του ἔκπληξιν, ὅτι οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς μαθητάς του ὄχι μόνον δὲν ἠμποροῦν νὰ προχωρήσουν παρακάτω, ἀλλὰ καὶ δὲν ἠξεύρουν τὰ μέχρι τοῦδε διδαχθέντα].

ζ) Ὅταν εἰς μίαν τάξιν ***δὲν τηρῆται ἡ πρέπουσα πειθαρχία***, φυσικὰ δὲν πρέπει νὰ προσδοκῶνται ἀποτελέσματα ἱκανοποιητικὰ ἀπὸ κάθε ἄποψιν. Οἱ μαθηταὶ δὲν ἀκροῶνται μὲ τὴν πρέπουσαν προσοχὴν ἢ δὲν ἀκροῶνται καθόλου τὸ διδόμενον πρόβλημα, δι' αὐτὸ δὲ ἢ δὲν τὸ ἀντιλαμβάνονται ὅλως διόλου ἢ τὸ λησμονοῦν ἀμέσως κατόπιν. Ὁ ἕνας μαθητὴς ἐνοχλεῖ τὸν ἄλλον κατὰ τὴν ἀρίθμησιν, διότι θέλει νὰ μάθῃ ἀπὸ αὐτὸν τὸ πρόβλημα, εἰς τὸ τέλος δὲ καὶ τὴν λύσιν του. Οἱ ὀκνηροὶ μαθηταὶ περιμένουν νὰ ἀκούσουν ἢ νὰ ἀντιγράψουν τὸ πρόβλημα καὶ τὴν λύσιν του ἀπὸ τοὺς συμμαθητάς των. Τέλος ἡ εἰς τὴν τάξιν κυριαρχοῦσα ἀνησυχία ἐνοχλεῖ καὶ ἐκείνους τοὺς μαθητάς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν καλὴν θέλησιν νὰ ἐργασθοῦν. Ἐπίσης δὲ καὶ οἱ ψιθυρισμοὶ διασποῦν τὴν προσοχὴν εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν.

η) Πολὺ συντελεῖ εἰς τὴν πενιχρότητα τῶν καρπῶν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας καὶ ***ὁ ἐλαττωματικὸς τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον θέτουν ἀρκετοὶ διδάσκαλοι τὰ προβλήματα,*** ἰδίως εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν. Ποῖος εἶναι ὁ ὀρθὸς τρόπος τῆς ἀπαγγελίας τῶν προβλημάτων ἀπὸ τὸν διδάσκαλον κατὰ τὴν ἀρίθμησιν αὐτήν, εἴδαμεν εἰς τὸ οἰκεῖον μέρος (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 230 κ. ἀκ.).

θ) Ἐπίσης ***ἡ διὰ πολλῶν λόγων διατύπωσις τοῦ τρόπου τῆς λύσεως*** παρεμποδίζει τὴν ὀρθὴν ἀρίθμησιν, διότι αἱ πολλαὶ καὶ περιτταὶ λέξεις παραβλάπτουν τὴν σαφήνειαν καὶ ἐμποδίζουν τὴν ἁρμόζουσαν σύνδεσιν τῶν παραστάσεων τῶν ἀριθμῶν (ἴδ. τὸ σχετ. κεφάλ. «ἡ προφορικὴ διατύπωσις τῶν κατὰ τὴν ἀρίθμησιν σκέψεων»).

ι) Ὅτι καὶ ***ἡ πολὺ γρήγορη ἀρίθμησις*** παραβλάπτει τὴν σαφήνειαν καὶ τὴν ἁρμόζουσαν σύνδεσιν τῶν παραστάσεων τῶν ἀριθμῶν, δι᾽ αὐτὸ δὲ εὔκολα δημιουργεῖ ἐσφαλμένα ἐξαγόμενα, εἶναι γενικὰ γνωστόν.

[ια) Πολλοὶ διδάσκαλοι δὲν λαμβάνουν ὑπ᾽ ὄψιν, ὅτι ***ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς ὅλης ἀριθμήσεως*** καὶ δι᾽ αὐτὸ τὴν παραμελοῦν πρὸς μεγάλην βλάβην τῆς προόδου τῶν μαθητῶν].

ιβ) Ἕνα αἴτιον τῶν πενιχρῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας εἶναι ἀναμφιβόλως καὶ ***ἡ ὑπερβολικὴ ἐπιβάρυνσις τοῦ προγράμματός της,*** τὸ ὁποῖον δι᾽ αὐτὸ ἐπάναγκες εἶναι ***νὰ ἁπλοποιηθῇ*** ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον.

[ιγ) Ἄλλη τέτοια αἰτία εἶναι τὸ γεγονός, ὅτι ἡ βάσις τῆς ὅλης ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, ἤτοι ***ἡ διδασκαλία τῆς πρώτης ἀριθμήσεως*** διαρρυθμίζεται καὶ διεξάγεται κατὰ τρόπον, ὁ ὁποῖος εἰς πολλὰ ***δὲν ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν παιδικὴν φύσιν*** καὶ δι᾽ αὐτὸ συντελεῖ εἰς τὸ νὰ γίνεται ἡ διδασκαλία αὐτὴ ***δυσάρεστη*** εἰς τοὺς περισσοτέρους μαθητὰς καὶ νὰ μὴ φέρῃ ὡς πρὸς αὐτοὺς τὰ προσδοκώμενα ἀποτελέσματα. Φυσικὰ δὲ ἡ ἀντιπάθεια αὐτή, τὴν ὁποίαν αἰσθάνονται οἱ περισσότεροι μαθηταὶ ἐξ ἀρχῆς διὰ τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς, τὸ παρακολουθεῖ καὶ κατόπιν, ὁσονδήποτε καλὰ καὶ ἂν γίνῃ ἡ διδασκαλία του, καὶ ὅτι αἱ βασικαὶ ἐλλείψεις, τὰς ὁποίας θὰ ἔχουν οἱ μαθηταὶ αὐτοὶ ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῆς πρώτης ἀριθμήσεως, δὲν θὰ εἶναι εὔκολον νὰ ἀναπληρωθοῦν μὲ ὅλας τὰς προσπαθείας τῆς κατόπιν διδασκαλίας, δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ θὰ ἐμποδίζουν τὴν ἐπιτυχῆ παρακολούθησίν της καὶ θὰ τὴν κάμνουν περισσότερον ἀντιπαθητικήν. Διὰ νὰ ἐξαλειφθῇ τώρα τὸ προκείμενον αἴτιον, εἶναι προφανές, ὅτι ***ἡ διδασκαλία τῆς πρώτης ἀριθμήσεως πρέπει νὰ μεταρρυθμισθῇ*** ἔτσι, ὥστε νὰ προσαρμόζεται καλύτερα εἰς τὴν φύσιν τῶν παίδων καὶ νὰ γίνῃ ἔτσι εὐχάριστη εἰς ὅλους τοὺς μικροὺς μαθητάς. Ὡς τὸ σπουδαιότερον δὲ μέσον τῆς μεταρρυθμίσεως αὐτῆς θεωρεῖται ἀπὸ πολλοὺς Παιδαγωγικοὺς ***ἡ εἰς τὴν πρώτην ἀρίθμησιν ἐφαρμογὴ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐργασίας***].

ιδ) Εἰς τὰ ***ὀλιγοτάξια*** σχολεῖα προσθέτονται εἰς τὰ ἀνωτέρω αἴτια καὶ ἡ διάθεσις ***ὀλιγωτέρου χρόνου*** ἀπὸ τὸν κανονικὸν διὰ τὴν καθαυτὸ ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν μερικῶν ἢ καὶ ὅλων τῶν τάξεων, [καθὼς καὶ ἡ ἀφιέρωσις τοῦ ὑπολοίπου χρόνου εἰς ***σιωπηρὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας*** τῶν μαθητῶν, αἱ ὁποῖαι, ὅπως συνήθως γίνονται, δὲν φέρουν καμίαν ὠφέλειαν, εἰς δὲ ***τὰ μονοτάξια*** καὶ ἡ ***συνδιδασκαλία μαθητῶν διαφόρων δυνάμεων.***

Εἶναι τώρα φανερόν, ὅτι διὰ τὰ περισσότερα ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω αἴτια καὶ ὡρισμένως διὰ τὰ ὑπὸ στοιχ. α—ια, κύριος ὑπεύθυνος εἶναι ὁ διδάσκαλος. Ἐφόσον δὲ εἶναι πιθανώτατον, ὅτι εἴς κάποια ἀπὸ τὰ αἴτια αὐτὰ ὀφείλονται τὰ πενιχρὰ ἀποτελέσματα τῆς διδασκαλίας του, ἀντὶ νὰ ἐπιρρίπτῃ τὴν εὐθύνην διὰ τὰ ἀποτελέσματα αὐτὰ εἰς τοὺς μαθητάς του ἢ εἰς τὰς συνθήκας τοῦ σχολείου του, ὠφελιμώτερον εἶναι νὰ φροντίζῃ ὁλονὲν διὰ τὴν βελτίωσιν τοῦ τρόπου τῆς διδασκαλίας του, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἀρθοῦν καὶ τὰ αἴτια τῆς ἐλλιποῦς ἀριθμητικῆς προόδου τῶν μαθητῶν του. Ὡς πρὸς τὰ μέτρα τώρα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβῃ διὰ τὴν βελτίωσιν αὐτήν, εἴπαμεν ὅ,τι σχετικὸν εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια, θὰ εἴπωμεν δὲ ἀκόμη τὰ ἀναγκαιοῦντα καὶ εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς διδακτικῆς ἐπεξεργασίας τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης. Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὴν ἄρσιν τῶν τριῶν τελευταίων ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω αἴτια, ἤτοι τῶν ὑπὸ στοιχ. ιβ—ιδ, διὰ τὰ ὁποῖα δὲν εὐθύνεται κυρίως ὁ διδάσκαλος, θὰ εἴπωμεν τὰ δέοντα εἰς τὰ ἀμέσως ἀκολουθοῦντα σχετικὰ κεφάλαια].

XXIII. Η ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ.

Ἕνα ἀπὸ τὰ αἴτια τῶν πενιχρῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας εἶναι, καθὼς εἴδαμεν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ἡ ὑπερβολικὴ ἐπιβάρυνσις τοῦ προγράμματός της.

Ἡ σοβαρότης τοῦ αἰτίου αὐτοῦ εἶναι προφανής. Δι' αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς καὶ πολλοὶ Μεθοδικοὶ ἐπροσπάθησαν νὰ τὸ ἄρουν διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας. Ἀπὸ 4 δεκαετηρίδων καὶ πλέον εἰς διαλέξεις, εἰς διατριβὰς καὶ εἰς μεθοδικὰ ἔργα ἔχουν διατυπωθῆ διάφοραι σχετικαὶ προτάσεις. Αἱ προτάσεις αὐταὶ διαφέρουν παραπολὺ εἰς τὰ καθέκαστα. Ἐν τούτοις, ἂν ἀποβλέψωμεν εἰς τὸν κύριον σκοπὸν τῶν εἰσηγητῶν των, παρατηροῦμεν, ὅτι ὅλαι ἠμποροῦν νὰ ὑπαχθοῦν εἰς δύο κυρίας κατηγορίας, τὰς ἑξῆς:

Πρώτη κατηγορία. Οἱ εἰσηγηταὶ τῶν προτάσεων τῆς κατηγορίας αὐτῆς ὑποστηρίζουν, ὅτι ἡ ἁπλοποίησις τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ μὲ τὴν παράλειψιν κάθε ἀριθμητικῆς ὕλης, [ἡ ὁποία εἴτε ἀπὸ τὴν καθαρῶς ἀριθμητικὴν ἄποψιν εἴτε ἀπὸ τὴν πραγματικὴν εἴτε καὶ ἀπὸ τὰς δύο ***εἶναι ἄχρηστη διὰ τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον***, καθὼς καὶ μὲ τὸν περιορισμὸν κάθε προκρινομένης ὕλης εἰς τὰς ἁπλουστέρας, δι' αὐτὸ δὲ καὶ εὐχρηστοτέρας εἰς τὸν βίον αὐτὸν περιπτώσεις.

Ἕνας ἀπὸ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι πρῶτοι ἐργάσθηκαν μὲ τὸ ἀνωτέρω πνεῦμα, εἶναι ὁ *Paul Tschirsch* («Vorschläge zu einer Vereinfachung des Rechenunterrichts» εἰς τὸ Schles. Seminarblatt τοῦ 1880 καὶ «Der Rechenunterricht in der Volksschule. Vorschläge zu einer Vereinfachung dieses Unterrichts, nebst Anleitung zum Üben, Bunzlau, 1881»). Ὁ Μεθοδικὸς αὐτὸς φρονεῖ, ὅτι ἡ ἁπλοποίησις πρέπει νὰ γίνῃ: 1) μὲ τὸν περιορισμὸν τῆς διδακτέας ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς τὴν χρησιμεύουσαν εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, 2) μὲ τὴν διαφορετικὴν κατανομὴν τῆς τελευταίας αὐτῆς ὕλης εἰς τὰς διαφόρους βαθμίδας τοῦ δημοτικοῦ σχολείου καὶ 3) μὲ τὴν ἐφαρμογὴν πρακτικωτέρων τρόπων λύσεως τῶν προβλημάτων. Παραλείποντες τὰ δύο τελευταῖα μέσα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ἄμεσην σχέσιν μὲ τὴν ἁπλοποίησιν καὶ διὰ τὰ ὁποῖα θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὰ οἰκεῖα κεφάλαια, περιοριζόμεθα εἰς τὸ πρῶτον, ἤτοι εἰς τὸν περιορισμὸν τῆς διδακτέας ἀριθμ. ὕλης. Ὁ Τ. προτείνει νὰ παραλειφθοῦν ἀπὸ τὸ πρόγραμμα τοῦ δ. σχολείου, ὡς ἄχρησται διὰ τὸν πρακτικὸν βίον, αἱ ἑξῆς ἀριθμ. ὗλαι:

1. Τὰ μὴ χρησιμοποιούμενα εἰς τὸν καθημερινὸν βίον μέτρα καὶ σταθμά.
2. Αἱ τροπαὶ μονάδων μιᾶς τάξεως εἰς μονάδας ἄλλης αἱ μὴ γινόμεναι εἰς τὸν συνήθη βίον (π. χ. ἡ τροπὴ 128 ἡμερῶν εἰς πρῶτα λεπτά).
3. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν.
4. Ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως οἱ ἀποτελούμενοι ἀπὸ μονάδας περισσοτέρων τάξεων ἀπὸ δύο.
5. Ἡ πρόσθεσις περισσοτέρων ἀπὸ δύο ἑτερωνύμων κλασμάτων.
6. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις μὲ κλάσμα.
7. Ἡ ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν μὲ τὸν πρῶτον ὅρον κλασματικόν.
8. Τὰ προβλήματα τῆς ἴδιας μεθόδου, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ποσὸν μὴ χρησιμοποιούμενον ὡς μονὰς πωλήσεως καὶ ἀγορᾶς εἰς τὸ ἐμπόριον.
9. Ἡ σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν.
10. Ἡ εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου, τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τοκισμοῦ.
11. Τὰ δυσκολώτερα ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ κέρδους καὶ τῆς ζημίας, τῆς ἐκπτώσεως καὶ τῆς ὑφαιρέσεως, τῆς ἑταιρείας καὶ τῆς μίξεως.

Αἱ ἀπαιτήσεις αὐταὶ τοῦ Τ. δὲν ἔτυχαν πολλῆς προσοχῆς τόσον μᾶλλον, καθόσον αἱ περισσότεραι ἀπὸ αὐτὰς δὲν ἔχουν διατυπωθῆ εἰς ὡρισμένας προτάσεις, συνάγονται δὲ ἀπὸ τὸ πρόγραμμα τῆς εἰς τὸ δημ. σχολεῖον διδακτέας ἀριθμ. ὕλης, τὸ ὁποῖον ἔχει παραθέσει ὁ Τ. εἰς τὸ ἔργον του]. Ὡς ὁ κυρίως συντελέσας, ὅπως διαδοθῇ εἰς εὐρυτέρους κύκλους ἡ ἰδέα τῆς ἁπλοποιήσεως τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας, πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὁ *Steuer* μὲ τὰς ἑξῆς ἔργα του, τὰ ὁποῖα ἐδημοσιεύθηκαν κατὰ τὸ 1883: 1. Methodik des Rechenunterrichts, Strehlen, 2. Rechenbuch für Stadtschulen u.s.w., 2 ἔκδ., Strehlen καὶ 3. Ist eine Vereinfachung des Rechenunterrichts geboten?, Breslau (, τὸ ὁποῖον εἶναι μία διάλεξίς του, γενομένη κατὰ τὸ ἴδιον ἔτος εἰς τὸ ἐπαρχιακὸν συνέδριον τῶν διδασκάλων τῆς Σιλεσίας). Εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ ἔργα του προβάλλει ὡρισμένας καὶ ἐφηρμοσμένας προτάσεις, σχετικὰς μὲ τὴν ἁπλοποίησιν τῆς ἀριθμητ. ὕλης. Ὁ Steuer διακρίνει ὕλας ἀναγκαίας, ὄχι ἀπαραιτήτους καὶ ἐντελῶς περιττάς. [Ἐντελῶς περιτταί, ὡς ἄχρησται εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, εἶναι κατ' αὐτὸν αἱ ἑξῆς ὕλαι:

1. Ἡ γραπτὴ ἐκτέλεσις τῶν θεμελιωδῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς συμμιγεῖς ἀποτελουμένους ἀπὸ μονάδας περισσοτέρων τάξεων ἀπὸ δύο.

2. Ὅλα τὰ σύνθετα προβλήματα, εἰς ὅσα—κατὰ μίμησιν τῆς διὰ τῶν γραμμάτων ἀριθμήσεως—ἀπαιτεῖται πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμὸς καὶ μερισμὸς πολυμελῶν ποσῶν.

3. Τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα τοῦ χρόνου, εἰς ὅσα ζητεῖται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαρκείας καὶ τοῦ σημείου τῆς λήξεως ἢ τῆς ἐνάρξεως τῶν γεγονότων νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἐνάρξεως ἢ τῆς λήξεώς των εἰς ἡμέρας, μῆνας καὶ ἔτη (π. χ. ἡ ἡμέρα τῆς γεννήσεως ἢ τοῦ θανάτου ἑνὸς προσώπου).

4. Προβλήματα μὲ κοινὰ κλάσματα ἔχοντα μεγάλους ἢ δυσκόλους παρονομαστάς, ἰδίως δὲ ἡ τροπὴ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἡ πρόσθεσις περισσοτέρων ἀπὸ δύο ἑτερωνύμων κλασμάτων, τῶν ὁποίων ὁ κοινὸς παρονομαστὴς εἶναι μεγάλος ἀριθμὸς καὶ δὲν ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ εὔκολα.

5. Τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ποσὸν μὴ χρησιμοποιούμενον εἰς τὸ ἐμπόριον ὡς μονὰς πωλήσεως καὶ ἀγορᾶς, καθὼς καὶ ὅλα τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

6. Ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ τοκισμοῦ ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος, μέγα μέρος ἀπὸ ἐκεῖνα, εἰς ὅσα ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον, καὶ σχεδὸν ὅλα, εἰς ὅσα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον.

7. Τὰ προβλήματα τῆς μίξεως καὶ τῆς λήξεως.

8. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται παλαιωμέναι καὶ ἄχρησται μονάδες μέτρων καὶ σταθμῶν.

Αἱ κυριώτεραι διαφοραί, αἱ ὁποῖαι παρατηροῦνται μεταξὺ τῶν ἀπαιτήσεων τοῦ Tschirsch καὶ τοῦ Steuer, εἶναι αἱ ἑξῆς: 1. Ὁ S. δὲν θεωρεῖ ὡς περιττὴν ὕλην, καθὼς ὁ T., τὰς μὴ συνήθεις τροπὰς εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως. 2. Ἐνῷ ὁ T. δὲν θεωρεῖ ὡς περιττὴν ὕλην τοὺς συμμιγεῖς τῶν μὴ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων τοὺς ἔχοντας μονάδας περισσοτέρων τάξεων ἀπὸ δύο, ὁ S. θεωρεῖ ἐν γένει ὡς περιττὴν ὕλην τὴν γραπτὴν ἐκτέλεσιν τῶν θεμελ. ἀριθμητ. πράξεων ἐπάνω εἰς ὁποιονδήποτε συμμιγῆ ἀποτελούμενον ἀπὸ μονάδας περισσοτέρων τάξεων ἀπὸ δύο. 3. Ἐνῷ ὁ S. δέχεται τὴν ζήτησιν τοῦ χρόνου εἰς ἡμέρας, μῆνας καὶ ἔτη μόνον εἰς τὰ προβλήματα τῆς διαρκείας (π.χ. ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ ἡλικία ἑνὸς προσώπου), ὁ T. τὴν δέχεται καὶ εἰς ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ σημεῖον τῆς ἐνάρξεως ἢ τῆς λήξεως. 4. Ὁ S. δὲν θεωρεῖ, καθὼς ὁ T., ὡς περιττὰς ὕλας τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν μὲ κλάσμα, ἐξ ἄλλου δὲ δὲν ἀποκλείει, ὅπως ἐκεῖνος, κάθε πρόσθεσιν περισσοτέρων ἀπὸ δύο ἑτερωνύμων κλασμάτων. 5. Ἐνῷ ὁ S. ἀποκλείει ὡς περιττὰ ὅλα τὰ προβλήματα τῆς μίξεως καὶ τῆς λήξεως, ὁ T. δέχεται τὰ εὐκολώτερα].

Ἀπὸ τοὺς πρώτους ἐπίσης ἐργασθέντας διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας εἶναι καὶ ὁ *Büttner*. Ἀκόμη κατὰ τὸ 1879 (εἰς τὴν 5ην ἔκδοσιν τοῦ ἔργου του «Anleitung zum Rechenunterricht») ἐτόνισε, ὅτι ἐπιβάλλεται ὁ περιορισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς τὸ ἐλάχιστον ὅριον, διὰ νὰ γίνῃ δυνατὴ ἡ πραγματικὴ κατανόησις τῆς διδασκομένης καὶ ἡ πολυμερὴς εἰς αὐτὴν ἄσκησις. Ἐν τούτοις δὲν κατέληξε τότε εἰς ὡρισμένας σχετικὰς προτάσεις. Αὐτὸ τὸ ἔκαμε εἰς τὰς κατόπιν ἐκδόσεις τοῦ ἀνωτέρω ἔργου του, ἐπηρεασθεὶς προφανῶς ἀπὸ τὸν Steuer. Ὁ B. διακρίνει τὴν κατὰ παράδοσιν διδασκομένην εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον ἀριθμ. ὕλην εἰς ἀναγκαίαν, εὐκταίαν καὶ περιττήν. Ὡς περιτταὶ ὕλαι, διὰ νὰ περιορισθῶμεν μόνον εἰς αὐτάς, θεωροῦνται ἀπὸ τὸν B. αἱ ἑξῆς:

1. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται μεγάλοι (πολυψή-

φιοι) ἀριθμοὶ (καὶ τὰ ὁποῖα δικαιολογοῦνται μόνον, ἂν ἀναφέρωνται εἰς γεωγραφικὰς καὶ στατιστικὰς ὕλας).

2. Τὰ προβλήματα τῶν συμμιγῶν τῶν ἀποτελουμένων ἀπὸ μονάδας περισσοτέρων τάξεων ἀπὸ δύο, καθὼς καὶ τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται παλαιωμέναι μονάδες νομισμάτων, μέτρων, σταθμῶν καὶ ἀπαριθμήσεως.

3. Οἱ ὁρισμοὶ πολλῶν ἐννοιῶν, π. χ. τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ κλάσματος κ. τ. λ., ἡ πρόσθεσις περισσοτέρων ἀπὸ δύο ἑτερωνύμων κλασμάτων, τὰ εἴδη τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων καὶ ἡ τροπὴ τῶν περιοδικῶν δεκαδ. κλασμάτων εἰς κοινά.

4. Τὰ προβλήματα τῆς λήξεως, τὰ προβλήματα τῆς κυρίως μίξεως, τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται, πόσον τοῖς °/₀ γίνεται ἡ ἔκπτωσις, τὰ σύνθετα προβλήματα τὰ περιέχοντα ἐπιτηδευμένας συνθήκας, αἱ ὁποῖαι δὲν παρουσιάζονται εἰς τὸν πραγματικὸν βίον, ἡ ἔγγραφος διάταξις τῶν προβλημάτων τοῦ χρόνου καὶ ἡ μέθοδος τῆς ἀλύσεως.

Καθὼς παρατηρεῖ ὁ ἀναγνώστης, αἱ ἀπαιτήσεις τοῦ Β. δὲν διαφέρουν οὐσιαστικὰ ἀπὸ τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ S. καὶ τοῦ T. Σημειωτέον ἐξ ἄλλου, ὅτι κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Β. ἐξ ἴσου σπουδαία με τὸν ἐν γένει περιορισμὸν τῆς ἀριθμ. ὕλης εἶναι ἡ ἁπλοποίησις τῆς προκρινομένης, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ, καθόσον θὰ ἐκλέγωνται ἀπὸ κάθε τμῆμά της αἱ ἁπλούστεραι καὶ εὐχρηστότεραι εἰς τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον περιπτώσεις καὶ ἀσκήσεις.

Ὑπὸ τὸ ἴδιον πνεῦμα μὲ τοὺς μνημονευθέντας Μεθοδικοὺς ἐργάσθηκαν κατόπιν καὶ οἱ ἑξῆς: *Schröter* (Beiträge zur Methodik des Rechenunterrichts, Wittenberg, Herrosé, 3 ἔκδ., 1905), *Schlott* (Das vereinigte Kopf-und Tafelrechnen, Braunschweig, 1887), *Heinemann* (Rechenbuch für Volksschulen, Wolfenbüttel, 1889), *Mittenzwey* (Die Darstellungsformen im Rechnen, Wiesbaden, Behr, 1891), *Braune* (Der Rechenunterricht in der Volksschule, Halle, Schroedel, 6 ἔκδ., 1905), *Kentenich* u. *Frohn* (Anleitung zur Erteilung des Rechenunterrichts, Düsseldorf, 1892), *Elsner* u. *Sendler* (Der Rechenunterricht in der Volksschule, Breslau, 6 ἔκδ., 1919).

Ἐπίσης δὲ καὶ εἰς τὸ Πρωσσικὸν Ὑπουργικὸν Διάταγμα τῆς

31 Ἰανουαρίου 1910 λέγονται τὰ ἀκόλουθα: «Πρὸς ἐξοικονόμησιν τοῦ χρόνου σκόπιμον εἶναι μερικαὶ ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ὕλας νὰ ἐξετάζωνται συντομώτερα, τὰ δὲ μὴ ἀναγκαῖα στοιχεῖα κάθε ὕλης καὶ νὰ παραλείπωνται. (Περιττὴ εἶναι π χ. ἡ διεξοδικὴ ἐξέτασις τῶν κοινῶν κλασμάτων, τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ χρόνου, τῶν μεγάλων καὶ πολυψηφίων ἀριθμῶν, ἡ λύσις ὅλων τῶν προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὰς ἀριθμητικὰς συλλογὰς κ.τ.τ.)».

Δεύτερη κατηγορία. Οἱ ἀνήκοντες εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν ζητοῦν νὰ ἁπλοποιήσουν τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν [ἀποκλείοντες ἀπὸ αὐτὴν κάθε ὕλην, ἡ ὁποία ἀπὸ τὴν πραγματικήν, ἄρα καὶ ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν ἄποψιν ***κεῖται ἔξω ἀπὸ τὰς γνωστὰς εἰς τοὺς παῖδας σχέσεις τῆς φύσεως καὶ τοῦ ἀνθρωπίνου βίου,*** δι᾿ αὐτὸ δὲ δὲν ἠμπορεῖ νὰ κινήσῃ ***τὸ διαφέρον των πρὸς τὴν ἀρίθμησιν,*** δὲν ἔχει ἑπομένως ***μορφωτικὴν δι᾿ αὐτοὺς ἀξίαν].***

Ὁ κυριώτερος ἀντιπρόσωπος τῆς κατηγορίας αὐτῆς εἶναι ὁ *Hartmann.* Ὁ Η. τονίζει, ὅτι οἱ μεταρρυθμισταὶ τῆς προηγουμένης κατηγορίας θίγουν μόνον τὴν περιφέρειαν τοῦ μαθήματός μας. Προσπαθοῦν νὰ περιορίσουν τὴν ποσότητα τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς τὸ ἐλάχιστον, μεταχειριζόμενοι πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν κριτήρια ὑποκειμενικὰ ἢ κριτήρια λαμβανόμενα ἀπὸ τὸν λεγόμενον πρακτικὸν βίον τῶν ὡρίμων, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπέκεινα ἀπὸ τὸν σχολικὸν καὶ τὸν παιδικὸν βίον. Ἀποτέλεσμα δὲ τοῦ πράγματος αὐτοῦ εἶναι φυσικά, ὅτι αἱ σχετικαὶ προτάσεις των διὰ τὴν ἁπλοποίησιν διαφέρουν πολὺ ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην καὶ ὅτι, ὅ,τι θεωρεῖται εἰς τὴν μίαν ὡς ἀναγκαῖον, θεωρεῖται ἀπὸ τὴν ἄλλην ὡς περιττὸν κ.τ.τ. Ποία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἡ ὀρθή; Ἡ καθεμία εἰς τὸ εἶδός της καὶ καμία ἀπὸ ὅλας. Ἡ ὀρθὴ ἁπλοποίησις ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Η., μόνον ἂν ληφθῇ ὑπ᾿ ὄψιν ἡ πνευματικὴ φύσις αὐτῶν τῶν διδασκομένων παίδων, [ἂν δηλ. ἐκλέγεται πρὸς διδασκαλίαν ἐκείνη μόνον ἡ ὕλη, ἡ ὁποία κεῖται ἐντὸς τῶν γνωστῶν εἰς τοὺς παῖδας φυσικῶν καὶ ἀνθρωπίνων σχέσεων, δι᾿ αὐτὸ δὲ ἠμπορεῖ νὰ κατανοηθῇ ἀπὸ αὐτοὺς καὶ νὰ κινήσῃ τὸ διαφέρον των πρὸς τὴν ἀρίθμησιν, ἀποκλείεται δὲ κάθε ἄλλη. «Ἐκείνην», λέγει ὁ Η. εἰς τὸν πρόλογον τοῦ «Rechenbuch» του, καθὼς καὶ εἰς τὸ περὶ τῆς ἁπλοποιήσεως τῆς ἀριθμ. διδ. κεφάλαιον τοῦ συχνὰ μνημονευθέντος ἔργου του «Der Rechenunterricht κ.τ.λ.» (σελ. 209), «τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν ὀνομάζω πρακτικήν, ἡ ὁποία κατὰ πρώτιστον λόγον λαμβάνει ὑπ' ὄψιν τὴν πνευματικὴν φύσιν τοῦ παιδός». Τὸ ἴδιον ἐπαναλαμβάνει καὶ εἰς ἄλλο μέρος τοῦ τελευταίου του αὐτοῦ ἔργου, ὅπου (σελ. 301 κ. ἀκ.) καὶ προσθέτει τὰ ἑξῆς περίπου: «Ὁ παῖς εὑρίσκεται διαρκῶς ἐμπρὸς εἰς τὴν φύσιν. Δι' αὐτὸ ἀφότου θὰ ἀρχίσῃ νὰ ἀντιλαμβάνεται ὀρθὰ τὰς σχέσεις της, ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπάνω εἰς τὰς σχέσεις αὐτὰς θὰ τοῦ εἶναι πάντοτε κατιτὶ αὐτονόητον καὶ δι' αὐτὸ διαφέρον. Ἀπεναντίας αἱ σχέσεις τοῦ ἀνθρωπίνου βίου πρέπει πρῶτα νὰ γίνουν ὑποκείμενον τῆς ἐμπειρίας του, διὰ νὰ ἠμπορέσουν ὄχι μόνον νὰ κατανοηθοῦν ἀπὸ αὐτόν, ἀλλὰ καὶ νὰ κινήσουν τὸ διαφέρον του. Ἔτσι ὁ παῖς ἀποκτᾷ προφανῶς διαφέρον καὶ ἀντιληπτικότητα διὰ τὰ ἁπλᾶ προβλήματα τῆς ἀγορᾶς, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὰς συνηθεστάτας ἀνάγκας τῆς ζωῆς του, ὅπως εἶναι ἡ τροφή, ἡ ἐνδυμασία καὶ ἡ κατοικία. Ἀπεναντίας δὲν αἰσθάνεται κανὲν διαφέρον διὰ τὰ σύνθετα ἐμπορικὰ προβλήματα, ὅπως εἶναι τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὰ γραμμάτια, τὰς λήξεις κ.τ.τ. Ἐξ ἄλλου ἀντιλαμβάνεται ἀρκετὰ καλὰ τὴν ἀξίαν τοῦ χρήματος καὶ αἰσθάνεται ζωηρὸν διαφέρον διὰ τὰ προβλήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὸ Ταμιευτήριον. Ἀλλὰ καὶ τὰ διάφορα προβλήματα τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ χρόνου εὑρίσκουν πάντοτε σημεῖα ἐπαφῆς εἰς τὴν ψυχήν του. Ἐπίσης εὐχαρίστως εἰσάγεται εἰς τὰς σχέσεις τὰς κρατούσας εἰς τὸ ταχυδρομεῖον καὶ εἰς τὸν σιδηρόδρομον, καθὼς καὶ εἰς τὰ σχετικὰ μὲ τὰς σχέσεις αὐτὰς προβλήματα. Ὡσαύτως αἰσθάνεται διαφέρον διὰ τὴν μέτρησιν μηκῶν, ἐπιφανειῶν καὶ στερεῶν, καθὼς καὶ διὰ τὸν καθορισμὸν βαρῶν κ.τ.τ.»].

Εἰς τὴν προκειμένην κατηγορίαν ὑπάγονται ἐκτὸς ἄλλων καὶ οἱ Παιδαγωγικοὶ ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι, καθὼς εἴδαμεν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, θὰ ἴδωμεν δὲ καὶ διεξοδικώτερα εἰς τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον, εὑρίσκουν, ὅτι ἡ μετάβασις τῶν παίδων ἀπὸ τὸν κόσμον τῶν παιδιῶν τοῦ προσχολικοῦ χρόνου εἰς τὴν σοβαρὰν ἐργασίαν τοῦ σχολείου, καθὼς γίνεται σήμερον, εἶναι πολὺ απότομη καὶ ὄχι φυσικὴ καὶ ὅτι δὲν ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς περαιτέρω ἀνάπτυξις καὶ ἐποικοδόμησις, ἀλλὰ ὡς κατεδάφισις καὶ ἐξ

ἀρχῆς δημιουργία. Ὅλοι οἱ Παιδαγωγικοὶ αὐτοὶ προσπαθοῦν νὰ ἁπλοποιήσουν τὴν διδασκαλίαν ἰδίως τῆς πρώτης ἀριθμήσεως, προσαρμόζοντες αὐτὴν εἰς τὰς ἀνάγκας τῆς παιδικῆς φύσεως.

[Πρὶν ἔλθωμεν εἰς τὴν κρίσιν τῶν γνωμῶν τῶν ἀντιπροσώπων τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς δύο ἀνωτέρω κατηγορίας, δὲν κρίνομεν ἄσκοπον νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ὑπάρχουν καὶ μερικοὶ Μεθοδικοί, ὅπως εἶναι ὁ *Knilling* (Zur Reform des Rechenunterrichts in der Volksschule, München, 1884) καὶ ὁ *Beetz* (Der vereinfachte Rechenunterricht, Jena, Manke, 1891), οἱ ὁποῖοι ὑποστηρίζουν, ὅτι καὶ ἡ εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον διδασκομένη ἀριθμ. ὕλη δὲν εἶναι πολλὴ καὶ ὅτι ἀπεναντίας, ἂν πρόκειται, ὅπως καὶ πρέπει, ἡ ὕλη αὐτὴ νὰ ἀναφέρεται ἔστω καὶ εἰς τὰς ἁπλουστέρας πραγματικὰς σχέσεις τῆς ζωῆς, πρέπει μᾶλλον νὰ ἐπαυξηθῇ παρὰ νὰ περιορισθῇ, ὅτι δὲ δι' αὐτὸ ἡ ἁπλοποίησις τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας πρέπει νὰ ἐπιδιωχθῇ προπάντων μὲ τὴν καλύτερην κατανομὴν καὶ διάταξιν τῆς ἀριθμ. ὕλης καὶ μὲ τὸν καλύτερον τρόπον τῆς διδασκαλίας της. Χωρὶς νὰ ἀσχοληθῶμεν ἐδῶ μὲ τὰ τελευταῖα αὐτὰ ζητήματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ἄμεσην σχέσιν μὲ τὸ προκείμενον καὶ διὰ τὰ ὁποῖα θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὰ σχετικὰ κεφάλαια τοῦ παρόντος ἔργου, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀλλόκοτη γνώμη τῶν μνημονευθέντων Μεθοδικῶν, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν ἡ ἀριθμ. ὕλη τοῦ δ. σχολείου πρέπει νὰ ἐπαυξηθῇ καὶ ὄχι νὰ ἐλαττωθῇ, στηρίζεται εἰς τὴν σφαλερὰν βάσιν, ὅτι ἡ ὕλη αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ ἀναφέρεται εἰς ὁποιανδήποτε πραγματικὴν σχέσιν τῆς ζωῆς. Ἀλλὰ εἶναι ἀναμφισβήτητον, ὅτι ὅλαι αἱ πραγματικαὶ σχέσεις τοῦ βίου δὲν εἶναι κατάλληλαι καὶ διὰ τοὺς μαθητὰς τοῦ δημοτ. σχολείου, δι' αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς καὶ τὸ ζήτημα, τὸ ὁποῖον μᾶς ἀπασχολεῖ, εἶναι, ποῖαι ἀπὸ αὐτὰς εἶναι αἱ κατάλληλαι, διὰ νὰ περιορισθῇ ἡ ἀριθμ. ὕλη μόνον εἰς αὐτὰς καὶ νὰ παραλειφθοῦν ὅλαι αἱ ἄλλαι.

Ἐπανερχόμενοι λοιπὸν εἰς τὸ ζήτημά μας παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι ὁ συνήθης χαρακτηρισμὸς τῶν δύο ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν γνωμῶν περὶ τῆς ἁπλοποιήσεως τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον ἡ μὲν πρώτη ἀπὸ αὐτὰς εἰς τὸ ζήτημα τῆς ἁπλοποιήσεως ἀποβλέπει εἰς **τὸ ποσὸν** τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ἡ δὲ δεύτερη εἰς **τὸ ποιόν** της, δὲν εἶναι ὀρθός. Καὶ αἱ δύο ζητοῦν νὰ περιορίσουν τὴν ὕλην ***κατὰ ποσὸν*** καὶ ὡρισμένως ἐπὶ τῇ βάσει ***τοῦ ποιοῦ*** της. Οἱ ὀπαδοὶ τῆς πρώτης κατηγορίας, μολονότι ἀναγνωρίζουν, ὅτι ἡ ἀριθμ. διδασκαλία πρέπει νὰ ἀναπτύσσῃ καὶ τὸ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν διαφέρον τῶν παίδων, ἐν τούτοις τὸ θεωροῦν αὐτὸ ὡς κάτι δευτερεῦον, ὡς πρωτεῦον δὲ θεωροῦν τὴν προπαρασκευὴν τῶν παίδων διὰ τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον, δι' αὐτὸ δὲ διαγράφουν κάθε ἀριθμ. ὕλην, ἡ ὁποία δὲν ἔχει ὁπωσδήποτε χρησιμότητα διὰ τὸν βίον αὐτόν. Οἱ ὀπαδοὶ τῆς δεύτερης κατηγορίας, φρονοῦντες, ὅτι ἡ ἀριθμ. διδασκαλία πρέπει προπάντων νὰ ἀναπτύσσῃ τὸ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν διαφέρον τῶν παίδων, τὸ διαφέρον των δηλ., ὅπως ἐξετάζουν τὰ περιβάλλοντα αὐτοὺς πράγματα ἀπὸ τὴν ἄποψιν τοῦ ἀριθμοῦ, ἀποκλείουν ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν κάθε ἀριθμ. ὕλην, ἡ ὁποία δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ κινήσῃ τὸ ἀριθμητικὸν διαφέρον τῶν παίδων. Οἱ πρῶτοι ἀποβλέπουν εἰς τὸν ἐξωτερικὸν πρακτικὸν βίον, οἱ δεύτεροι εἰς τὴν ἐσωτερικὴν πνευματικὴν φύσιν τῶν παίδων. Οἱ πρῶτοι, ὅπως ὀρθότατα παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀν., μέρ. 3, σελ. 131) ἀποβλέπουν εἰς τὸ μέλλον, διότι ἔχουν καὶ τὴν γνώμην, ὅτι, ὅ,τι παρουσιάζεται εἰς τὸν μέλλοντα πρακτικὸν βίον, αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ καταλληλότατον διὰ τοὺς μαθητάς, οἱ δεύτεροι ἀποβλέπουν εἰς τὴν παροῦσαν κατάστασιν τοῦ παιδός, ἐπειδὴ ἔχουν καὶ τὴν γνώμην, ὅτι, ὅ,τι εἶναι καταλληλότατον δι' αὐτήν, προπαρασκευάζει συγχρόνως παραπολὺ καλὰ καὶ διὰ τὸν μέλλοντα βίον. Καὶ τῶν δύο ἄρα κατηγοριῶν οἱ ὀπαδοὶ ἐλαττώνοντες τὸ ποσὸν τῆς ἀριθμ. ὕλης ἀποβλέπουν εἰς τὸ ποιόν της, ὡς πρὸς τὸ ποιὸν ὅμως αὐτὸ ἔχουν ἀντίθετην ἀντίληψιν.

Εἶναι τώρα προφανές, ὅτι καὶ αἱ δύο γνῶμαι εἶναι ἐν μέρει ὀρθαὶ καὶ ἐν μέρει ἐσφαλμέναι, εἶναι μὲ ἄλλους λόγους μονομερεῖς.

Ἔχουν βέβαια δίκαιον οἱ ὀπαδοὶ τῆς δεύτερης κατηγορίας, ὅταν ὑποστηρίζουν, ὅτι ἡ διδασκομένη ἀριθμ. ὕλη πρέπει νὰ κινῇ τὸ διαφέρον τῶν παίδων πρὸς τὴν ἀρίθμησιν. Φυσικὰ δὲν ἔχουν θέσιν εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον ἀριθμ. ὕλαι εἰδικῆς ἐμπορικῆς καὶ ἐν γένει ἐπαγγελματικῆς φύσεως ἢ ὕλαι, αἱ ὁποῖαι εἰσάγονται μὲν εἰς τὸ πρόγραμμα χάριν δῆθεν τοῦ μέλλοντος πρακτικοῦ βίου, πράγματι δὲ ἀναφέρονται εἰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν παρουσιάζονται

εἰς αὐτόν, δὲν ἠμποροῦν δὲ ἐξ ἄλλου νὰ κινήσουν τὸ διαφέρον τῶν μικρῶν παίδων. Εἰς αὐτὸ ἄλλωστε εἶναι σύμφωνοι καὶ οἱ ὀπαδοὶ τῆς πρώτης κατηγορίας, οἱ ὁποῖοι ἀποκλείουν, καθὼς εἴδαμεν, ἀπὸ τὸ δημ. σχολεῖον καθετί, ποὺ δὲν ἔχει χρησιμότητα διὰ τὸν ***συνήθη*** πρακτικὸν βίον, π.χ. τὰ προβλήματα τῆς λήξεως, τῆς κυρίως μίξεως, τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως κ.τ.λ., ἐπίσης τὰ μὴ χρησιμοποιούμενα εἰς τὸν καθημερινὸν βίον μέτρα καὶ σταθμὰ κ.τ.λ. Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτὸ ἕως τὸ σημεῖον νὰ ἀποκλεισθῇ κάθε ἀριθμ. ὕλη τοῦ πρακτικοῦ βίου, διὰ τὴν ὁποίαν δὲν ἔχουν ἀπὸ πρὶν διαφέρον οἱ παῖδες, ὑπάρχει βέβαια πολὺ μεγάλη διαφορά. Τὸ δημ. σχολεῖον ὀφείλει νὰ καλλιεργήσῃ καὶ τὸ ***πρακτικὸν*** διαφέρον τῶν παίδων, δι' αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ γνωρίσῃ εἰς αὐτοὺς ὅλας τὰς ἀναγκαίας εἰς κάθε ἄνθρωπον ἀριθμ. ὕλας τοῦ πρακτικοῦ βίου, ἂν δὲ μερικαὶ ἀπὸ αὐτὰς εὑρίσκωνται ἀκόμη ἔξω ἀπὸ τὸν κύκλον τῶν διαφερόντων τῶν παίδων, εἶναι ὑποχρεωμένον νὰ ἐξεγείρῃ τὸ πρὸς αὐτὰς διαφέρον των μὲ τὸν κατάλληλον τρόπον τῆς διδασκαλίας. Τὸ ὅτι ὁ παῖς δὲν ἔχει ἀκόμη διαφέρον διὰ τὰ προβλήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὰ γραμμάτια καὶ τὰς ὁμολογίας, δὲν εἶναι λόγος διὰ νὰ μὴ τὰ διδαχθῇ, ἀφοῦ σήμερον, ὅπως ὀρθότατα παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀν., σ. 139), καὶ ὁ τελευταῖος χωρικὸς καὶ ὁ τελευταῖος χειροτέχνης πρέπει νὰ γνωρίζουν τὴν σπουδαιότητα καὶ τοὺς κινδύνους τοῦ μικροῦ τεμαχίου τοῦ χάρτου, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται γραμμάτιον, καὶ νὰ ἠξεύρουν νὰ διαθέτουν τὰς οἰκονομίας των εἰς ἀγορὰν προσοδοφόρων ἀξιῶν.

Ἔχουν ἐπίσης δίκαιον οἱ ὀπαδοὶ τῆς πρώτης κατηγορίας, ὅταν ὑποστηρίζουν, ὅτι ἡ ἀριθμ. διδασκαλία πρέπει νὰ προπαρασκευάζῃ τοὺς παῖδας διὰ τὰς ἀριθμητικὰς ἀνάγκας τοῦ συνήθους πρακτικοῦ βίου.

Ἐν τούτοις λησμονοῦν καὶ αὐτοὶ ***ἐν πρώτοις***, ὅτι ἡ προπαρασκευὴ διὰ τὸν πρακτικὸν βίον δὲν εἶναι ὁ μοναδικὸς σκοπὸς τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας καὶ ὅτι ὁ πρωτεύων σκοπός της εἶναι ***ἡ ἀνάπτυξις τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν ἀρίθμησιν***, τοῦ διαφέροντός των δηλ., ὅπως ἐξετάζουν τὰ πράγματα, ποὺ τοὺς περιβάλλουν, ἀπὸ τὴν ἄποψιν τοῦ ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ἡ ἐκπλήρωσις τοῦ πρωτεύοντος αὐτοῦ σκοποῦ ἐπιβάλλει τὴν διδασκαλίαν καὶ ἀριθμητικῶν ὑλῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουν ἴσως σπουδαιότητα διὰ τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον, τῶν ὁποίων ὅμως ἡ μετάδοσις εἶναι ἀπαραίτητη διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν ἀρίθμησιν.

Ἔτσι ἐν πρώτοις ἡ ἀριθμητικὴ ὕλη, ἡ ἀναφερομένη εἰς τὰ ***διάφορα πραγματικὰ μαθήματα***, εἶναι πολυτιμότατη διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ διαφέροντος αὐτοῦ τῶν παίδων, διότι ἀναφέρεται εἰς πράγματα, καὶ μάλιστα πράγματα, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὸν παραστατικὸν κύκλον των καὶ δι' αὐτὸ τοὺς εἶναι ἀγαπητά. Καὶ ὅμως οἱ ὀπαδοὶ τῆς πρώτης κατηγορίας θὰ ἦσαν ὑποχρεωμένοι νὰ παραλίπουν τὴν ὕλην αὐτήν, διότι δὲν παρουσιάζεται εἰς τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον.

Ἔπειτα ἡ ἀνάπτυξις τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν ἀρίθμησιν ἀπαιτεῖ τὴν τελείαν ὑπ' αὐτῶν κατοχὴν ***τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῶν πρώτων σειρῶν*** (1—100, 1 - 1000) ***καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.*** Μήπως τώρα ἡ διδασκαλία τῶν ὑλῶν αὐτῶν θὰ κανονισθῇ ἀπὸ τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου; Ὄχι βέβαια. Προφανῶς ὅ,τι κανονίζει τὴν διδασκαλίαν των, δὲν εἶναι ἡ ἄποψις τῆς ὁποιασδήποτε ἐφαρμογῆς των, ἀλλὰ ἡ ἄποψις τῆς φύσεως τῶν ὑλῶν αὐτῶν ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν ἄποψιν τῆς πνευματικῆς φύσεως τῶν διδασκομένων παίδων. Ἐξ ἄλλου τὸ ἀριθμητικὸν διαφέρον τῶν παίδων τοὺς ἐμβάλλει τὴν ἐπιθυμίαν νὰ λάβουν σαφῆ ἰδέαν καὶ ***τῶν μεγαλυτέρων ἀπὸ τὸν 1000 ἀριθμῶν.*** Πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς ἐπιθυμίας των αὐτῆς εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς παῖδας σχετικὰ μὲ τοὺς πολυψηφίους αὐτοὺς ἀριθμοὺς προβλήματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἀπαντοῦν μὲν εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, εἶναι ὅμως ἀπαραίτητα, διότι μόνον μὲ αὐτὰ ἠμποροῦν νὰ διασαφηθοῦν οἱ πολυψήφιοι ἐκεῖνοι ἀριθμοὶ (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν., σ. 133).

Δὲν πρέπει κατόπιν νὰ λησμονηθῇ, ὅτι ἡ σαφὴς ***κατανόησις*** κάθε ἀριθμητ. ὕλης, εἰς τὴν ὁποίαν καὶ στηρίζεται ἡ ἐξέγερσις τοῦ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν διαφέροντος τῶν παίδων, προϋποθέτει τὴν μάθησιν καὶ τὴν διάκρισιν ἂν μὴ ὅλων, τουλάχιστον ***τῶν κυριωτέρων περιπτώσεών της***, διότι μόνον ἐπάνω εἰς τὴν γνῶσιν καὶ τὴν διάκρισιν τῶν περιπτώσεων αὐτῶν βασιζόμενοι οἱ παῖδες θὰ ἠμποροῦν νὰ σχηματίζουν ἀκριβεῖς καὶ τελείας κρίσεις καὶ συλλο-

γισμοὺς ἐπάνω εἰς τὴν ὕλην αὐτὴν καὶ νὰ ἐξάγουν ἔτσι τὰς σχετικὰς μὲ τὴν ὕλην ἐννοίας καὶ τοὺς διέποντας αὐτὴν κανόνας, ἤτοι νὰ κάμουν ὅλας τὰς νοητικὰς ἐκείνας ἐργασίας, τὰς ὁποίας ἐννοοῦμεν, ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ σαφοῦς κατανοήσεως. Καὶ εἴμεθα μὲν ἀναγκασμένοι εἰς τὰ δημοτ. σχολεῖα, τὰ ὁποῖα διαθέτουν διὰ τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν ὀλιγώτερον χρόνον ἀπὸ τὸν ἀναγκαιοῦντα, νὰ ἐλαττώνωμεν διὰ τὸν λόγον αὐτὸν καὶ μόνον τὸν ἀριθμὸν τῶν περιπτώσεων αὐτῶν εἰς τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν ὅριον, δὲν ἐπιτρέπεται ὅμως νὰ κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὰ πολυτάξια διὰ τὸν λόγον δῆθεν, ὅτι μερικαὶ ἀπὸ τὰς περιπτώσεις αὐτὰς δὲν εἶναι πολὺ χρήσιμαι εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, προπάντων δὲ δὲν ἐπιτρέπεται νὰ κάμωμεν αὐτὸ εἰς καμιᾶς τάξεως σχολεῖα, ἐφόσον πρόκειται διὰ περιπτώσεις, τῶν ὁποίων τὴν γνῶσιν θὰ ἐπιζητοῦν οἱ ἴδιοι οἱ μαθηταί, κινούμενοι ἀπὸ τὸ ἀριθμητικόν των διαφέρον. Διὰ τὴν σαφῆ κατανόησιν τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν δὲν ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς μαθητὰς μόνον προβλήματα μὲ ποσὰ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, ἀλλὰ πρέπει νὰ τοὺς δώσωμεν καὶ προβλήματα μὲ ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τὰ ὁποῖα ἐν τούτοις ἀποκλείουν μερικοὶ ἀπὸ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς προκειμένης κατηγορίας διὰ τὸν ἄλλωστε ὄχι ἀκριβῆ λόγον, ὅτι τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν εὐχρηστοῦν εἰς τὸν πρακτικὸν βίον. Ἡ ἔλλειψις διαθεσίμου χρόνου μᾶς ἐπιβάλλει νὰ μὴ δίδωμεν εἰς τὰ ὀλιγοτάξια σχολεῖα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι κοινὸν ἢ δεκαδικὸν κλάσμα. Ὁ λόγος ὅμως αὐτὸς δὲν ἰσχύει καὶ διὰ τὰ πολυτάξια, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ δίδωμεν καὶ τέτοια προβλήματα, διότι συντελοῦν εἰς τὴν σαφεστέραν κατανόησιν τῆς μεθόδου αὐτῆς, δὲν εἶναι δὲ καὶ ὅλως διόλου ἄχρηστα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, ὅπως διατείνονται οἱ ὀπαδοὶ τῆς προκειμένης κατηγορίας. Εἰς τὰ ὀλιγοτάξια σχολεῖα ἠμποροῦμεν διὰ τὸν ἴδιον λόγον νὰ παραλίπωμεν τὰς περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου μὲ κλάσμα, νὰ παραλίπωμεν ἐπίσης ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ τοκισμοῦ ὅλα τὰ ἄλλα ἐκτὸς ἐκείνων, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος κ.τ.λ., κανεὶς ὅμως λόγος δὲν συντρέχει νὰ κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὰ πολυτάξια. Διδάσκοντες τὴν ἀρίθμησιν τῶν κλασμάτων δὲν πρέπει νὰ παραλείπωμεν τὴν διδασκαλίαν τῶν ἑβδόμων, ὅπως ζητοῦν μερικοὶ διὰ τὸν ἄλλωστε ὄχι ἀκριβῆ λόγον, ὅτι τα ἕβδομα εἶναι ἄχρηστα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον (1 ἡμέρα $= \frac{1}{7}$ τῆς ἑβδομάδος !), διότι αὐτὸ τὸ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν διαφέρον τῶν παίδων θὰ τοὺς παρακινήσῃ νὰ κόψουν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ εἰς 7 μέρη, ὅπως τὴν ἔκοψαν εἰς 2 καὶ εἰς 6 καὶ εἰς 8. Ἀντιθέτως δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀσχολούμεθα κατὰ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κοινῶν κλασμάτων με κλάσματα ἔχοντα μεγάλους ὅρους, κατὰ τὴν ἀρίθμησιν τῶν συμμιγῶν μὲ συμμιγεῖς τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως ἔχοντας μονάδας περισσοτέρων τάξεων ἀπὸ δύο κ.τ.λ., διότι ὅλαι αὐταὶ αἱ ὕλαι, ἐκτὸς τοῦ ὅτι δὲν εὐχρηστοῦν εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, δὲν εἶναι ἀπαραίτηται πρὸς ἀνάπτυξιν τοῦ ἀριθμητικοῦ διαφέροντος τῶν παίδων (ἴδ. ἰδίως Räther, ὅπ. ἀν., σ. 134 κ. ἀκ.).

Ἀλλὰ ἡ σαφὴς κατανόησις ὁποιασδήποτε ἀριθμητικῆς ὕλης προϋποθέτει καὶ ***τὴν προδιδασκαλίαν κάθε ἄλλης πρὸς τοῦτο ἀπαραιτήτου.*** Ἡ πρόσθεσις π.χ. τῶν ἀριθμῶν 1—10 μὲ ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν εἰς 2 προσθετέους, ἡ ὁποία δι' αὐτὸ πρέπει νὰ ἔχῃ προδιδαχθῇ. Ἡ εὔκολη ἐν γένει ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμ. πράξεων εἰς τὴν σειρὰν 1—100, ἡ εὔκολη ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων καὶ ἡ ἄκοπη εὕρεσις τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ εἰς τὰς ἁπλουστέρας ἀκόμη περιπτώσεις τῆς προσθέσεως τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων προϋποθέτουν τὴν γνῶσιν τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν 1—100 εἰς παράγοντας, τὴν γνῶσιν τῶν πρώτων ἀριθμῶν καὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν 1—100 εἰς πρώτους παράγοντας, προσέτι δὲ καὶ τὴν γνῶσιν τῶν κανόνων τῆς διαιρετότητος. Καὶ ὅμως μερικοὶ Μεθοδικοὶ τῆς προκειμένης κατηγορίας θεωροῦν ἐντελῶς περιττὴν τὴν διδασκαλίαν τῶν ὑλῶν αὐτῶν, διότι δὲν παρουσιάζονται εἰς τὸν πρακτικὸν βίον. Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τοῦ τοκισμοῦ προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ἡ ὁποία ἐν τούτοις ἀποκλείεται ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς τῆς ἴδιας κατηγορίας διὰ τὸν ἄλλωστε ὄχι ἀκριβῆ λόγον, ὅτι δὲν εὐχρηστεῖ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον. Βέβαια περιττεύει ἡ διδασκαλία πολλῶν καὶ πολυμελῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου αὐτῆς, ἀφοῦ ἡ διδασκαλία της συνεχίζεται οὕτως εἰπεῖν μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν προβλημάτων τοῦ τοκισμοῦ, τὰ ὁποῖα ἄλλωστε κατὰ κανόνα

ἔχουν 5 μόνον μέλη. Ἐν τούτοις ἡ παντελὴς παράλειψις τῶν προβλημάτων τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν κάθε ἄλλο εἶναι παρὰ συμφέρουσα, διότι τὰ προβλήματα αὐτά, καθόσον ἀναφέρονται εἰς γνωστὰς εἰς τοὺς μαθητὰς πραγματικὰς σχέσεις καὶ εἶναι δι' αὐτὸ πολὺ ἁπλούστερα δι' αὐτοὺς ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ τοκισμοῦ, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς πραγματικὰς σχέσεις ἀγνώστους εἰς τοὺς μαθητάς, τοὺς προπαρασκευάζουν μὲ τὸν καλύτερον τρόπον εἰς τὴν κατανόησιν τῶν προβλημάτων τοῦ τοκισμοῦ. Εἰς τὰ ὀλιγοτάξια σχολεῖα ἠμπορεῖ νὰ παραλειφθῇ ἡ σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ προβλήματα τοῦ τοκισμοῦ δὲν διδάσκονται μὲ τὴν τεχνικήν, μὲ τὴν ὁποίαν διδάσκονται τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ἤτοι μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα καὶ τὴν κλασματικὴν διάταξιν, ἀλλὰ μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναλύσεως (Räther, ὅπ. ἀν., σ. 135 κ. ἀκ.).

Δεύτερον λησμονοῦν οἱ ὀπαδοὶ τῆς προκειμένης κατηγορίας, ὅτι αὐτὴ ἡ ἐκπλήρωσις τοῦ σκοποῦ, τὸν ὁποῖον ἐπιδιώκουν, δυσχεραίνεται, ἐφόσον δὲν ἐκπληρώνεται ὁ πρωτεύων σκοπὸς τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας, ἤτοι ἡ ἐξέγερσις τοῦ ἀριθμητικοῦ διαφέροντος τῶν παίδων. Ὕλαι ἀριθμητικαί, χρησιμεύουσαι πρὸς ἀνάπτυξιν τοῦ διαφέροντος αὐτοῦ, δυνατὸν εἶναι νὰ μὴν ἔχουν ἄμεσην σπουδαιότητα διὰ τὸν πρακτικὸν βίον, ἠμπορεῖ ὅμως νὰ ἔχουν ἔμμεσην χρησιμότητα, καθόσον συντελοῦν εἰς τὴν κατανόησιν ἄλλων ἀριθμ. ὑλῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι χρησιμώταται εἰς αὐτόν. Αὐτὸ ἰσχύει π. χ. διὰ τὰς ἀναλύσεις, διὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν κ.τ.λ (Räther, ὅπ. ἀν., σ. 136 κ. ἀκ.).

Ὅλα τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα πιστοποιοῦν, ὅ,τι ἐτονίσαμεν καὶ εἰς τὴν ἀρχήν, ὅτι δηλ. αἱ ἀρχαὶ καὶ τῶν δύο κατηγοριῶν εἶναι μονομερεῖς. Προφανῶς τὸ ὀρθὸν κεῖται εἰς τὸν πρέποντα συνδυασμὸν καὶ τῶν δύο, τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαρμογὴ ὁδηγεῖ εἰς τὰ ἀκόλουθα πορίσματα :

1. Διὰ τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν τῶν πολυταξίων δ. σχολείων πρέπει νὰ ἐκλέγωνται αἱ ἀριθμητικαὶ ὕλαι, αἱ ὁποῖαι ἢ ἀναφέρονται εἰς γνωστὰς εἰς τοὺς παῖδας πραγματικὰς σχέσεις καὶ δι' αὐτὸ ἠμποροῦν νὰ κινήσουν τὸ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν διαφέρον των ἢ ἀνάγονται εἰς τὰς συνήθεις καὶ γενικὰς σχέσεις τοῦ μέλλοντος

πρακτικοῦ βίου των καὶ δι' αὐτὸ ἠμποροῦν μὲ τὸν κατάλληλον τρόπον τῆς διδασκαλίας νὰ ἐξασφαλίσουν τὸ διαφέρον τῶν παίδων, νὰ παραλείπωνται δὲ αἱ ἀριθμητικαὶ ὗλαι, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀναπτύσσουν τὸ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν διαφέρον τῶν μαθητῶν, ἐνῷ ἐξ ἄλλου δὲν προπαρασκευάζουν διὰ τὰς ἀριθμητικὰς ἀνάγκας τοῦ συνήθους πρακτικοῦ βίου.

2. Εἰς σχολεῖα διαθέτοντα διὰ τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν ὀλιγώτερον χρόνον ἀπὸ τὸν ἀναγκαιοῦντα πρέπει ἀκριβῶς διὰ τὸν λόγον αὐτὸν νὰ παραλείπωνται καὶ ἀπὸ τὰς προκριθείσας ὕλας, ὅσαι εἶναι ὀλιγώτερον ἀπαραίτηται πρὸς ἀνάπτυξιν τοῦ ἀριθμ. διαφέροντος τῶν παίδων ἢ εὐχρηστοῦν ὀλιγώτερον εἰς τὸν πρακτικὸν βίον].

3. Ἡ κατὰ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος διδασκομένη ἀριθμ. ὕλη πρέπει νὰ περιορισθῇ εἰς τὸ κατώτερον δυνατὸν ὅριον.

XXIV. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ Η ΤΕΡΠΝΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ.

Ἕνα σοβαρὸν αἴτιον τῆς πενιχρότητος τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας ὡς πρὸς πολλοὺς μαθητὰς εἶναι, καθὼς εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, καὶ τὸ γεγονός, ὅτι ἡ βάσις τῆς ὅλης ἀριθμ. διδασκαλίας, ἤτοι ἡ διδασκαλία τῆς πρώτης ἀριθμήσεως, ἔχει διαρρυθμισθῆ καὶ διεξάγεται μὲ τρόπον, ὁ ὁποῖος εἰς πολλὰ δὲν ἀνταποκρίνεται μὲ τὴν φύσιν τῶν παίδων.

Τὰ ἐπακολουθήματα τοῦ πράγματος αὐτοῦ δὲν ἔχουν διαφύγει τοὺς Παιδαγωγικούς. Ὅλοι σχεδὸν ἔχουν ἀποκομίσει τὴν πεῖραν, ὅτι ἡ πρώτη ἀρίθμησις ἐξασκεῖ ὑπερβολικὴν πίεσιν εἰς τοὺς μικροὺς παῖδας καὶ ὅτι συνηθέστατα οἱ περισσότεροι ἀπὸ αὐτοὺς ὄχι μόνον δὲν αἰσθάνονται καμίαν εὐχαρίστησιν ἀπὸ αὐτήν, ἀλλὰ καὶ τὴν ἀντιλαμβάνονται ὡς ἕνα φορτίον βαρὺ καὶ στεναγμῶν μόνον πρόξενον. Ἡ πρώτη ἐν γένει διδασκαλία μὲ τὴν σημερινήν της μορφὴν προκαλεῖ ἕνα ὀλέθριον ρῆγμα εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῶν παίδων. Ἐνῷ μέχρι τοῦδε ὁ παῖς ἔζουσε εἰς τὸν εὐτυχισμένον κόσμον τῆς φαντασίας καὶ τῶν παιδιῶν, ἀπὸ τὰς πρώτας ἀκόμη

ἡμέρας τῆς εἰς τὸ σχολεῖον φοιτήσεώς του ὠθεῖται διὰ τῆς βίας εἰς τὸν ψυχρὸν κόσμον τῶν γραμμάτων καὶ τῶν ἀριθμῶν. Ὀφείλει πλέον τὰς περισσοτέρας ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος, ἂν μὴ ὅλας, νὰ ἀριθμῇ μίαν ὁλόκληρην ὥραν. Δὲν εἶναι μικρὸς ὁ ἀριθμὸς τῶν παίδων, οἱ ὁποῖοι συναντοῦν κολοσσιαίας δυσκολίας εἰς τὴν πρώτην ἀρίθμησιν καὶ οἱ ὁποῖοι μὲ ὅλην τὴν καλήν των θέλησιν δὲν ἠμποροῦν νὰ μάθουν νὰ ἐργάζωνται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς ἢ τοὐλάχιστον δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐργάζωνται τόσον γρήγορα, ὅσον ἀπαιτεῖ τὸ πρόγραμμα, σύμφωνα δὲ μὲ αὐτὸ καὶ ὁ διδάσκαλος. Εἰς τὴν περίπτωσιν δὲ αὐτὴν καταντᾷ ἐντὸς ὀλίγου τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς τὸ φοβερώτερον ἀπὸ ὅλα τὰ μαθήματα καὶ διὰ τοὺς περισσοτέρους μαθητὰς καὶ διὰ τὸν διδάσκαλον. Ἡ πίεσις καὶ ἡ βία, ἡ ἀνυπομονησία, αἱ σκληραὶ λέξεις ἢ μάλιστα καὶ αἱ τιμωρίαι εἶναι συνηθέστατα ἡ ἐπισφράγισίς του. Ὅτι μάθημα τόσον ἀντιπαθητικὸν εἰς τοὺς περισσοτέρους παῖδας δὲν θὰ ἀποδίδῃ τοὺς προσδοκωμένους καρποὺς καὶ ὅτι ἡ ἀντιπάθεια τῶν μαθητῶν καὶ ἡ ἀπόδοσις πενιχρῶν ἀποτελεσμάτων θὰ τὸ συνοδεύῃ καὶ εἰς τὴν κατόπιν διδασκαλίαν του εἶναι εὐνόητον.

Διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς ὁ *Gerlach* καὶ πολλοὶ ἄλλοι Παιδαγωγικοὶ ἀπαιτοῦν, ὅπως ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ ἰδιαιτέρως τῆς πρώτης ἀριθμήσεως διαρρυθμισθῇ ὄχι σύμφωνα μὲ τὰς ἀξιώσεις τῶν θεωριῶν καὶ τῶν συστημάτων, ἀλλὰ σύμφωνα μὲ τὰς ἀπαιτήσεις καὶ τὰς ὑποδείξεις τῆς παιδικῆς φύσεως. Αἱ δυνάμεις τοῦ παιδὸς πρέπει νὰ ἀναπτυχθοῦν σύμφωνα μὲ τὴν φύσιν των. Ὁ Gerlach φρονεῖ, «ὅτι δὲν ἐξυπηρετοῦμεν τὸν παῖδα, ἐφόσον **ἐπεμβαίνομεν ὡς ἐξ ἐφόδου** μὲ τὰ παιδαγωγικά μας μέτρα εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῶν προδιαθέσεών του. Θὰ ἔπρεπε μᾶλλον νὰ γίνεται τὸ ἐναντίον. Θὰ ἔπρεπε δηλαδὴ νὰ προσπαθοῦμεν **νὰ ἀναπτύσσωμεν** τὰς προδιαθέσεις του, μόνον δὲ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ ἠμπορούσαμεν νὰ συντελέσωμεν εἰς τὴν προαγωγὴν τῆς εὐτυχίας του. Τὸ σημερινὸν σύστημά μας ἀποτελεῖ διαρκῆ ἐπέμβασιν εἰς τὴν φυσικὴν ἐξέλιξιν τοῦ παιδός, ἡ δὲ ἐπέμβασις αὐτὴ προκαλεῖ μᾶλλον ἐμπόδιον εἰς τὴν φυσικήν του ἀνάπτυξιν παρὰ προαγωγήν της».

Σύμφωνα τώρα μὲ τὴν γνώμην τῶν Παιδαγωγικῶν αὐτῶν, διὰ νὰ ἀνταποκρίνεται ἡ διδασκαλία τῆς πρώτης ἀριθμήσεως εἰς τὴν παιδικὴν φύσιν, ἔτσι δὲ νὰ ἀποβαίνῃ εὐχάριστη εἰς τοὺς παῖδας καὶ νὰ ἀποδίδῃ τοὺς προσδοκωμένους καρπούς, πρέπει νὰ ἐκπληρώνῃ τὰς ἑξῆς ἀπαιτήσεις:

α) Πρέπει προπάντων νὰ καλλιεργῇ εἰς ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλύτερον βαθμὸν τὴν ἐκ φύσεως ἐνυπάρχουσαν εἰς τοὺς παῖδας ***ὁρμὴν πρὸς δρᾶσιν***, πρὸς ἐνέργειαν. Μὲ τὴν ἐκπλήρωσιν τῆς ἀπαιτήσεως αὐτῆς ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν ***ἡ ἀρχὴ τῆς ἐργασίας***. Ἡ διδασκαλία δὲν πρέπει νὰ ἐπαναπαύεται εἰς τὴν ὅρασιν, τὴν ἀκοήν, τὸν προφορικὸν λόγον καὶ τὴν γραφὴν καὶ νὰ νομίζῃ ἀρκετὸν τὸ ὅτι παρατηροῦν οἱ μαθηταὶ τὸ ἀριθμητήριον, ἀσκοῦνται προφορικὰ εἰς τὴν ἀρίθμησιν καὶ συνηθίζουν εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμητικῶν ψηφίων. Ἀπεναντίας κάθε μαθητὴς πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰς χεῖράς του τὰ ἀντικείμενα τῆς ἀριθμήσεως καὶ νὰ ἀριθμῇ μὲ αὐτά. Συνιστῶνται δὲ ὡς μέσα ἀριθμήσεως κατάλληλα διὰ τὰς χεῖρας τῶν παίδων: τὰ δάκτυλα, τὰ ξυλάρια, ἕνα μικρὸν ἀριθμητικὸν κιβώτιον μὲ κύβους ἢ ἄλλα σώματα ἢ ἕνα ἀριθμητήριον τῆς χειρὸς μὲ σφαίρας ἢ καὶ τὰ δύο (, ὅπως εἶναι π.χ. τὸ ἀριθμητικὸν κιβώτιον (Rechenfederkasten) τοῦ Crüger (Berlin-Lichterfelde, Steglitzerstrasse 25 b., 72 λ.), τὸ ἀριθμητήριον τῆς χειρὸς (Handrechenmaschine Fix) τοῦ Risse (Schierfelde in Westf., μὲ κιβώτιον 55 λ., χωρὶς αὐτὸ 30 λ.), τὸ ἀριθμ. κιβώτιον καὶ τὸ ἀριθμητήριον τοῦ J. Schwinge (Nahausen, Neymark) κ.τ.λ.), πινακίδες ἀπαριθμήσεως μὲ ψηφῖδας, τὰς ὁποίας ἠμπορεῖ νὰ κατασκευάζῃ μόνος του ὁ μαθητής, τὸ παράθυρον τοῦ Graser, (διὰ τὸ ὁποῖον ἴδ. καὶ Kempinsky εἰς τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ κατωτέρω μνημονευόμενα ἔργα του, σελ. 16), διάφορα ἀντικείμενα τῆς φύσεως, καθὼς πίσα, φασόλια, ἄνθη, καρποί, ἀκόμη δὲ καὶ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν κ.ἄ.ὅ.—Ὁ Gerlach ἐδημοσίευσε ἕνα εἶδος «Ἀλφαβηταρίου» τῆς Ἀριθμητικῆς μὲ τὸν τίτλον «Τὸ πρῶτον βιβλίον τῆς Ἀριθμητικῆς τῶν παιδιῶν» (Des Kindes erstes Rechenbuch, Leipzig, Quelle u. Meyer, 70 λ.), τὸ ὁποῖον εἶναι βιβλίον εἰκόνων, ποὺ προκαλοῦν τὴν ἀρίθμησιν, καὶ περιέχει εἰς τὰς σελ. 90—99 «μίαν ἱστορίαν, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει κανεὶς νὰ λογαριάζῃ» μὲ 59 ἰδιαίτερα προβλήματα. Τὸ εἰκονογραφημένον αὐτὸ

βιβλίον ἠμπορεῖ μὲν νὰ προξενῇ χαρὰν εἰς τοὺς παῖδας, προφανῶς ὅμως δὲν ἐξυπηρετεῖ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐργασίας.

Σημειωτέον ἀκόμη, ὅτι χρησιμοποιοῦνται ἀπὸ σκοποῦ ***διάφορα μέσα ἀριθμήσεως***, διὰ νὰ εἰσαχθῇ ἔτσι καὶ κάποια ἐναλλαγὴ καὶ ποικιλία εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν. Ἐπίσης δὲ προκαλοῦνται οἱ παῖδες νὰ μανθάνουν νὰ ἀριθμοῦν ἰχνογραφοῦντες, πλάσσοντες μὲ πηλὸν καὶ παίζοντες. Ὁ ***Kempinsky*** καὶ ὁ Gerlach παραθέτουν εἰς τὰ ἔργα των ἀρκετὰς παιδιάς, αἱ ὁποῖαι ὑποβοηθοῦν τὴν ἀπαρίθμησιν.

β) Πρέπει ἐπίσης νὰ χρησιμοποιῇ ἡ διδασκαλία τῆς πρώτης ἀριθμήσεως ***ὅλα ἐν γένει τὰ μέσα***, ὅσα συντελοῦν εἰς τὴν ἐξέγερσιν καὶ συντήρησιν ***τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων διὰ τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας***. Ἔτσι π.χ. ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις πρέπει νὰ σημαίνουν κέρδος καὶ ἀπώλειαν πραγμάτων ἀγαπητῶν εἰς τοὺς παῖδας (π.χ. βώλων, γραμματοσήμων κ.λ.π.), κατασκευὴν καὶ βρῶσιν γλυκισμάτων, ἄναμμα καὶ σβήσιμον φώτων, φύτευσιν καὶ μαρασμὸν δένδρων, παράταξιν καὶ πτῶσιν εἰς τὴν μάχην στρατιωτῶν κ.τ.λ. (Πρβ. Gerlach, Schöne Rechenstunden, σ. 44, Lang, Fröhliches Rechnen). — Ἡ ἀπαρίθμησις ἐξ ἄλλου γίνεται περισσότερον ἑλκυστικὴ καὶ μανθάνεται εὐκολώτερα μὲ τὴν χρῆσιν τοῦ ῥυθμοῦ. Ὁ *Lang* εἰς τὸ ἀνωτέρω σημειωθὲν βιβλίον του συνιστᾷ καὶ τὴν χρῆσιν παιδικῶν ὁμοιοκαταλήκτων στίχων, παραθέτει δὲ τέτοιους εἰς αὐτό. Ἐπίσης συνιστᾷ τὴν χρῆσιν καὶ σχηματογραφικῶν ἰχνογραφημάτων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ποσὸν γραμμῶν ἀντίστοιχον μὲ τὸν αἰσθητοποιούμενον ἀριθμόν, παραθέτει δὲ καὶ τέτοια ἰχνογραφήματα εἰς τὸ ἔργον του.

γ) Πρέπει ὡσαύτως ἡ διδασκαλία τῆς πρώτης ἀριθμήσεως νὰ λαμβάνῃ τὴν μορφὴν ***ἐπικαίρου διδασκαλίας*** καὶ νὰ συμβαδίζῃ μὲ τὴν πραγματογνωστικήν.

δ) Πρέπει ἐπίσης ἡ διδασκαλία τῆς πρώτης ἀριθμήσεως νὰ μὴ ἀρχίζῃ ἀμέσως ἀπὸ τὰς πρώτας ἡμέρας τῆς εἰς τὸ σχολεῖον φοιτήσεως τῶν παίδων, ἀλλὰ ***πολὺ ἀργότερα***. Ὁ Gerlach (Schöne Rechenstunden, σ. 25) φρονεῖ, ὅτι ἠμπορεῖ νὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ τὸ τρίτον σχολικὸν ἔτος, χωρὶς νὰ παραστῇ ἀνάγκη δι᾽ αὐτὸ νὰ ταχθοῦν κατώτεροι σκοποὶ ἀπὸ τοὺς σημερινοὺς εἰς τὴν ὅλην ἀριθμ. διδασκαλίαν τοῦ δημοτ. σχολείου. Ἀλλ' ὁ ἰσχυρισμὸς αὐτὸς τοῦ Gerlach εἶναι ἀναπόδεικτος καὶ ἀστήρικτος. Ὁ ἴδιος ἄλλωστε κατανοεῖ τὸ πρᾶγμα, διότι εὐθὺς κατόπιν ὑποστηρίζει, ὅτι δὲν εἶναι σφάλμα, ἀλλ' ἀπεναντίας εὐχῆς ἔργον νὰ ὁρισθοῦν κατώτεροι σκοποὶ εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν τοῦ δημοτ. σχολείου. Ἐπίσης δὲ καὶ ὁ *Schreiber* (Die Tyrannei der Zahl) ὑποστηρίζει τὴν γνώμην, ὅτι ἡ Ἀριθμητικὴ δὲν πρέπει νὰ διδάσκεται τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος.

[ε) Ἐφόσον ἡ ἀριθμ. διδασκαλία ἀρχίζει ἀμέσως ἀπὸ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος, πρέπει τοὐλάχιστον κατ' αὐτὸ (καὶ κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ δεύτερου σχολικοῦ ἔτους) νὰ ἀριθμοῦν οἱ μαθηταὶ μόνον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐποπτείας καὶ ὄχι καὶ μὲ τὸν νοῦν των, δηλαδὴ ἀπὸ μνήμης].

Ἡ ἰδική μας τώρα γνώμη διὰ τὸ προκείμενον ζήτημα συνοψίζεται εἰς τὰ ἀκόλουθα :

α) Δὲν συμφωνοῦμεν μὲ τὴν γνώμην ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι φρονοῦν, ὅτι πρέπει νὰ ἐλαττωθοῦν αἱ σημεριναὶ ἀπαιτήσεις ἀπὸ τὴν ὅλην ἀριθμ. διδασκαλίαν τοῦ δημοτ. σχολείου. Ἐν τούτοις νομίζομεν, ὅτι ἠμποροῦν νὰ παραλειφθοῦν ἀρκεταὶ ὗλαι ἀπὸ τὰς ὑπαρχούσας σήμερον εἰς τὸ πρόγραμμα χωρὶς βλάβην τοῦ συνόλου, ἂν ἐφαρμοσθοῦν πιστὰ τὰ σχετικὰ μὲ τὴν ἁπλοποίησιν τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας πορίσματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐκαταλήξαμεν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον.

β) Τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος πρέπει μὲ κάθε τρόπον νὰ ἀπαλλαγῇ ἀπὸ τὴν πίεσιν, ἡ ὁποία τὸ καταθλίβει. Ἡ διδασκαλία τῆς πρώτης ἀριθμήσεως πρέπει νὰ προξενῇ χαρὰν εἰς τοὺς παῖδας. Ἐν τούτοις δὲν εἴμεθα τῆς γνώμης, ὅτι πρέπει νὰ γίνεται ἐπικαίρως καὶ χωρὶς σχέδιον ἀπὸ πρὶν καθωρισμένον, διότι ἔτσι τὰ ἀποτελέσματά της θὰ ἐξαρτῶνται κατὰ μέγιστον μέρος ἀπὸ τὴν τύχην.

γ) Κατὰ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος θὰ ἔπρεπε ἡ διδασκαλία νὰ περιορίζεται εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—10, [μόνον δὲ εἰς εὐμενεῖς σχολικὰς συνθήκας νὰ ἐκτείνεται ἕως τὸν 20], νὰ θέτεται δὲ εἰς δευτέρην μοῖραν ἡ ἀρίθμησις μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμούς. [Δὲν συμμεριζόμεθα ὅμως καὶ τὴν ἀπαίτησιν, ὅπως οἱ μαθηταὶ τοῦ ἔτους αὐτοῦ ἀριθμοῦν μόνον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐποπτείας διὰ τοὺς ἑξῆς

λόγους. Πρῶτα ἡ ἀπαίτησις αὐτὴ εἶναι λίαν ὑπερβολική, διότι, ὅπως μᾶς δεικνύει ἡ πεῖρα, ὅλοι οἱ κανονικοὶ τοὐλάχιστον μαθηταὶ τοῦ ἔτους αὐτοῦ ἠμποροῦν πολὺ εὔκολα ἐκκινοῦντες ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐποπτείας νὰ φθάνουν εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης. Ἔπειτα ἡ ἐκπλήρωσις τῆς ἀπαιτήσεως αὐτῆς θὰ ἔχῃ τὸ κακὸν ἐπακολούθημα, ὅτι οἱ μαθηταὶ θὰ προσδεθοῦν εἰς τὰ μέσα τῆς αἰσθητοποιήσεως καὶ δὲν θὰ ἠμποροῦν χωρὶς τὴν βοήθειάν των νὰ λύουν καὶ τὸ ἁπλούστερον πρόβλημα (Ἴδ. καὶ τὸ κεφάλαιον περὶ τῶν αἰτίων τῶν πενιχρῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας !). Φυσικὰ δέ, ἐφόσον οἱ μαθηταὶ θὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν κατάστασιν αὐτήν, δὲν πρέπει νὰ πιστεύωμεν, ὅτι ἐπροχώρησαν ἔστω καὶ ἐπ' ἐλάχιστον εἰς τὴν ἀρίθμησιν. Ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 1, σ. 76 κ. ἀκ.].

δ) Κατὰ τὰς πρώτας ἑβδομάδας τοῦ πρώτου σχολικοῦ ἔτους θὰ ἔπρεπε ἡ ἀριθμ. διδασκαλία νὰ μὴ διαρκῇ περισσότερον ἀπὸ ἕνα τέταρτον τῆς ὥρας. Ἀργότερα θὰ ἠμπορῇ νὰ διαρκῇ ἕως 20 λεπτά. Ἀριθμητικὴ διδασκαλία γινομένη δύο φορὰς τὴν ἡμέραν, αἱ ὁποῖαι ὅμως ἀπέχουν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον καὶ διαρκοῦν μόνον ἀπὸ 20 λεπτά, ἀποδίδει πολὺ περισσοτέρους καρποὺς ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν, ἡ ὁποία γίνεται μὲν μίαν φορὰν τὴν ἡμέραν, ἀλλὰ διαρκεῖ μίαν ὁλόκληρην ὥραν, διὰ τὸν ἁπλούστατον λόγον, ὅτι τὸ διαφέρον τῶν μικρῶν δὲν ἠμπορεῖ νὰ συγκρατηθῇ ἐπὶ πολὺν χρόνον.

ε) Ἡ ἀρίθμησις πρέπει νὰ συνδυάζεται ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον μὲ σχετικὰς ἐργασίας τῶν παίδων.

[Ἔτσι κατ' αὐτὴν τὴν πρώτην διδασκαλίαν κάθε ἀριθμοῦ καὶ ἀριθμητικῆς πράξεως εἰς τὰς σειρὰς 1—10 καὶ 1—100 σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχῃ ὁ κάθε μαθητὴς τὸ ἰδικόν του μέσον τῆς ἐποπτείας, ὅμοιον μὲ τὸ θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον τῆς τάξεως, ἀλλὰ πολὺ μικρότερον καὶ κατάλληλον διὰ τὰς χεῖράς του καὶ νὰ ἐπαναλαμβάνῃ μόνος του εἰς αὐτὸ τὰ εἰς τὸ κοινὸν ἐποπτικὸν μέσον τῆς τάξεως ἐκτελούμενα. Φυσικὰ τὸ πρᾶγμα αὐτὸ δὲν θὰ εἶναι εὔκολον, ἐφόσον θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον τῆς τάξεως θὰ εἶναι τὸ κιβώτιον μὲ τοὺς κύβους τοῦ Tillich (, ὅπως καὶ πρέπει νὰ εἶναι κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—10), ἢ τὸ Ῥωσσικὸν ἀριθμητήριον μὲ τὰς σφαίρας (, ὅπως καὶ πρέπει νὰ εἶναι κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν 1—100), μολονότι εἰς τὸ ἐμπόριον ὑπάρχουν μικρὰ ἀριθμητικὰ κιβώτια καὶ ἀριθμητήρια τῆς χειρὸς ποικιλωτάτων εἰδῶν, ἠμποροῦν δὲ καὶ νὰ κατασκευασθοῦν ἐπὶ παραγγελίᾳ ἀπὸ κάθε ἐπιδέξιον ξυλουργόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ πρέπῃ τοὐλάχιστον νὰ καλοῦνται ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότεροι μαθηταὶ νὰ ἐκτελοῦν τὴν διδασκομένην ἀριθμητ. πρᾶξιν εἰς τὸ θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον, ἐνῷ οἱ ὑπόλοιποι θὰ ἠμποροῦν νὰ κάμνουν χρῆσιν πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν τῶν δακτύλων των. Ἂν τὸ θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον τῆς τάξεως εἶναι τὰ ξυλάρια, εἶναι εὐκολώτατον νὰ προμηθευθοῦν τέτοια καὶ οἱ μαθηταὶ καὶ νὰ ἐπαναλαμβάνουν μὲ αὐτὰ μόνοι των τὸ ἑκάστοτε διδασκόμενον. Ἀλλὰ καὶ ἂν οἱ μαθηταὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐπαναλαμβάνουν τὴν διδασκομένην πρᾶξιν ἐπάνω εἰς ἰδικά των ἐποπτικὰ μέσα, ὅταν τὸ θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον τῆς τάξεως εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν κιβώτιον ἢ τὸ Ῥωσσικὸν ἀριθμητήριον, θὰ ἠμποροῦν ἐν τούτοις νὰ τὴν συνεκτελοῦν, ὅταν θὰ ἐπαναλαμβάνεται ἐπάνω εἰς ἄλλα βοηθητικὰ ἐποπτικὰ μέσα, τὰ ὁποῖα φυσικὰ πρέπει νὰ ἐκλέγωνται ἔτσι ἀπὸ τὸν διδάσκαλον, ὥστε νὰ ἠμπορῇ νὰ τὰ ἔχῃ κάθε μαθητής. Τέτοια δὲ μέσα εἶναι κατὰ πρῶτον μὲν λόγον τὰ ξυλάρια, τὰ ὁποῖα, ὅπως εἴδαμεν ἀνωτέρω, ἠμποροῦν νὰ εἶναι ἐν ἀνάγκῃ καὶ θεμελιῶδες ἐποπτικὸν μέσον τῆς τάξεως, πρέπει δὲ ἐν πάσῃ περιπτώσει νὰ χρησιμοποιοῦνται ὡς βοηθητικὸν μέσον τῆς ἐποπτείας, διότι καὶ εὐπόριστα εἶναι καὶ ἠμποροῦν νὰ λογαριάζωνται ὄχι μόνον ὡς ξυλάρια, ἀλλὰ καὶ ὡς σύμβολα διαφόρων ἄλλων πραγμάτων, διδομένων εἰς σχετικὰ προβλήματα, π. χ. δένδρων, στρατιωτῶν κ. τ. λ., ἔπειτα δὲ καὶ πυρεῖα μὲ κομμένας τὰς κεφαλάς, φασόλια, πίσα, νομίσματα ἀπὸ λεπτὸν χαρτόνιον, (τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ κατασκευάσουν καὶ μόνοι των οἱ μαθηταί), γραμμαὶ γραφόμεναι ἀπὸ τοὺς μαθητὰς εἰς τὰ ἀβάκια των κ.τ.λ. Ἐννοεῖται τώρα, ὅτι ἡ κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ νέου ἐπανάληψις ἢ συνεκτέλεσις τῶν ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς θὰ γίνεται τόσον εὐκολώτερα, ὅσον ὀλιγώτεροι θὰ εἶναι οἱ μαθηταί, διότι εἰς τὰς πολυπληθεῖς τάξεις καὶ ἡ σχετικὴ καθοδήγησις τῶν μαθητῶν καὶ ἡ ἐξέλεγξις τῆς ἐργασίας τοῦ καθενός των θὰ παρέχῃ πολλὰς δυσκολίας εἰς τὸν διδάσκαλον. Αἱ δυσκολίαι δὲ αὐταὶ φυσικὰ θὰ

ἐπαυξάνουν, ἂν τὰ μέσα τῆς ἐποπτείας δὲν εἶναι σταθερά, ὅπως εἶναι π.χ. τὸ ἀριθμητήριον μὲ τὰς σφαίρας εἰς τὸ σύρμα, ἀλλὰ ἐλεύθερα σώματα. Σχετικῶς εὐκολώτεραι ἀποβαίνουν αἱ ἐργασίαι τῶν μαθητῶν εἰς ὁποιασδήποτε σχετικὰς συνθήκας κατὰ τὸ διδακτικὸν στάδιον ***τῆς ἐφαρμογῆς*** τῆς διδαχθείσης καὶ γνωστῆς πλέον εἰς τοὺς μαθητὰς ἀριθμητικῆς ὕλης. Κατὰ τὸ στάδιον αὐτὸ θὰ ἠμποροῦν νὰ κατασκευάζουν καὶ νὰ παριστάνουν, ὅ,τι ἔμαθαν εἰς τὴν προηγηθεῖσαν διδασκαλίαν. Ἔτσι θὰ ἠμποροῦν νὰ παριστάνουν ἀριθμοὺς καὶ ἀριθμητικὰς πράξεις ἰχνογραφοῦντες ἢ πλάσσοντες μὲ τὸν πηλὸν ἢ κατασκευάζοντες μὲ χάρτην εἴτε τὰ μέσα τῆς ἐποπτείας εἴτε ἄλλα ἀντικείμενα. Θὰ ἠμποροῦν ἐπίσης νὰ παριστάνουν ἀριθμοὺς καὶ ἀριθμητικὰς πράξεις μὲ ἀντικείμενα κατασκευαζόμενα ἀπὸ ξυλάρια διαφόρων μεγεθῶν ἢ ἀπεικονιζόμενα μὲ σχηματογραφικὰ ἰχνογραφήματα· τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ θὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ποσὸν ξυλαρίων εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ γραμμῶν εἰς τὴν δεύτερην ἀντίστοιχον μὲ τὸν παριστανόμενον ἀριθμὸν ἢ δυνάμενον νὰ αἰσθητοποιήσῃ τὴν παριστανομένην πρᾶξιν. Ἀλλὰ καὶ μὲ καταλλήλους παιδιὰς θὰ ἠμποροῦν οἱ μικροὶ μαθηταὶ νὰ παριστάνουν ἀριθμοὺς καὶ ἀριθμητικὰς πράξεις. Ἐπίσης κατὰ τὸ στάδιον αὐτὸ θὰ ἠμποροῦν νὰ σχηματίζουν τοὺς ἀριθμοὺς 1—100 καὶ τὰς ἐπ' αὐτῶν ἀριθμ. πράξεις ἐπάνω εἰς τὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον εὔκολα ἠμπορεῖ νὰ προμηθευθῇ κάθε μαθητής, καθὼς καὶ μὲ νομίσματα πραγματικὰ ἢ συμβολικὰ διαφόρων τάξεων.

Ἀλλὰ καὶ εἰς ***τὴν ἀνωτέραν ἀρίθμησιν*** σκοπιμώτατον εἶναι νὰ ἐκτελοῦν οἱ ἴδιοι οἱ μαθηταί, ὁσάκις καὶ ἐφόσον εἶναι δυνατόν, ὅλας ἐκείνας τὰς ἐνεργείας τοῦ πραγματικοῦ βίου, ὅσαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑλικοῦ ἀπὸ τὸ πραγματικόν, ὁποῖαι εἶναι ἡ μέτρησις μηκῶν μὲ τὰς μονάδας τοῦ μήκους, ἐπιφανειῶν μὲ τὰς μονάδας τῆς ἐπιφανείας, ἡ στάθμησις βαρῶν μὲ τὰς μονάδας τοῦ βάρους, ἡ πληρωμὴ χρηματικῶν ποσῶν μὲ τὰς νομισματικὰς μονάδας ἢ μὲ σύμβολά των κ.τ.λ.].

Ἴδε καὶ τὰ ἀκόλουθα σχετικὰ ἔργα : *Fritz*, Einführung in das 1 Schuljahr, 1909. — *Gerlach*, Des Kindes erstes Rechenbuch, μὲ ἰχνογραφήματα, 99 σ., Leipzig, Quelle u. Meyer, 70 λ.—τοῦ ἰδίου, Schöne Rechenstunden, 229 σ. καὶ παφάρτημα μὲ 10 πίνακας, 4 ἔκδ., Leipzig, Quelle u. Meyer, 1919, 6,60 μ. καὶ δεμ. 8 μ.—*Göbelbecker*, Unterrichtspraxis im Sinne naturgemässer Reformbestrebungen für das Gesamtgebiet des 1 Schuljahres, Leipzig, Nemnich, 1904.—*Haase*, Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts, 3 ἔκδ., Langensalza, Beyer u. S., 1911, 2 μ.—*Kempinsky*, Der Rechenlehrer der Kleinen, 120 σ., 4/5 ἔκδ., Leipzig, Dürr, 1919, δεμ. 3,75 μ.—τοῦ ἴδιου, Ein frohes Rechenjahr, Sachaufgabe für das erste Schuljahr, Leipzig, Dürr, 2,25 μ., δεμ., 2,80 μ.—*König*, Selbsttätigkeit im ersten Rechenunterricht im Sinne der Arbeitsschule, 2 ἔκδ., Osterwieck, Zickfeldt, 1919 1,85 μ.—*Lang*, Fröhliches Rechnen, μὲ ἰχνογραφήματα, 128 σ., 2 ἔκδ., Würzburg, Kabitzsch, 1914, 2 μ., δεμ. 2,80 μ.—*Langermann*, Handelndes Rechnen, Berlin—Zehlendorf, Zimmerhaus, 1910, 2,40 μ. – *Lay*, Der Rechenunterricht auf experim.—pädag. Grundlage 1 Unterstufe, 3 ἔκδ., Leipzig, Quelle u. Meyer, 1914, 4 μ., δεμ. 4,80 μ.—*Sieverts*, Das 1 Schuljahr, Leipzig, Scheffer, 1905.—*Troll*, Das erste Schuljahr, 5 ἔκδ., Langensalza, Beyer u. S., 1917, δεμ. 6 μ.

XXV. Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΙΣ ΤΑ ΔΗΜΟΤΙΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ ΤΑ ΚΑΤΩΤΕΡΑ ΑΠΟ ΤΑ ΕΞΑΤΑΞΙΑ.

[Κανονικὴ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ εἰς ἐκεῖνα μόνον τὰ δημοτ. σχολεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν διδακτικὸν προσωπικὸν πλῆρες, ἤτοι ἔχουν τόσους διδασκάλους, ὅσα εἶναι καὶ τὰ σχολικὰ ἔτη, κατὰ τὰ ὁποῖα ἀπασχολοῦν τοὺς μαθητάς. Ἐφόσον δὲ τὸ δημοτ. μας σχολεῖον ἔχει 6 σχολικὰ ἔτη, τέτοια σχολεῖα εἶναι εἰς ἐμᾶς τὰ ἔχοντα 6 διδασκάλους, τὰ ὁποῖα καὶ ὀνομάζονται ***ἑξατάξια***. Ἠμπορεῖ δὲ μόνον εἰς αὐτὰ νὰ γίνῃ κανονικὴ ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς, διότι μόνον εἰς αὐτὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ ***τοῦ κάθε σχολικοῦ ἔτους*** νὰ διδάσκωνται τὴν Ἀριθμητικὴν ***χωριστά***, μόνοι των, ἐπὶ ***τρεῖς*** τοὐλάχιστον ὥρας τὴν ἑβδομάδα. Φυσικά, ὅταν γίνεται ἔτσι ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς, θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ τοῦ κάθε σχολικοῦ ἔτους νὰ προσλαμβάνουν ἄνετα ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς γνώσεις, ὅσαι εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς ἀντιληπτικάς των δυνάμεις. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἠμποροῦν ἐπίσης οἱ μαθηταὶ καὶ ὅλων μὲν τῶν τάξεων, ἰδίως ὅμως τῶν κατωτέρων καὶ τῶν μεσαίων νὰ καταγίνωνται ὅσον πρέπει εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν. Εἰς τὴν ἴδιαν περίπτωσιν, καὶ ὅταν ἀναθέτῃ ὁ διδάσκαλος εἰς τοὺς μαθητὰς νὰ κάμουν καὶ γραπτὰς ἐργασίας, θὰ ἠμπορῇ καὶ νὰ ἐξελέγχῃ, ἂν ὅλοι οἱ μαθηταὶ τὰς ἐκτελοῦν, ὅπως πρέπει, καὶ νὰ συμπληρώνῃ ἐν τῷ μεταξὺ διὰ τῆς προφορικῆς διδασκαλίας τὰς γνώσεις ἐκείνων τῶν μαθητῶν, ὅσοι δι᾽ ἀπουσίας ἢ δι᾽ ἄλλους λόγους ἔχουν ἐλλείψεις.

Διαφορετικὰ ὅμως κατ᾽ ἀνάγκην ἔχουν τὰ πράγματα, ὅπου οἱ διδάσκαλοι εἶναι ὀλιγώτεροι ἀπὸ τοὺς κανονικούς. Ἐκεῖ, καθὼς εἶναι γνωστόν, παρουσιάζεται πρῶτα ἡ ἀνάγκη νὰ διαθέτεται διὰ τὴν καθαυτό, τὴν ἄμεσην, τὴν προφορικὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν τῶν μαθητῶν μερικῶν ἢ καὶ ὅλων τῶν σχολικῶν ἐτῶν ***ὀλιγώτερος χρόνος ἀπὸ τὸν κανονικὸν καὶ ἀναγκαιοῦντα***, ἤτοι ἀντὶ τριῶν ὡρῶν τρία ἡμιώρια ἢ (, ὅπως συμβαίνει εἰς τὰ δημοτ. σχολεῖα τῶν 8 σχολ. ἐτῶν,) καὶ τρία τέταρτα τῆς ὥρας, ἐνῷ ὁ ὑπόλοιπος χρόνος ἀφιερώνεται εἰς σιωπηρὰς ἀριθμ. ἐνασχολήσεις τῶν μαθητῶν τῶν ἐτῶν αὐτῶν. Ἔτσι εἰς μὲν τὰ πεντατάξια δημοτ. σχολεῖά μας οἱ μαθηταὶ τοῦ πέμπτου καὶ τοῦ ἕκτου σχολικοῦ ἔτους διδάσκονται προφορικὰ τὴν Ἀριθμητικὴν ἐπὶ 3 ἡμιώρια τὴν ἑβδομάδα, εἰς δὲ τὰ τετρατάξια τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τοὺς μαθητὰς τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου σχολικοῦ ἔτους, εἰς δὲ τὰ τριτάξια καὶ διτάξια οἱ μαθηταὶ ὅλων τῶν σχολικῶν ἐτῶν διδάσκονται προφορικὰ τὴν Ἀριθμητικὴν ἀπὸ τρία ἡμιώρια τὴν ἑβδομάδα. Ὅτι τώρα ἡ συντόμευσις τοῦ χρόνου, ὁ ὁποῖος διαθέτεται διὰ τὴν ἄμεσην ἀριθμητ. διδασκαλίαν, δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἐπωφελὴς διὰ τὸν καταρτισμὸν τῶν μαθητῶν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἰδίως δὲ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, εἶναι φανερόν. Φανερὸν δὲ ἐπίσης εἶναι, ὅτι, ἐφόσον πρόκειται διὰ τὴν ἔλλειψιν ἐπαρκοῦς διδακτικοῦ προσωπικοῦ νὰ συντομευθῇ ὁ χρόνος τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας μερικῶν μόνον τάξεων, σκοπιμώτερον εἶναι νὰ συντομεύεται ὁ χρόνος τῆς διδασκαλίας τῶν ἀνωτέρων τάξεων καὶ ὄχι τῶν κατωτέρων, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν διότι οἱ μαθηταὶ τῶν κατωτέρων τάξεων ἔχουν ἐν γένει ἀνάγκην περισσοτέρας προφορικῆς διδασκαλίας, διότι ἔχουν καὶ κατωτέρας ἀντιληπτικὰς δυνάμεις, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ διότι εἰς τὰς τάξεις αὐτὰς διδάσκονται αἱ θεμελιώδεις ἀριθμητικαὶ γνώσεις, διὰ τὴν ἀσφαλῆ καὶ τελείαν πρόσληψιν τῶν ὁποίων χρειάζεται ἀρκετὸς χρόνος, τέλος δὲ διότι οἱ μαθηταὶ τῶν κατωτέρων τάξεων ἠμποροῦν καὶ ὀφείλουν νὰ ἀσχολοῦνται περισσότερον μὲ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖ περισσότερον χρόνον ἀπὸ τὴν γραπτήν, ἐνῷ οἱ μαθηταὶ τῶν ἀνωτέρων ἠμποροῦν καὶ ὀφείλουν νὰ καταγίνωνται περισσότερον εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν.

Ἀλλὰ ἡ ἔλλειψις ἐπαρκοῦς διδακτικοῦ προσωπικοῦ, ἐκτὸς τοῦ ὅτι συνεπάγεται τὴν συντόμευσιν τοῦ χρόνου, ὁ ὁποῖος διαθέτεται διὰ τὴν ἄμεσον ἀριθμ. διδασκαλίαν, ἠμπορεῖ, καθὼς εἶναι γνωστόν, νὰ ἐπιβάλῃ καὶ κάτι ἄλλο, ***νὰ συνενώνωνται*** δηλ. ***οἱ μαθηταὶ δύο διαδοχικῶν σχολικῶν ἐτῶν*** (ἐκτὸς τῶν δύο πρώτων) ***εἰς ἕνα τμῆμα,*** εἰς μίαν τάξιν ***καὶ νὰ συνδιδάσκωνται τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς.*** Αὐτὸ π.χ. συμβαίνει εἰς τὰ ἰδικά μας ***μονοτάξια*** δημ. σχολεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα συνδιδάσκονται τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς ἐπὶ 3 ἡμιώρια τὴν ἑβδομάδα ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν οἱ μαθηταὶ τῆς τρίτης καὶ τῆς τετάρτης τάξεως, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ οἱ μαθηταὶ τῆς πέμπτης καὶ τῆς ἕκτης. Ὅτι ὅμως ἡ διδασκαλία τῆς ἰδίας ὕλης εἰς μαθητὰς διαφόρων δυνάμεων δὲν εἶναι πλεονέκτημα, εἶναι ἀφ᾽ ἑαυτοῦ φανερόν.

Ἄλλο τέλος μειονέκτημα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν ἔλλειψιν ἐπαρκοῦς διδακτικοῦ προσωπικοῦ, εἶναι ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διδακτικῆς ὥρας τῆς Ἀριθμητικῆς, τὸ ὁποῖον δὲν διαθέτεται διὰ τὴν προφορικήν της διδασκαλίαν, ἀφιερώνεται εἰς ***σιωπηρὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας τῶν μαθητῶν.*** Ἀλλὰ αἱ ἐργασίαι αὐταί, ἐκτὸς τοῦ ὅτι ἡ ἀνάθεσις καὶ ἡ ἐξέλεγξίς των ἀναγκάζουν τὸν διδάσκαλον νὰ δαπανᾷ χρόνον καὶ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὴν καθαυτὸ διδασκαλίαν του, δὲν προάγουν συνήθως ἀπὸ ἀριθμητ. ἀπόψεως τοὺς ἐπιδιδομένους εἰς αὐτὰς μαθητάς, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν διότι συχνὰ δὲν συνδέονται ὀργανικὰ μὲ τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν καὶ δὲν δίδονται σύμφωνα μὲ σχέδιον ἀπὸ πρὶν καθωρισμένον, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ διότι ἐκτελοῦνται κατὰ μέγα μέρος χωρὶς τὴν συμμετοχὴν καὶ τὴν ἐπίβλεψιν τοῦ διδασκάλου, ὁ ὁποῖος ἀπασχολεῖται ἐν τῷ μεταξὺ μὲ τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν κάποιου ἄλλου τμήματος.

Διὰ νὰ γίνωνται ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγώτερον αἰσθητὰ ὅλα τὰ ἀνωτέρω μνημονευθέντα μειονεκτήματα, σκόπιμον εἶναι εἰς τὰ μὴ ἔχοντα ἐπαρκῆ ἀριθμὸν διδασκάλων σχολεῖα νὰ λαμβάνωνται ὡρισμένα μέτρα.

1) Ἔτσι διὰ νὰ προλαμβάνωνται τὰ κακὰ ἐπακολουθήματα, ὅσα προκύπτουν ἀπὸ τὴν συντόμευσιν τοῦ διδακτικοῦ χρόνου, πρέπει νὰ γίνωνται τὰ ἑξῆς:

α) Πρέπει εἰς κάθε τμῆμα τῆς προγραφομένης ἀριθμ. ὕλης νὰ παραλείπωνται ὅλαι ἐκεῖναι αἱ περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἀπαραίτηται διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ἀριθμητ. διαφέροντος τῶν παίδων καὶ δὲν ἔχουν μεγάλην χρησιμότητα διὰ τὸν συνήθη πρακτικὸν βίον (ἴδ. καὶ τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς ἁπλοποιήσεως τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας!).

β) Πρέπει ὁ διδάσκαλος νὰ χρησιμοποιῇ μέχρι τοῦ τελευταίου λεπτοῦ τὸν χρόνον, τὸν ὁποῖον διαθέτει διὰ τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν τῆς κάθε τάξεως. Δι᾽ αὐτὸ ὀφείλει νὰ ἀρχίζῃ μὲν τὴν διδασκαλίαν αὐτήν, εὐθὺς ἀφοῦ ἀναθέσῃ εἰς τὰς ἄλλας τάξεις τὰς σιωπηράς των ἐργασίας καὶ ἀρχίσουν οἱ μαθηταί των νὰ τὰς ἐκτελοῦν μὲ ἄκραν σιωπήν, νὰ μὴ παρασύρεται δὲ κατὰ τὴν διδασκαλίαν του εἰς πολλοὺς καὶ περιττοὺς λόγους, εἰς ἀσκόπους παρατηρήσεις κ.τ.λ., νὰ ἀφιερώνῃ δὲ αὐτὴν ἰδίως εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν, διότι καὶ ἡ ἔγγραφος ἐπασχόλησις τῶν μαθητῶν εἰς τὴν ἀρίθμησιν αὐτὴν καὶ ἡ καθαυτὸ γραπτὴ ἀρίθμησις θὰ γίνωνται κυρίως κατὰ τὸν χρόνον τῆς σιωπηρᾶς ἐπασχολήσεώς των.

γ) Πρέπει ἐπίσης ὁ διδάσκαλος νὰ συνηθίσῃ εἰς τὸ νὰ δίδῃ διαμιᾶς εἰς τοὺς διδασκομένους μαθητὰς ***σειρὰς ὁλοκλήρους*** ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων, τῶν ὁποίων ἄλλωστε ἡ λύσις συντελεῖ ἐντελῶς ἰδιαιτέρως εἰς τὴν ἐνίσχυσιν τῆς ἀριθμητικῆς μνήμης καὶ δυνάμεως τῶν μαθητῶν· τοιουτοτρόπως π. χ. ὁ διδάσκαλος προτείνει πρὸς λύσιν τὴν σειράν: «προσθέσατε εἰς τὸ 7 τὸ 7 δέκα φορὰς κατὰ σειράν!» ($7+7=14$, $+7=21$ κ. τ. λ.) ἢ τὴν σειρὰν «ἀφαιρέσατε ἀπὸ τὸ 70 τὸ 7 δέκα φορὰς κατὰ σειράν !», διὰ νὰ συγκρατῇ δὲ τὴν προσοχὴν ὅλων τῶν μαθητῶν, προκαλεῖ εἰς τὴν λύσιν τῆς κάθε σειρᾶς ὄχι ἕνα, ἀλλὰ περισσοτέρους μαθητάς, ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἀρχίζει ἐκεῖ, ὅπου διακόπτεται ὁ προηγούμενος. Σημειωτέον δὲ ἀκόμη, ὅτι ἡ εἰς τοὺς μαθητὰς ἀνάθεσις τῆς λύσεως ὁλοκλήρων σειρῶν ἀσκήσεων συντελεῖ εἰς τὴν ἐξοικονόμησιν ὄχι μόνον τοῦ χρόνου, ἀλλὰ καὶ τῶν δυνάμεων τοῦ ἴδιου τοῦ διδασκάλου ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 34)].

δ) Δὲν εἶναι ἐπίσης ἄσκοπον νὰ συνενώνωνται κάποτε οἱ μαθηταὶ δύο ἀλληλοδιαδόχων τάξεων καὶ νὰ γίνεται καὶ εἰς τὰς δύο κοινὴ διδασκαλία, κατὰ τὴν ὁποίαν φυσικὰ οἱ μαθηταὶ τῆς ἀνωτέρας τάξεως θὰ ἐπαναλαμβάνουν τὴν ὕλην τῆς κατωτέρας, εἴτε νέα διὰ τὴν τάξιν αὐτὴν θὰ εἶναι ἡ προκειμένη ὕλη εἴτε ἄσκησις ἐπάνω εἰς γνωστὴν ὕλην εἴτε καὶ ἐπανάληψις τέτοιας ὕλης. Καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην ἀπὸ τὰς περιπτώσεις αὐτὰς θὰ καλοῦνται οἱ μαθηταὶ τῆς ἀνωτέρας τάξεως νὰ βοηθοῦν μὲ τὰς γνώσεις των τὴν εἰσαγωγὴν τῶν μαθητῶν τῆς κατωτέρας εἰς τὴν νέαν πρᾶξιν, εἰς δὲ τὴν δευτέρην ἢ τὴν τρίτην ἢ θὰ δίδουν εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς κατωτέρας ἀσκήσεις καὶ προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν γνωστὴν καὶ εἰς αὐτοὺς ὕλην ἢ θὰ ἐξετάζωνται μαζί των ἀπὸ τὸν διδάσκαλον. Σκόπιμον δὲ εἶναι νὰ μὴ καλοῦνται συχνὰ εἰς συνδιδασκαλίαν καὶ αἱ δύο κατώταται τάξεις, διότι ἡ ἀνώτερη ἀπὸ αὐτὰς ὀλίγην συνήθως ὠφέλειαν θὰ ἠμπορῇ νὰ ἀποκομίσῃ ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῆς κατωτέρας. Φανερὸν δὲ εἶναι ἀκόμη, ὅτι δὲν πρέπει νὰ καλοῦνται εἰς συνδιδασκαλίαν περισσότεραι ἀπὸ δύο τάξεις, ἤτοι τρεῖς, διότι αἱ δυνάμεις τῶν μαθητῶν τῆς κατωτέρας καὶ τῆς ἀνωτέρας ἀπὸ τὰς τάξεις αὐτὰς εἶναι τόσον διαφορετικαί, ὥστε νὰ ἀποκλείεται ἡ καρποφόρος συνεργασία των. Ἐπίσης δὲ εἶναι ἄσκοπον νὰ προκαλοῦνται οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως ***νὰ ἀκροῶνται μόνον*** τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν ἄλλης ἀμέσως κατωτέρας ἢ ἀμέσως ἀνωτέρας, [διότι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἀκρόασις γνωστῶν κατὰ τὴν ἀντίληψίν των πραγμάτων δὲν θὰ κινῇ τὸ διαφέρον των, εἰς δὲ τὴν δευτέρην δὲν θὰ κατανοοῦν κατὰ μέγα μέρος τὰ διδασκόμενα καὶ θὰ παύσουν μετ᾽ ὀλίγον νὰ προσέχουν, καὶ εἰς τὰς δύο δὲ περιπτώσεις τὸ γεγονός, ὅτι δὲν θὰ συμμετέχουν ἐνεργητικὰ εἰς τὴν διδασκαλιαν, ἀλλὰ θὰ

ἔχουν ὅλως διόλου παθητικὴν θέσιν εἰς αὐτήν, θὰ συντελέσῃ ἐπίσης εἰς τὸ νὰ καταπνιγῇ ἐντὸς ὀλίγου τὸ διαφέρον των καὶ νὰ ἀποστραφῇ ἡ προσοχή των ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν.

ε) Δυνατὸν εἶναι τέλος νὰ ἀφιερώνῃ κάποτε ὁ διδάσκαλος διὰ τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν μιᾶς τάξεως καὶ ἕνα μέρος ἀπὸ τὸν χρόνον τὸν προωρισμένον διὰ τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν ἄλλης τάξεως, ἐφόσον ἡ τελευταία αὐτὴ τάξις δὲν ἔχει τόσην ἀνάγκην τῆς προφορικῆς διδασκαλίας, ὅσον ἡ πρώτη.

2) Διὰ νὰ προλαμβάνωνται τὰ δυσμενῆ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὴν κανονικὴν συνδιδασκαλίαν τῶν μαθητῶν δύο διαφόρων τάξεων, ἀπαραίτητον εἶναι ἡ εἰς αὐτοὺς διδασκομένη ὕλη νὰ ἐκλέγεται καὶ νὰ διατάσσεται ἔτσι, ὥστε νὰ μὴ εἶναι ἑκάστοτε μήτε ἀνώτερη ἀπὸ τὰς δυνάμεις τῆς κατωτέρας, μήτε κατώτερη ἀπὸ τὰς δυνάμεις τῆς ἀνωτέρας ἀπὸ τὰς συνδιδασκομένας τάξεις. Ἐπειδὴ ὅμως αὐτὸ δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολον, σκόπιμον εἶναι νὰ ἀποφεύγεται, ἐφόσον εἶναι δυνατόν, ἡ κανονικὴ συνδιδασκαλία δύο τάξεων. Ὡς πρὸς τὰ μονοτάξιά μας δημ. σχολεῖα π.χ. δὲν θὰ ἦτο δύσκολον νὰ περιορισθῇ ἡ συνδιδασκαλία μόνον εἰς τὴν πέμπτην καὶ ἕκτην τάξιν, ἡ δὲ τρίτη καὶ τετάρτη νὰ διδάσκωνται χωριστά, ἤτοι νὰ ὑπάρχουν εἰς τὰ σχολεῖα αὐτὰ 5 ἰδιαίτερα τμήματα τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας.

3) Διὰ νὰ ἠμποροῦν τέλος αἱ σιωπηραὶ ἀριθμητικαὶ ἐπασχολήσεις νὰ προάγουν μὲν τοὺς μαθητὰς ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως, νὰ μὴ ἀφαιροῦν δὲ πολὺν χρόνον καὶ δυνάμεις ἀπὸ τὸν διδάσκαλον, πρέπει νὰ γίνωνται τὰ ἀκόλουθα :

α) Ἀπαραίτητον εἶναι αἱ ἐπασχολήσεις αὐταὶ νὰ συνδέωνται ὀργανικὰ μὲ τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν καὶ νὰ παρουσιάζωνται ὡς μέρος της· πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει ὁ διδάσκαλος νὰ ἀντιλαμβάνεται τὴν προφορικήν του διδασκαλίαν ὡς ***προπαρασκευὴν*** τῶν σιωπηρῶν ἐγγράφων ἀσκήσεων τῶν μαθητῶν καὶ νὰ τὰς καταρτίζῃ ἀπὸ πρὶν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διδασκαλίας του αὐτῆς, διὰ νὰ ἠμποροῦν ἔτσι καὶ οἱ μαθηταὶ νὰ τὰς ἀντιλαμβάνωνται καθαρὰ ὡς συνέχειαν καὶ ἐφαρμογήν της (ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 33).

β) Πρέπει αἱ ἀναθετόμεναι σιωπηραὶ ἐργασίαι νὰ εἶναι ὡς πρὸς μὲν τὸ ποσὸν τόσαι, ὥστε νὰ ἐπασχολοῦν τοὺς μαθητὰς καθ' ὅλον τὸν προωρισμένον δι' αὐτὰς χρόνον, κατὰ δὲ τὸ ποιὸν τέτοιαι, ὥστε ἡ ἀνάθεσίς των νὰ μὴ ἀπασχολῇ πολὺ τὸν διδάσκαλον (σειραὶ ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων!), προσέτι δὲ νὰ μὴ ἀπαιτοῦν ξένην βοήθειαν καὶ νὰ μὴ προκαλοῦν ἐρωτήσεις τῶν ἐπασχολουμένων μαθητῶν πρὸς τὸν διδάσκαλον, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ἀπασχολῆται ἀνενόχλητα μὲ τοὺς μαθητὰς τῆς τάξεως, τὴν ὁποίαν διδάσκει προφορικά]. Ἐφόσον μερικοὶ μαθηταὶ ἀποπερατώνουν τὰς ἀνατεθείσας ἐργασίας πρὸ τῆς λήξεως τοῦ προσδιωρισμένου δι' αὐτὰς χρόνου, ἢ μετέχουν τῆς προφορικῆς διδασκαλίας, τὴν ὁποίαν κάμνει ὁ διδάσκαλος εἰς τὴν ἄλλην τάξιν, ἤ, ἂν δὲν εἶναι τοῦτο σκόπιμον, σχηματίζουν μόνοι των νέας ἀσκήσεις συγγενεῖς μὲ τὰς ἀνατεθείσας ἀπὸ τὸν διδάσκαλον καὶ τὰς λύουν ἐγγράφως. Ἐφόσον δὲ οἱ ἐπασχολούμενοι σιωπηρῶς μαθηταὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ λύσουν μόνοι των καμίαν ἀπὸ τὰς ἀσκήσεις, ἃς ἠξεύρουν, ὅτι, ἀντὶ νὰ ἐνοχλοῦν τὸν διδάσκαλον μὲ ἐρωτήσεις, ἠμποροῦν νὰ ἀφήνουν τὴν ἄσκησιν αὐτὴν καὶ νὰ προχωροῦν εἰς τὰς ἀκολούθους.

[γ) Πρέπει ἐξ ἄλλου οἱ μαθηταί, ἐφόσον γνωρίζουν νὰ ἀναγινώσκουν, ἤτοι ἀπὸ τὸ δεύτερον ἀκόμη σχολικὸν ἔτος, νὰ κάμνουν χρῆσιν καλῆς ***συλλογῆς ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων***, ἀπὸ τὴν ὁποίαν θὰ ὁρίζῃ ἑκάστοτε εἰς αὐτοὺς ὁ διδάσκαλος τὰς ἐργασίας, τὰς ὁποίας θὰ πρέπῃ νὰ ἐκτελέσουν σιωπηρῶς.

δ) Πρέπει ἐπίσης ὁ διδάσκαλος, μολονότι θὰ ἀσχολῆται μὲ τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν ἄλλης τάξεως, νὰ κυριαρχῇ μὲ τὸ βλέμμα του ἐπάνω εἰς ὅλους τοὺς ἐπασχολουμένους μαθητάς, οἱ ὁποῖοι, αἰσθανόμενοι τὴν ἐπίβλεψιν τοῦ διδασκάλου, θὰ ἐπιδίδωνται ἥσυχα εἰς τὸ ἔργον των.

ε) Πρέπει ἀκόμη ὁ διδάσκαλος νὰ μὴ δαπανᾷ πολὺν χρόνον εἰς τὴν ἐξέλεγξιν τῶν σιωπηρῶς ἐκτελεσθεισῶν ἐργασιῶν. Δι' αὐτὸ καλὸν εἶναι νὰ συνηθίζουν οἱ μαθηταὶ νὰ ἀναγράφουν χωριστὰ κάθε ἄσκησιν ἢ σειράν, νὰ καταγράφουν δὲ εὐσύνοπτα τὸν τρόπον τῆς λύσεώς της καὶ νὰ ὑπογραμμίζουν μὲ διπλῆν γραμμὴν τὰ ἐξαγόμενα. Προκαλούμενοι ἀπὸ τὸν διδάσκαλον ὀφείλουν νὰ λέγουν ἀμέσως τὸ ἐξαγόμενον κάθε ἀσκήσεως ἢ νὰ προβάλλουν τὰ ἀβάκια ἢ τὰ τετράδιά των, διὰ νὰ ῥίπτῃ ὁ διδάσκαλος γρήγορα βλέμμα εἰς αὐτά. (Ἴδ. Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 34).

ς) Ἠμπορεῖ τέλος ὁ διδάσκαλος, καὶ μάλιστα τοῦ μονοταξίου σχολείου, νὰ μορφώνῃ ἀπὸ τοὺς ἴδιους τοὺς μαθητὰς καταλλήλους ***βοηθοὺς*** καὶ νὰ τοὺς χρησιμοποιῇ διὰ τὴν ἐπίβλεψιν τῶν σιωπηρῶς ἐπασχολουμένων τάξεων. Οἱ βοηθοὶ εἰς κάθε τάξιν θὰ λαμβάνωνται ἀπὸ τοὺς ἱκανωτέρους καὶ ἐκ φύσεως διὰ τὸ ἔργον αὐτὸ δεξιωτέρους μαθητὰς σπανιώτερα μὲν τῆς ἰδίας τάξεως, συνηθέστατα δὲ τῶν ἀνωτέρων τάξεων. Διὰ νὰ μὴ παραβλάπτεται δὲ ἡ πρόοδός των, θὰ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ ἔργον τοῦ βοηθοῦ ὄχι περισσότερον ἀπὸ ἕνα ἡμιώριον καὶ μάλιστα εἰς χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ τάξις των δὲν θὰ διδάσκεται ἀμέσως ἀπὸ τὸν διδάσκαλον. Οἱ βοηθοὶ θὰ ἐπιβλέπουν τὴν ἐξωτερικὴν τάξιν τοῦ ἐπιτηρουμένου τμήματος, θὰ λύουν τὰς ἀπορίας τῶν ἐπασχολουμένων μαθητῶν, θὰ ἐξελέγχουν καὶ θὰ διορθώνουν τὰς γενομένας ἐργασίας καὶ θὰ ἀσκοῦν καὶ προφορικὰ τοὺς ἀσθενεστέρους ἀπὸ τοὺς ἐπιτηρουμένους μαθητάς. Ὁ διδάσκαλος φυσικὰ θὰ φροντίζῃ νὰ μὴ ἐπέρχεται πουθενὰ καμία σύγχυσις καὶ νὰ μὴ ἀναπτύσσωνται εἰς τοὺς βοηθοὺς τὰ ἐλαττώματα τῆς ψευδομαρτυρίας, τῆς ἰταμότητος, τοῦ τύφου κ.τ.λ. Διὰ νὰ μὴ παρενοχλῆται δὲ ὁ διδάσκαλος κατὰ τὴν προφορικήν του διδασκαλίαν ἀπὸ τὸ ἔργον τῶν βοηθῶν, πρέπει νὰ ὁμιλοῦν οἱ βοηθοὶ μὲ χαμηλὴν τὴν φωνὴν καὶ νὰ ἐργάζωνται εἰς ἀρκετὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν διδάσκαλον. Ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 34 κ. ἀκ.].

Ἐν τούτοις ἐναντίον τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν βοηθῶν, ἰδίως δὲ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν, τάσσονται ἀρκετοὶ Μεθοδικοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μνημονευθοῦν ἰδίως ὁ *Steuer* καὶ οἱ *Elsner* καὶ *Sendler*. Ἔτσι ὁ Steuer παρατηρεῖ τὰ ἑξῆς (Methodik des Rechenunterrichts, σ. 160 κ. ἀκ.): «Δὲν ἀποδίδω καμίαν ἀξίαν εἰς τοὺς βοηθούς, τοὐλάχιστον διὰ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν. Κατὰ τὴν γνώμην μου ὄχι μόνον δὲν ὠφελοῦν, ἀλλὰ καὶ βλάπτουν. Τὸ ὀλιγώτερον, τὸ ὁποῖον θὰ ἔπρεπε νὰ ἀναθέσῃ κανεὶς εἰς ἕνα βοηθόν, θὰ ἦτο νὰ πηγαίνῃ ἀπὸ τὸν ἕνα μαθητὴν εἰς τὸν ἄλλον καὶ νὰ ὑπογραμμίζῃ σιωπηλὰ τὰ σφάλματα τοῦ καθενὸς ἢ νὰ διαγράφῃ τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν λυθῇ ἐσφαλμένα. Ἀλλὰ καὶ ἂν ἀκόμη βαδίζῃ ἐπάνω εἰς τὰ δάκτυλα καὶ ἂν κρατῇ τὸ στόμα του κλειστόν, πάντα δὲν θὰ ταράσσῃ τὴν ἡσυχίαν; Τί δὲ θὰ συμβαίνῃ, ἂν θελήσῃ νὰ κάμῃ καὶ ὑποδείξεις καὶ διδαχάς; . . . Ἄλλωστε ποία ὠφέλεια θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν ὑπογράμμισιν τῶν λαθῶν ἢ τὴν διαγραφὴν τῶν ἐσφαλμένων; Ἢ ὁ σφαλεὶς μαθητὴς εἶναι εἰς θέσιν νὰ λύσῃ τὰ σχετικὰ προβλήματα ἢ δὲν εἶναι. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ὑπογράμμισις καὶ ἡ διαγραφὴ σκοποῦν νὰ ἐξαναγκάσουν τὸν μαθητὴν νὰ ἐπαναλάβῃ τὴν λύσιν τοῦ προκειμένου προβλήματος. Ἀλλ' ἀπὸ μὲν τὴν ἄποψιν τῆς ἀσκήσεως τοῦ μαθητοῦ εἶναι ὅλως διόλου ἀδιάφορον, ἂν ἐπαναλάβῃ τὸ ἴδιον πρόβλημα ἢ προχωρήσῃ εἰς τὴν λύσιν ἄλλου, ἀπὸ δὲ τὴν ἄποψιν τῆς ἐξακριβώσεως τῆς ὀρθότητος τῶν ἐξαγομένων θὰ βεβαιωθοῦν ὡς πρὸς αὐτὴν καὶ ὁ διδάσκαλος καὶ ὁ μαθητὴς γρηγορώτατα καὶ εὐκολώτατα μὲ τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἐξέλεγξιν τοῦ διδασκάλου. Ἂν δὲ ἀπεναντίας ὁ σφαλεὶς μαθητὴς δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ λύσῃ τὸ σχετικὸν πρόβλημα, θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ διδαχθῇ τὸν τρόπον τῆς λύσεώς του. Ἀλλὰ καὶ ἂν δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν θόρυβον, ὁ ὁποῖος θὰ προκληθῇ ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τοῦ βοηθοῦ, ἠμποροῦμεν πράγματι νὰ περιμένωμεν, ὅτι θὰ εἶναι αὐτὸς εἰς θέσιν νὰ κάμῃ μίαν τέτοιαν διδασκαλίαν; Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διδασκαλία αὐτὴ πρέπει νὰ γίνῃ ἀπὸ τὸν διδάσκαλον εἰς ὅλην τὴν τάξιν εἴτε κατὰ τὴν ἴδιαν διδακτικὴν ὥραν εἴτε κατὰ τὴν προσεχῆ. Ἄλλωστε γεννᾶται καὶ τὸ ζήτημα, πῶς θὰ ἠμπορῇ ἕνας μαθητής, ὅπως ὁ βοηθός, νὰ ἐξακριβώνῃ γρήγορα, ἂν τὰ προβλήματα ἔχουν λυθῆ ὀρθὰ ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Μήπως θὰ περιέρχεται τοὺς μαθητὰς ἔχων ἀνὰ χεῖρας τὸ τεῦχος τῶν λύσεων; Ἂν ὄχι, πόσα προβλήματα θὰ προφθάνῃ νὰ ἐπιθεωρῇ καὶ νὰ διορθώνῃ κατὰ τὸν χρόνον τῆς ἐπιβλέψεώς του;». Ἐπίσης δὲ καὶ οἱ Elsner καὶ Sendler (Der Rechenunterricht, σ. 26) εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι, διὰ νὰ ἀποφεύγεται ὁ θόρυβος, τὸν ὁποῖον προκαλοῦν οἱ βοηθοί, καλὸν εἶναι νὰ χρησιμοποιοῦνται ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸν διδάσκαλον.

Ἡμεῖς φρονοῦμεν, ὅτι τὸ ζήτημα τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν βοηθῶν δὲν πρέπει νὰ λυθῇ κατ' ἀρχήν, ὅτι δὲ ἡ λύσις του ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς συνθήκας, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται ἑκάστοτε εἰς κάθε σχολεῖον. Ἐφόσον ἕνας διδάσκαλος ἔχει δεξιοὺς καὶ ἀξίους ἐμπιστοσύνης βοηθοὺς καὶ ὑποδεικνύει εἰς αὐτοὺς κατὰ τὸν ἐλεύθερον χρόνον του λεπτομερῶς τὰ καθήκοντά των, προφανῶς ἠμπορεῖ νὰ τοὺς χρησιμοποιῇ ἐπωφελέστατα.

XXVI. Η ΕΚΛΟΓΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΕΑΣ ΥΛΗΣ.

[Ἀφοῦ ὁ κύριος σκοπὸς τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας εἶναι νὰ ἀναπτύξῃ τὸ διαφέρον τῶν μαθητῶν πρὸς τὴν γνῶσιν τῆς ἀριθμήσεως, ἡ δὲ ἀρίθμησις πάλιν συνίσταται εἰς τὸν σχηματισμὸν νέων ὡρισμένων ἀριθμῶν ἀπὸ δοθέντας, φανερὸν εἶναι, ὅτι αἱ ἀριθμητικαὶ ὗλαι, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ διδαχθοῦν, διὰ νὰ πληρωθῇ ὁ σκοπὸς αὐτός, θὰ εἶναι αἱ ἑξῆς: α) αὐτὰ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀριθμήσεως, ἤτοι ***οἱ ὡρισμένοι ἀριθμοί***, τῶν ὁποίων σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας πρέπει νὰ ἀποκτήσουν οἱ μαθηταί, καὶ β) τὸ ἔργον τῆς ἀριθμήσεως, ἤτοι ***ὁ σχηματισμὸς νέων ὡρισμένων ἀριθμῶν ἀπὸ δοθέντας καὶ οἱ διέποντες τὸν σχηματισμὸν αὐτὸν κανόνες.***

Ἂς ἴδωμεν τώρα, ποῖαι εἶναι αἱ ὗλαι αὐταὶ εἰς τὰ καθ' ἕκαστον.

Οἱ ***ὡρισμένοι ἀριθμοί***, τῶν ὁποίων σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας πρόκειται νὰ σχηματίσουν οἱ μαθηταί, εἶναι, καθὼς εἶναι γνωστόν, :

α) ***ἀκέραιοι*** καὶ

β) ***κλάσματα***,

τὰ δὲ κλάσματα πάλιν εἶναι:

α) ***κοινὰ*** καὶ

β) ***δεκαδικά.***

Ὅλοι οἱ ὡρισμένοι αὐτοὶ ἀριθμοὶ ἠμποροῦν ἐξ ἄλλου νὰ εἶναι, καθὼς εἶναι γνωστόν, 1) ***ἀφῃρημένοι*** καὶ 2) ***συγκεκριμένοι***, οἱ δὲ συγκεκριμένοι ἠμποροῦν πάλιν νὰ εἶναι α) ***ἁπλοῖ*** καὶ β) ***συμμιγεῖς.***

Ἐπειδὴ τώρα οἱ συγκεκριμένοι συμμιγεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται κατὰ κανόνα ἀπὸ ἀκεραίους, τὰ εἴδη τῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ διδαχθοῦν οἱ μαθηταί, εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

α) οἱ ἀφῃρημένοι καὶ ἁπλοῖ συγκεκριμένοι ἀκέραιοι, ἤτοι συντομώτερα ***οἱ ἀκέραιοι***,

β) οἱ συμμιγεῖς ἀκέραιοι, ἤτοι συντομώτερα ***οἱ συμμιγεῖς***,

γ) τὰ ἀφῃρημένα καὶ ἁπλᾶ συγκεκριμένα κοινὰ κλάσματα, ἤτοι συντομώτερα ***τὰ κοινὰ κλάσματα*** καὶ

δ) τὰ ἀφῃρημένα καὶ ἁπλᾶ συγκεκριμένα δεκαδικὰ κλάσματα, ἤτοι συντομώτερα ***τὰ δεκαδικὰ κλάσματα***.

Μὲ ὁποιονδήποτε ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω εἴδη τῶν ἀριθμῶν καὶ ἂν ἀσχολοῦνται οἱ μαθηταί, πρέπει προφανῶς νὰ σχηματίσουν σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ὑπάγονται εἰς αὐτό. Πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ αὐτὸν φυσικὰ πρέπει νὰ διδαχθοῦν καὶ νὰ γνωρίσουν καὶ τὸ περιεχόμενον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ τὰ ὀνόματα, μὲ τὰ ὁποῖα παριστάνονται προφορικῶς, καὶ τὰ σημεῖα ἢ ψηφία, μὲ τὰ ὁποῖα παριστάνονται ἐγγράφως.

Ὡς πρὸς ***τοὺς ἀκεραίους*** ἀριθμοὺς ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, μολονότι καὶ οἱ μαθηταὶ τῶν κατωτέρων σχολείων θὰ πρέπῃ νὰ εἰσαχθοῦν εἰς τὴν κατανόησιν ὁλοκλήρου τοῦ μηχανισμοῦ τοῦ ἰσχύοντος δεκαδικοῦ συστήματος, ἐν τούτοις ἀρκεῖ δι᾽ αὐτοὺς νὰ κατέχουν ἀρτίως καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τοῦ περιεχομένου καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς ἀπαγγελίας καὶ τῆς γραφῆς τοὺς μέχρι τῶν ἑκατομμυρίων ἀριθμούς, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν διότι ἡ ἀρτία κατοχὴ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἐγγυᾶται τὴν εὐχερῆ ἀντίληψιν καὶ τῶν ἀνωτέρων των, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ διότι καὶ ἡ προφορικὴ καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις, ἡ ἀπαιτουμένη καὶ εἰς τὰ ἄλλα πραγματικὰ μαθήματα καὶ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, δὲν κινεῖται συνήθως πέραν τῶν ἑκατομμυρίων.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ἑξῆς ἐπίσης πρέπει νὰ παρατηρηθῇ ὡς πρὸς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἕως τὸ τέλος περίπου τοῦ 18 αἰῶνος ἐπιστεύετο, ὅτι, διὰ νὰ σχηματίσουν οἱ μαθηταὶ σαφεῖς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ἀρκετὸν ἦτο νὰ προτάσσεται μία σύντομη διδασκαλία τῆς ἀπαγγελίας καὶ τῆς γραφῆς ὅλων τῶν ἀκεραίων. Τὴν διδασκαλίαν αὐτήν, μὲ τὴν ὁποίαν ἐπίστευαν, ὅτι εἶχε ἐξασφαλισθῆ ὁ σχηματισμὸς σαφῶν ἐννοιῶν ὅλων τῶν ἀκεραίων, ἀκολουθοῦσε ἡ διαδοχικὴ διδασκαλία τῶν 4 πράξεων τῆς ἀριθμήσεως, ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐδιδάσκετο φυσικὰ ἐπάνω εἰς ὅλους τοὺς ἀκεραίους. Ἀπὸ τὸν χρόνον ὅμως αὐτὸν ἄρχισε νὰ

κατανοῆται μὲν ὁλονὲν περισσότερον, ὅτι μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς διδασκαλίας δὲν κατωρθώνετο ὁ ἐπιδιωκόμενος σκοπός, νὰ ἐπικρατῇ δὲ ἡ γνώμη, ὅτι οἱ μαθηταὶ θὰ ἠμποροῦν νὰ σχηματίζουν σαφῆ καὶ εὐκρινῆ τὴν ἔννοιαν τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους, ἂν ἡ ἀτελείωτη σειρά των δὲν διδάσκεται εἰς αὐτοὺς ὅλη ***διαμιᾶς***, ἀλλὰ τμηματικῶς, κατὰ ***μικροτέρας σειράς***, αἱ ὁποῖαι θὰ ἐμφανίζωνται διαδοχικὰ εἰς τὰ πρῶτα σχολικὰ ἔτη, καὶ ἂν εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς σειρὰς αὐτὰς διδάσκωνται ἰδιαιτέρως αἱ 4 πράξεις τῆς ἀριθμήσεως, αἱ ὁποῖαι ἄλλωστε θὰ κατανοοῦνται καλύτερα ἀπὸ τοὺς μαθητάς, ἂν διδαχθοῦν ἰδιαιτέρως ἐπάνω εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς μικροτέρας ἀριθμητικὰς σειρὰς παρὰ ἂν διδαχθοῦν ἐπάνω εἰς ὅλους τοὺς ἀκεραίους μαζί.

Σήμερα φυσικὰ δὲν ὑπάρχει Παιδαγωγικός, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ παραδέχεται τὴν τελευταίαν αὐτὴν γνώμην. Ἐν τούτοις δὲν κρατεῖ ἀκόμη ὁμοφωνία ὡς πρὸς τὰ ὅρια, ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν τῆς κάθε μερικωτέρας σειρᾶς, ἰδίως δὲ ὡς πρὸς τὰ ὅρια τῆς πρώτης, ἀπὸ τὴν ὁποίαν κυρίως ῥυθμίζονται καὶ αἱ ἄλλαι].

Τοιουτοτρόπως οἱ Knilling, Wilk, Wolfrum, Breier καὶ Knup εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἡ πρώτη σειρὰ πρέπει νὰ ἀποτελεσθῇ ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—5. Ὁ τελευταῖος δὲ ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς αὐτοὺς εἶναι καὶ ἐφευρέτης ἑνὸς ἀριθμητηρίου μὲ σφαίρας, τὸ ὁποῖον βασίζεται ἐπάνω εἰς τὸ πενταδικὸν σύστημα τῆς ἀριθμήσεως.

Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 σχηματίζουν τὴν πρώτην σειρὰν ἐκτὸς ἄλλων οἱ Grube, Brautigam, Ziller, Rein καὶ Pickel, Hartmann, [Räther, καθὼς καὶ οἱ θιασῶται τῆς ἀποκλειστικῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐργασίας καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν].

Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—20 σχηματίζουν τὴν ἴδιαν σειρὰν οἱ Hentschel, Steuer, Magnus καὶ ἄλλοι, ἐνῷ ὁ Kaselitz τὴν σχηματίζει ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—100.

[Ἀλλὰ ἡ ὀρθὴ διάρθρωσις τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων εἰς μικροτέρας σειρὰς ἔχει δοθῆ ἀπὸ αὐτὴν τὴν φύσιν τῆς δεκαδικῆς διατάξεώς της, κατὰ τὴν ὁποίαν 10 μονάδες ἀποτελοῦν μίαν μονάδα ἀνωτέρας τάξεως, τὴν δεκάδα, 10 δεκάδες ἀποτελοῦν μίαν μονάδα ἀκόμη ἀνωτέρας τάξεως, τὴν ἑκατοντάδα, 10 ἑκατοντάδες ἀποτελοῦν νέαν μονάδα ἀκόμη ἀνωτέρας τάξεως, τὴν χιλιάδα κ.τ.λ., ἤτοι ἀπὸ 10 μονάδες μιᾶς τάξεως κάμνουν 1 ἀνωτέραν μονάδα. Σύμφωνα μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν μόνον οἱ 10 πρῶτοι ἀριθμοὶ παρουσιάζονται ὡς σχετικῶς ἁπλοῖ καὶ αὐτοτελεῖς, ὡς σχετικῶς ἀνεξάρτητα ἄτομα, κάθε δὲ ἀριθμὸς ἀνώτερός των ἀναφέρεται εἰς τὴν μονάδα τῆς τάξεώς του καὶ σχηματίζεται μὲ σύνθεσιν ἀπὸ αὐτὴν καὶ τοὺς κατωτέρους της ἀριθμούς. Ἡ φύσις λοιπὸν τῆς δεκαδικῆς διατάξεως τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων προϋποθέτει καὶ ἀπαιτεῖ τὴν διάρθρωσιν εἰς τὰς σειρὰς 1—10, 11—100, 101—1000 κτλ., μὲ τὴν ὁποίαν ὄχι μόνον διευκολύνονται οἱ παῖδες εἰς τὴν ἐπισκόπησιν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ἀλλὰ καὶ κατορθώνουν νὰ σχηματίζουν κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῆ καὶ εὐκρινῆ τὴν ἔννοιαν τοῦ καθενός των.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς ***τοὺς συμμιγεῖς*** ἀριθμοὺς ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, καθὼς εἶναι γνωστόν, εἶναι διαφόρων εἰδῶν ἀναλόγων μὲ τὰς ποιότητας, εἰς τὰς ὁποίας ἀναφέρονται αἱ μονάδες των. Ἀλλὰ καὶ οἱ συμμιγεῖς ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ εἴδους ἠμποροῦν νὰ εἶναι διάφοροι, διότι αἱ μονάδες μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποιότητος ἠμπορεῖ νὰ εἶναι διαφορετικαί. Ἀπὸ τὰς μονάδας τώρα τοῦ κάθε εἴδους τῶν συμμιγῶν πρέπει νὰ ἐκλέγωνται διὰ τὴν διδασκαλίαν ἐκεῖναι μόνον, ὅσαι ἔχουν ἀναγνωρισθῆ ἐπισήμως εἰς τὴν πατρίδα μας, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι μόνον αὐταὶ ἠμποροῦν νὰ κινήσουν τὸ διαφέρον τῶν μαθητῶν, οἱ ὁποῖοι δυνατὸν εἶναι νὰ ἔχουν σχετικὰς μὲ αὐτὰς παραστάσεις ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν των καὶ ἠμποροῦν ἄλλωστε νὰ τὰς μάθουν στηριζόμενοι εἰς τὴν ἐποπτείαν, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι μόνον ἡ διδασκαλία τῶν μονάδων αὐτῶν προπαρασκευάζει τοὺς παῖδας διὰ τὰς ἀνάγκας καὶ τοῦ πρακτικοῦ καὶ τοῦ ἄλλου βίου. Μονάδες παλαιωμέναι καὶ εὑρισκόμεναι πλέον εἰς ἀχρηστίαν δὲν πρέπει νὰ διδάσκωνται εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα. Ἐὰν εἰς ὡρισμένα μέρη τῆς πατρίδος εὐχρηστοῦν διαφορετικαὶ παρὰ εἰς τὰ ἄλλα μονάδες δι' ὡρισμένα εἴδη συμμιγῶν, φυσικὰ εἰς τὰ μέρη αὐτὰ θὰ διδάσκωνται αἱ εὐχρηστοῦσαι. Ἐὰν εἰς μερικὰ μέρη (καθὼς εἰς τὰ σύνορα, εἰς τοὺς ἐμπορικοὺς λιμένας κτλ.) γίνεται χρῆσις ἐκτὸς ἐγχωρίων καὶ ξένων μονάδων δι' ὡρισμένον εἶδος συμμιγῶν, κατ' ἀνάγκην θὰ διδάσκωνται εἰς αὐτὰ καὶ αἱ ξέναι μονάδες.

Ὡς πρὸς ***τὰ κοινὰ κλάσματα*** πρέπει νὰ παρατηρηθῆ, ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ κλάσματος εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα περιττὸν εἶναι νὰ βασισθῆ εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς ἀδιαιρέτου ἀρχικῆς μονάδος, ἡ ὁποία δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀντιληπτὴ ἀπὸ τοὺς μαθητὰς τῶν σχολείων αὐτῶν, διὰ τοὺς ὁποίους ἀρκεῖ ἡ ἀντίληψις, ὅτι ἡ μονὰς εἶναι ἕνα συγκεκριμένον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ μερισθῆ. Ἐπίσης πρέπει νὰ ἀποφεύγωνται κλάσματα μὲ μεγάλους καὶ ἀσυνήθεις παρονομαστάς, διότι ἡ διδασκαλία των οὔτε τὸ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν διαφέρον προάγει οὔτε εἰς τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου προπαρασκευάζει. Διὰ τοὺς σκοποὺς αὐτοὺς ἀρκεῖ ἡ διδασκαλία κλασμάτων μὲ παρονομαστὰς τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ὑποδιαιρέσεων τῶν συμμιγῶν 12, 24, 30, 44, 60, 100, 1000, τὰ ποσοστὰ τῶν ἀριθμῶν 100 καὶ 1000 (π. χ. τοὺς ἀριθμ. 20, 25, 50, 40) καὶ τὰς δυνάμεις τοῦ 2 (ἤτοι τοὺς ἀριθμ. 4, 8, 16, 32).

Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὰ ***δεκαδικὰ κλάσματα***, πρέπει νὰ σημειωθῆ, ὅτι εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα εἶναι ὅλως διόλου περιττὴ ἡ διδασκαλία τέτοιων κλασμάτων μὲ δεκαδικὰ ψηφία περισσότερα ἀπὸ 4, διότι μὲ αὐτὴν οὔτε τὸ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν διαφέρον τῶν μαθητῶν ἐνισχύεται, οὔτε αἱ ἀριθμητικαὶ ἀνάγκαι τοῦ πρακτικοῦ βίου ἐξυπηρετοῦνται.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην, ἡ ὁποία ἀφορᾷ αὐτὸ τὸ ἔργον τῆς ἀριθμήσεως, ἤτοι τὸν σχηματισμὸν νέων ὡρισμένων ἀριθμῶν ἀπὸ δοθέντας, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ὕλη αὐτὴ συνίσταται εἰς ***τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις***, αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπάνω εἰς τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ μνημονευθέντα εἴδη τῶν ἀριθμῶν. Αἱ κυριώτεραι δὲ ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις εἶναι ***αἱ 4 θεμελιώδεις***, ἤτοι ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις (μὲ τὰς 2 της μορφάς, ἤτοι τὴν μορφὴν τοῦ μερισμοῦ καὶ τὴν μορφὴν τῆς μετρήσεως). Τὸ κύριον χαρακτηριστικὸν καὶ τῶν 4 θεμελιωδῶν πράξεων εἶναι, ὅτι οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται μὲ αὐτάς, ἔχουν τιμὴν διαφορετικὴν ἀπὸ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς δοθέντας. Ἡ κάθε θεμελιώδης πρᾶξις ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελῆται εἴτε μόνη εἴτε μαζὶ μὲ ἄλλην ἢ ἄλλας θεμελιώδεις. Ἐκτὸς τῶν θεμελιωδῶν πράξεων ὑπάρχουν καὶ μερικαὶ ἄλλαι ***δευτερεύουσαι***, αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν θεμελιωδῶν καὶ ἔχουν τὸ κοινὸν χαρακτηριστικόν, ὅτι οἱ νέοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται μὲ αὐτάς, εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ τοὺς δοθέντας. Αἱ δευτερεύουσαι πράξεις δὲν ἐκτελοῦνται συνήθως μόναι των, ἀλλὰ μαζὶ μὲ κάποιαν θεμελιώδη.

Ἡ ἐκτέλεσις ὁποιασδήποτε ἀπὸ τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις μόνης εἰς ὁποιονδήποτε εἶδος ἀριθμῶν λαμβάνει, καθὼς ἠξεύρομεν, τὴν μορφὴν ἑνὸς ***προβλήματος***, εἰς τὸ ὁποῖον διακρίνομεν τοὺς ***δοθέντας*** ἀριθμοὺς καὶ τὸν ***ζητούμενον***. Οἱ δοθέντες ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὸ οὐσιῶδες περιεχόμενον τοῦ σχετικοῦ προβλήματος, πρέπει νὰ εἶναι τοὐλάχιστον δύο. Μὲ ***τὴν λύσιν*** τοῦ προβλήματος εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος.

Ἐπειδὴ οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἰς τὰ προβλήματα ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἀφῃρημένοι ἢ συγκεκριμένοι, διακρίνομεν, καθὼς εἴδαμεν καὶ ἀλλοῦ, δύο κύρια εἴδη προβλημάτων, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ διδάσκωνται εἰς κάθε θεμελιώδη πρᾶξιν κάθε εἴδους ἀριθμῶν, ***τὰ προβλήματα μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς*** καὶ ***τὰ προβλήματα μὲ συγκεκριμένους***.

Τὰ τελευταῖα ἀπὸ τὰ προβλήματα αὐτά, ἐφόσον ἀντλοῦν τὴν ὕλην των ἀπὸ τὰς πραγματικὰς σχέσεις εἴτε τοῦ πρακτικοῦ βίου εἴτε τῶν ἄλλων μαθημάτων, τὰ ὁποῖα διδάσκονται εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα, εἶναι καὶ καλοῦνται, καθὼς εἶναι γνωστόν, ***ἐφηρμοσμένα προβλήματα***. Ὅσα ἀπὸ αὐτὰ ἀναφέρονται εἰς τὰς σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου, συντελοῦν προφανῶς εἰς τὴν ἀνάπτυξιν ὄχι μόνον τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν ἀρίθμησιν, ἀλλὰ καὶ τοῦ πρακτικοῦ των διαφέροντος, διότι τοὺς ἑτοιμάζουν διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου. Μεταξὺ τῶν ἐφηρμοσμένων καὶ τῶν ἄλλων προβλημάτων ὑπάρχει, καθὼς εἶναι γνωστόν, ἡ οὐσιώδης διαφορά, ὅτι, ἐνῷ εἰς τὰ τελευταῖα ζητεῖται ἀπὸ τοὺς μαθητὰς μόνον ἡ ἐκτέλεσις τῆς δοθείσης πράξεως, εἰς τὰ ἐφηρμοσμένα ζητεῖται ἀπὸ αὐτοὺς καὶ ἡ εὕρεσις τῆς πράξεως, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ.

Δὲν χωρεῖ φυσικὰ καμία ἀμφισβήτησις, ὅτι εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς πρέπει νὰ διδαχθοῦν ὅλαι αἱ θεμελιώδεις πράξεις μὲ σχετικὰ προβλήματα. Ἀπὸ τὰς δευτερευούσας πράξεις πρέπει νὰ διδαχθοῦν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ἡ ἀνάλυσις εἰς προσθετέους ἢ παράγοντας καὶ ἡ συμπλήρωσις κάθε ἀριθμοῦ

μέχρι ἑνὸς ὡρισμένου ὁρίου, διότι μὲ αὐτὰς ἐξασφαλίζεται τὸ ἔργον τῶν θεμελιωδῶν πράξεων.

Ἡ ἀνάπτυξις τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν ἀρίθμησιν ἀπαιτεῖ νὰ διδαχθοῦν ὅλαι αἱ θεμελιώδεις πράξεις καὶ εἰς τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμούς. Ἡ παράλειψις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν, ὅσοι δὲν ἔχουν δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, τὴν ὁποίαν ζητεῖ ὁ Tschirsch (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 349), δὲν συντελεῖ βέβαια εἰς τὴν πλήρωσιν τοῦ σκοποῦ αὐτοῦ. Ἐξ ἄλλου πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν ἀρκεῖ εἰς τὰ προβλήματα κάθε πράξεως νὰ δίδωνται κατὰ κανόνα συμμιγεῖς περιέχοντες μονάδας ὄχι περισσοτέρων ἀπὸ δύο τάξεων καὶ ὅτι ἀπὸ τὰ προβλήματα τῶν συμμιγῶν, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὰς σχέσεις τοῦ χρόνου, ἀρκεῖ νὰ διδάσκωνται τὰ προβλήματα τῆς διαρκείας. Δευτερεύουσαι πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ διδαχθοῦν εἰς τοὺς συμμιγεῖς, εἶναι αἱ τροπαὶ εἰς μονάδας κατωτέρας ἢ ἀνωτέρας τάξεως, αἱ ὁποῖαι σκόπιμον εἶναι νὰ περιορίζωνται εἰς ἐκείνας, ὅσαι ἀνταποκρίνονται μὲ τὰς πραγματικὰς σχέσεις.

Ὅλαι αἱ θεμελιώδεις πράξεις πρέπει νὰ διδάσκωνται καὶ εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα, τοὐλάχιστον εἰς τὰ πολυτάξια σχολεῖα. Δευτερεύουσαι πράξεις πρέπει νὰ διδάσκωνται ἡ τροπὴ κλάσματος μονάδος μιᾶς τάξεως εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως, ἡ τροπὴ ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς νόθα κλάσματα καὶ ἡ τροπὴ νόθων κλασμάτων εἰς ἀκεραίους καὶ μικτούς, ἡ τροπὴ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ ὅρους μεγαλυτέρους, ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων καὶ ἡ τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα. Ὡσαύτως, διὰ νὰ ἐκτελῆται εὐκολώτερα ἡ ἁπλοποίησις καὶ νὰ εὑρίσκεται ἀκοπώτερα ὁ κοινὸς παρονομαστής, ἀπαραίτητον εἶναι νὰ γίνωνται συστηματικὰ ἡ διδασκαλία τῆς ἀναλύσεως τῶν μέχρι τοῦ 100 ἀριθμῶν εἰς 2 παράγοντας, ἡ εἰς αὐτὴν στηριζομένη διδασκαλία τῶν πρώτων ἀριθμῶν καὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν μέχρι τοῦ 100 ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας, καθὼς καὶ ἡ διδασκαλία τῶν κανόνων τῆς διαιρετότητος. Ὅτι δὲ δὲν εἶναι ὀρθὴ ἡ γνώμη μερικῶν Μεθοδικῶν, οἱ ὁποῖοι φρονοῦν, ὅτι περιττεύει ἐν γένει εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα εἴτε ἡ διδασκαλία τῆς προσθέσεως περισσοτέρων ἀπὸ δύο ἑτερωνύμων κλασμάτων, εἴτε ἡ διδασκαλία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως μὲ κλάσμα, εἴτε ἡ διδασκαλία τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς παράγοντας, εἴτε εἰδικῶς ἡ διδασκαλία τῶν πρώτων ἀριθμῶν, εἴτε τέλος ἡ διδασκαλία τῶν κανόνων τῆς διαιρετότητος, ἐτονίσαμεν εἰς ἄλλο μέρος τοῦ παρόντος ἔργου.

Εἰς σχολεῖα ὀλιγοτάξια καὶ ἐν γένει εἰς σχολεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν διαθέτουν διὰ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν τὸν κατάλληλον χρόνον, πρέπει κατ᾽ ἀνάγκην διὰ τὸν λόγον αὐτὸν νὰ παραλειφθῇ εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα ἡ διδασκαλία ἐκείνων τῶν πράξεων, ὅσαι εἶναι ὀλιγώτερον ἀναγκαῖαι διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ διαφέροντος τῶν παίδων πρὸς τὴν ἀρίθμησιν, δὲν ἔχουν δὲ καὶ μεγάλην χρησιμότητα διὰ τὰς ἀριθμητικὰς ἀνάγκας τοῦ πρακτικοῦ βίου. Τέτοιαι δὲ πράξεις εἶναι ἡ τροπὴ κλάσματος μονάδος μιᾶς τάξεως εἰς μονάδας ἀνωτέρας τάξεως, οἱ ὀλιγώτερον χρήσιμοι κανόνες τῆς διαιρετότητος, αἱ δυσκολώτεραι περιπτώσεις τῆς προσθέσεως ἑτερωνύμων κλασμάτων καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις μὲ κλάσμα.

Καὶ εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, εἴτε μόνα των παρουσιάζονται εἴτε μαζὶ μὲ τὰ κοινά, πρέπει νὰ διδάσκωνται ὅλαι αἱ θεμελιώδεις πράξεις. Ἐν τούτοις ἀρκεῖ εἰς τὰ σχετικὰ προβλήματα νὰ παρουσιάζωνται δεκαδικὰ κλάσματα ἔχοντα τὸ πολὺ 3—4 δεκαδικὰ ψηφία, περισσότερα ἀπὸ τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ἄλλωστε καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου. Ἀπὸ τὰς δευτερευούσας πράξεις πρέπει νὰ διδάσκωνται ἡ τροπὴ δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ περισσότερα ἢ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία, ἡ τροπὴ τῶν συμμιγῶν τῶν ἐχόντων δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν εἰς δεκαδικὰ κλάσματα, ἡ τροπὴ κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ κοινὰ καὶ περιοδικά, καθὼς καὶ ἡ τροπὴ κοινῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς κοινὰ κλάσματα. Ἡ τροπὴ τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς κοινὰ κλάσματα περιττὸν εἶναι φυσικὰ νὰ διδάσκεται εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα.

Ἀλλ᾽ ἡ κάθε θεμελιώδης ἀριθμητικὴ πρᾶξις, ὅπως εἴπαμεν καὶ προηγουμένως, δὲν παρουσιάζεται πάντοτε μόνη της, ἀλλὰ καὶ μαζὶ μὲ ἄλλην ἢ καὶ μὲ ἄλλας. Προβλήματα μὲ ἀριθμοὺς ὁποιουδήποτε εἴδους, τὰ ὁποῖα λύονται μὲ συνδυασμὸν δύο ἢ

περισσοτέρων πράξεων, ὀνομάζονται ***σύνθετα***, ἐνῷ τὰ λυόμενα μὲ μίαν μόνον πρᾶξιν ὀνομάζονται ***ἁπλᾶ***.

Τὰ σύνθετα προβλήματα εἶνε κατὰ κανόνα ἐφηρμοσμένα, χρησιμοποιοῦνται δηλ. μόνον εἰς τὴν ἀρίθμησιν, ἡ ὁποία γίνεται εἰς τὸν πρακτικὸν βίον ἢ ἐπάνω εἰς τὴν ὕλην τῶν ἄλλων μαθημάτων, τὰ ὁποῖα διδάσκονται εἰς τὸ σχολεῖον. Τὰ προβλήματα αὐτὰ ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν διότι ἔχουν τὴν ἀνωτέρω χρησιμότητα, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ καὶ διότι συντελοῦν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ καθαροῦ ἀριθμητικοῦ διαφέροντος τῶν παίδων—καθόσον, μολονότι λύονται μὲ τὰς γνωστὰς εἰς τοὺς παῖδας ἀριθμητικὰς πράξεις, ἐν τούτοις ἀπαιτοῦν κατὰ μέγα μέρος ἰδιάζοντα συνδυασμὸν τῶν πράξεων αὐτῶν, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ αὐτόχρημα ἰδιαίτερον εἶδος, ἰδιαιτέραν μέθοδον ἀριθμήσεως,—ἀπαραίτητον εἶναι νὰ διδάσκωνται εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα, ἐφόσον, ἐννοεῖται, ἡ κατανόησις τοῦ συνδυασμοῦ τῶν πράξεων δὲν ἀποτελεῖ ἔργον ἀνώτερον ἀπὸ τὰς ἀντιληπτικὰς δυνάμεις τῶν μαθητῶν τῶν σχολείων αὐτῶν.

Ἔχομεν τώρα ***σύνθετα*** προβλήματα λυόμενα μὲ πολλαπλασιασμὸν καὶ πρόσθεσιν (διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὅλου ποσοῦ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ ἀγοράζων περισσότερα ἀπὸ ἕνα πράγματα), μὲ πολλαπλασιασμόν, πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν (διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ δοθῇ εἰς τὸν ἀγοράζοντα, ἐφόσον δίδει νόμισμα μεγαλυτέρας ἀξίας ἀπὸ τὰ ὀφειλόμενα), μὲ διαδοχικὰς ἀφαιρέσεις ἢ πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν (διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον ὑπολείπεται μετὰ τμηματικὴν ἀγορὰν ἢ πώλησιν), μὲ ἀφαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν (διὰ τὸν ὑπολογισμὸν της τιμῆς ἑνὸς ὑλικοῦ χωρὶς τὸ ἀπόβαρον), μὲ διαίρεσιν, ἀφαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν (διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς διαφορᾶς τῆς τιμῆς ἐπὶ λιανικῆς ἢ χονδρικῆς ἀγορᾶς ἢ πωλήσεως) καὶ μὲ διαδοχικὸν πολλαπλασιασμὸν (ἐπὶ μακροχρονίας ἀποταμιεύσεως ἢ δαπάνης). Ὅλα τὰ σύνθετα αὐτὰ προβλήματα, ἐπειδὴ ἀναφέρονται εἰς σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου ***γνωστὰς*** εἰς τοὺς παῖδας καὶ λύονται μὲ εὐκολονόητον συνδυασμὸν τῶν θεμελιωδῶν πράξεων, σκόπιμον εἶναι νὰ διδάσκωνται εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα.

Ἰδιαιτέραν τάξιν συνθέτων προβλημάτων ἀποτελοῦν τὰ ἐπίσης χρήσιμα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν ἄλλων μαθημάτων καὶ ἐν γένει εὔκολα προβλήματα ***τῆς μέσης τιμῆς***, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ μὲν ἁπλούστερα λύονται α) μὲ διαίρεσιν καὶ β) μὲ πρόσθεσιν καὶ διαίρεσιν, τὰ δὲ συνθετώτερα, τὰ ὁποῖα, κυρίως εἰπεῖν, εἶναι προβλήματα ***μίξεως***, μὲ πολλαπλασιασμόν, πρόσθεσιν καὶ διαίρεσιν.

Μὲ ἰδιάζοντα συνδυασμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως λύονται τὰ προβλήματα τῆς καλουμένης ***μεθόδου τῶν τριῶν***, ἡ ὁποία πάλιν ἐμφανίζεται 1) ὡς ***ἁπλῆ*** καὶ 2) ὡς ***σύνθετος***. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν δίδονται αἱ τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων· μετὰ τοῦτο δίδεται νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ποσὰ αὐτὰ καὶ ζητεῖται, ποία τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτήν. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν δίδονται αἱ τιμαὶ περισσοτέρων ἀπὸ 2 ἀναλόγων ποσῶν, μετὰ τοῦτο δὲ ζητεῖται, ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ποσὰ αὐτὰ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς δοθείσας νέας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν.

Ἡ διδασκαλία τῶν μεθόδων αὐτῶν τῆς ἀριθμήσεως εἶναι ἀναγκαιοτάτη εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι κινοῦν ἰδιαιτέρως τὸ ἀριθμητικὸν διαφέρον τῶν μαθητῶν τῶν σχολείων αὐτῶν, ἐπειδὴ εἶναι προσιταὶ εἰς τὴν ἀντίληψίν των, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι μὲ αὐτὸς καὶ προπάντων μὲ τὴν πρώτην λύονται πλεῖστα προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς ποικιλωτάτας καὶ γνωστὰς εἰς τοὺς παῖδας σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου καὶ ὕλας τῶν πραγματικῶν μαθημάτων, τέλος δὲ διότι εἰς τὰς δύο αὐτὰς μεθόδους βασίζεται ἡ λύσις πλείστων ἄλλων χρησιμωτάτων συνθέτων προβλημάτων τοῦ πρακτικοῦ βίου, τὰ ὁποῖα δι' αὐτὸ πρέπει νὰ διδαχθοῦν εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα καὶ τῶν ὁποίων αἱ πραγματικαὶ σχέσεις, καθόσον κατὰ μέγα μέρος δὲν εἶναι γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθητάς, πρέπει δι' αὐτὸ νὰ προδιδαχθοῦν εἰς αὐτούς. Ἐν τούτοις, ὅπως εἴπαμεν καὶ ἀλλοῦ, ἡ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν, ἡ ὁποία πρέπει νὰ διδαχθῇ κυρίως διὰ τὸν πρῶτον καὶ τὸν τρίτον ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω λόγους, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ διδάσκεται μὲ πολλὰ καὶ πολυμελῆ προβλήματα, διότι ἡ διδασκαλία της συνεχίζεται οὕτως εἰπεῖν μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν χρησιμωτάτων διὰ τὸν πρακτικὸν βίον προβλημάτων τοῦ τοκισμοῦ, τὰ ὁποῖα λύονται μὲ αὐτὴν καὶ ἔχουν κατὰ κανόνα 5 μόνον μέλη. Εἰς τὰ ὀλιγοτάξια

μάλιστα σχολεῖα, ἐφόσον εἰς αὐτὰ τὰ προβλήματα τοῦ τοκισμοῦ λύονται μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀναλύσεως, ἠμπορεῖ ἐν ἐλλείψει χρόνου καὶ νὰ παραλειφθῇ ἡ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν. Εἰς τὰ σχολεῖα αὐτὰ ἠμπορεῖ νὰ παραλειφθῇ ἐν ἐλλείψει χρόνου καὶ ἡ διδασκαλία ἐκείνων τῶν προβλημάτων τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι κοινὸν ἢ δεκαδικὸν κλάσμα, διότι τὰ προβλήματα αὐτὰ καὶ ὀλιγώτερον ἀπαραίτητα εἶναι διὰ τὴν τελείαν κατανόησιν τῆς μεθόδου αὐτῆς καὶ σπανιώτατα παρουσιάζονται εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.

Μία τάξις συνθέτων προβλημάτων, λυομένων μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, εἶναι καὶ ἡ τάξις τῶν χρησιμωτάτων εἰς τὸν πρακτικὸν βίον προβλημάτων ***τῆς μετατροπῆς*** Ἑλληνικῶν νομισμάτων εἰς ξένα καὶ ξένων εἰς Ἑλληνικά, πρὸς λύσιν τῶν ὁποίων ἀπαραίτητον εἶναι νὰ μεταδοθοῦν εἰς τοὺς παῖδας αἱ ἀναγκαῖαι γνώσεις διὰ τὰ ξένα νομίσματα.

Μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν λύονται καὶ τὰ εὐχρηστότατα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον προβλήματα ***τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ποσοστῶν***, εἰς τὰ ὁποῖα ἢ δίδονται αἱ τιμαὶ δύο ἀναλόγων ποσῶν καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, πόσαι μονάδες τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς ὡρισμένον καὶ σταθερὸν ἀριθμὸν μονάδων τοῦ ἄλλου ἢ δίδεται τὸ τελευταῖον αὐτὸ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, πόση θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ποσὰ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ ἄλλου. Ἐπειδὴ ὁ ὡρισμένος καὶ σταθερὸς ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἀνάλογα ποσὰ εἶναι ὁ 100 ἢ ὁ 1000, ἔχομεν προβλήματα ὑπολογισμοῦ τῶν ποσοστῶν ἐπὶ τῇ βάσει ***τοῦ τόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν*** καὶ ἐπὶ τῇ βάσει ***τοῦ τόσον ἐπὶ τοῖς χιλίοις***.

Λαμβάνοντες τώρα ὑπ' ὄψιν μας μόνον τὰ προβλήματα ***τοῦ τόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν*** ἠμποροῦμεν νὰ τὰ διαιρέσωμεν: 1) εἰς ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἀναφέρεται μόνον εἰς τὸ χρῆμα καὶ ὄχι καὶ εἰς τὸν χρόνον, 2) εἰς ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἀναφέρεται εἰς τὸν χρόνον, 3) εἰς ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἀναφέρεται καὶ εἰς τὸ χρῆμα καὶ εἰς τὸν χρόνον καὶ 4) εἰς ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται εἰς ἄλλας ποικίλας πραγματικὰς σχέσεις.

Εἰς τὸ πρῶτον εἶδος ἀνάγονται ποικίλα εὐχρηστότατα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ εὐκολώτατα διὰ τοὺς μαθητὰς προβλήματα ἀγορᾶς καὶ πωλήσεως, καὶ ὡρισμένως α) προβλήματα **ἐκπτώσεως**, β) προβλήματα **κέρδους** καὶ **ζημίας** καὶ γ) προβλήματα **ἀποβάρου**, τῶν ὁποίων ἡ λύσις προϋποθέτει τὴν κατοχὴν ὡρισμένων πραγματικῶν γνώσεων, αἱ ὁποῖαι, καθόσον δὲν εἶναι κατὰ μέγα μέρος γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθητάς, πρέπει νὰ διδαχθοῦν εἰς αὐτούς. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω προβλήματα ἠμποροῦν νὰ παραλειφθοῦν, καθόσον δὲν εὐχρηστοῦν εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, τὰ προβλήματα τῆς ἐκπτώσεως, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου ποσοῦ τοῦ λογαριασμοῦ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ ἔκπτωσις, καὶ τὰ προβλήματα τοῦ ἀποβάρου, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὸ καθαρὸν βάρος καὶ τὸ ἀπόβαρον τὸ ἀκαθάριστον βάρος.

Εἰς τὸ δεύτερον ἀπὸ τὰ μνημονευθέντα εἴδη ὑπάγονται χρησιμώτατα καὶ ὁπωσδήποτε εὔκολα προβλήματα, ἀναφερόμενα εἰς τὴν κυκλοφορίαν τοῦ χρήματος, καὶ ὡρισμένως 1) εἰς **τὸν τοκισμὸν τῶν χρημάτων**, 2) εἰς **τὸν ἀνατοκισμόν των** καὶ 3) εἰς **τὴν ἀγορὰν καὶ πώλησιν τίτλων**, ἤτοι ὁμολογιῶν καὶ μετοχῶν. Ὅλων τῶν προβλημάτων αὐτῶν ἡ λύσις προϋποθέτει τὴν κατοχὴν ὡρισμένων πραγματικῶν γνώσεων (σχετικῶν μὲ τὸν τοκισμόν, τὸν ἀνατοκισμὸν καὶ τὰ ταμιευτήρια, τὰς ὁμολογίας καὶ τὰς μετοχάς), αἱ ὁποῖαι, καθόσον δὲν εἶναι γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθητάς, πρέπει νὰ διδαχθοῦν εἰς αὐτούς. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω προβλήματα τὰ τοῦ τοκισμοῦ διαιροῦνται α) εἰς ὅσα ζητεῖται ὁ τόκος, β) εἰς ὅσα ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον, γ) εἰς ὅσα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον καὶ δ) εἰς ὅσα ζητεῖται ὁ χρόνος. Εἰς τὰ ὀλιγοτάξια σχολεῖα ἠμπορεῖ ἐν ἐλλείψει χρόνου νὰ παραλειφθῇ ἡ διδασκαλία τῶν 3 τελευταίων ἀπὸ τὰ εἴδη αὐτά.

Εἰς τὸ τρίτον ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω μνημονευθέντα εἴδη ὑπάγονται τὰ λεγόμενα προβλήματα **τῆς ὑφαιρέσεως**, τὰ ὁποῖα εἶναι προβλήματα ἐκπτώσεως, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν δὲν ἀναφέρεται μόνον εἰς τὸ χρῆμα, ἀλλὰ καὶ εἰς τὸν χρόνον. Ἀπὸ τὰ προβλήματα αὐτὰ πρέπει νὰ διδαχθοῦν εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα μόνον τὰ τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως καὶ ὄχι καὶ τὰ τῆς ἐσωτερικῆς, διότι τὰ τελευταῖα καὶ ὀλιγώτερον χρήσιμα εἶναι εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ κατὰ κανόνα ἀνώτερα τῆς ἀντιληπτικῆς δυνάμεως τῶν μαθητῶν τῶν σχολείων αὐτῶν. Ἡ διδασκαλία τώρα τῶν

προβλημάτων τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως προϋποθέτει τὴν κατοχὴν ὡρισμένων γνώσεων, ἀναφερομένων εἰς τὰ γραμμάτια εἰς διαταγήν, τὰς συναλλαγματικὰς καὶ τὰς ἐπιταγάς, αἱ ὁποῖαι πρέπει μὲ τὴν εὐκαιρίαν αὐτὴν νὰ μεταδοθοῦν εἰς τοὺς μαθητάς.

Τέλος εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τετάρτου εἴδους ἀνήκουν διάφορα εὔκολα καὶ χρήσιμα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἄλλων μαθημάτων προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἀναφέρεται εἰς ποικίλας ἄλλας πραγματικὰς σχέσεις παρὰ τὸ χρῆμα καὶ τὸν χρόνον, ὅπως π. χ. εἰς τὰ συστατικὰ διαφόρων ὑλῶν, εἰς τὸν πληθυσμὸν καὶ τὴν θνησιμότητα πόλεων καὶ χωρῶν κ.τ.λ.

Εἰς τὰ προβλήματα **τοῦ τόσον ἐπὶ τοῖς χιλίοις** ἀνήκουν εὔκολα καὶ ἀρκετὰ χρήσιμα προβλήματα, ἀναφερόμενα εἰς τὰς ἀσφαλείας, αἱ περὶ τῶν ὁποίων πραγματικαὶ γνώσεις πρέπει νὰ μεταδοθοῦν εἰς τοὺς μαθητάς.

Μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ἠμποροῦν νὰ λυθοῦν καὶ τὰ ἀρκετὰ χρήσιμα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον προβλήματα **τῆς ἑταιρείας**, ἤτοι τὰ προβλήματα, μὲ τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ εἰς δύο ἢ περισσότερα ἄτομα διανομὴ ἑνὸς κέρδους ἢ μιᾶς ζημίας. Ἐν τούτοις τὰ προβλήματα αὐτὰ ἠμποροῦν νὰ λυθοῦν καὶ μὲ τὴν ἐφαρμογὴν **τοῦ λόγου**, ὁ ὁποῖος μὲ τὴν εὐκαιρίαν αὐτὴν πρέπει νὰ διδαχθῇ εἰς τοὺς μαθητάς.

Ἄλλα τέλος σύνθετα προβλήματα, χρήσιμα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, εἶναι τὰ προβλήματα **τῆς μίξεως**, εἰς τὰ ὁποῖα πρόκειται διὰ τὴν ἀνάμιξιν ὑλῶν. Τὰ προβλήματα τῆς μίξεως διαιροῦνται: 1) εἰς ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται καὶ ἡ ποσότης καὶ ἡ ποιότης τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς μιγνυομένας ὕλας καὶ ζητεῖται ἡ ποιότης τοῦ μίγματος, καὶ 2) εἰς ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται ἡ ποιότης τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς μιγνυομένας ὕλας καὶ ἡ ποιότης τοῦ μίγματος, ζητεῖται δὲ ὁ λόγος, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀναμιχθοῦν αἱ ὕλαι αὐταί. Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ εἴδη τῶν προβλημάτων τῆς μίξεως ἀπαραίτητον εἶναι νὰ διδάσκεται εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα τὸ πρῶτον, τοῦ ὁποίου τὰ προβλήματα λύονται μὲν μὲ γνωστοὺς εἰς τοὺς μαθητὰς τρόπους ἀριθμήσεως, ἤτοι μὲ τὴν εὕρεσιν τῆς μέσης τιμῆς ἢ μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ἢ μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ λόγου, ἀναφέρονται δὲ εἰς πραγματικὰς σχέσεις αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς ὅλας τὰς κοινωνικὰς τάξεις, περιττὴ δὲ εἶναι ἡ διδασκαλία τοῦ δευτέρου, τοῦ ὁποίου τὰ προβλήματα ἀφοροῦν μόνον τοὺς ἐμπόρους, λύονται δὲ μὲ ἰδιαιτέραν μέθοδον, ἤτοι μὲ τὴν καθαυτὸ ***μέθοδον τῆς μίξεως***, ἡ ὁποία παρέχει ἀρκετὰς δυσκολίας εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν κατωτέρων σχολείων. Ἡ διδασκαλία τῶν πρώτων, τῶν ἁπλουστέρων δηλ. προβλημάτων τῆς μίξεως, προϋποθέτει τὴν κατοχὴν ὡρισμένων πραγματικῶν γνώσεων, ἀναφερομένων εἰς τὰς μιγνυομένας ὕλας καὶ εἰς τὸν τρόπον τῆς μίξεώς των (κράματα μετάλλων, νομισμάτων, οἰνοπνεύματος), αἱ ὁποῖαι μὲ τὴν εὐκαιρίαν αὐτὴν πρέπει νὰ μεταδοθοῦν εἰς τοὺς παῖδας. Ἡ δὲ γνώμη μερικῶν Μεθοδικῶν, ὅτι ἡ διδασκαλία ὅλων τῶν προβλημάτων τῆς μίξεως πρέπει νὰ ἀποκλεισθῇ ἀπὸ τὰ σχολεῖα, διότι ὅλα εἶναι ὕποπτα ἀπὸ ἠθικῆς ἀπόψεως, καθόσον διδάσκουν, πῶς ἠμποροῦν νὰ ἀναμιγνύωνται καλαὶ καὶ κακαὶ ποιότητες διαφόρων ὑλῶν, διὰ νὰ ἐξαπατηθοῦν οἱ ἀγορασταί, δὲν εἶναι ὀρθή, διότι τὰ σχολικὰ προβλήματα δὲν θὰ ἀναφέρωνται εἰς νοθεύσεις, ἀλλὰ εἰς μίξεις, αἱ ὁποῖαι ζητοῦνται ἀπὸ τοὺς ἀγοραστάς, γίνονται δὲ δι' αὐτὸ ἀπὸ τοὺς ἐμπόρους, οἱ ὁποῖοι δὲν ἀποβλέπουν εἰς ἰδιαίτερον κέρδος ἀπὸ τὴν μῖξιν.

Ὅ,τι ἀκόμη ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν σχετικὸν μὲ τὴν ἐκλογὴν τῆς διδακτέας ἀριθμητικῆς ὕλης, εἶναι τοῦτο, ὅτι δηλ., ἐπειδὴ ἡ ἀρίθμησις ἠμπορεῖ νὰ γίνεται ἢ ἀπὸ μνήμης ἢ ἐγγράφως, πρέπει οἱ μαθηταὶ κατ' ἀρχὴν νὰ διδάσκωνται νὰ ἐκτελοῦν ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις εἰς ὅλα τὰ εἴδη τῶν ἀριθμῶν καὶ νὰ λύουν τὰ σχετικὰ προβλήματα καὶ ***ἀπὸ μνήμης*** καὶ ***ἐγγράφως***. Ποῖα τώρα πρέπει νὰ εἶναι τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν τρόπων τῆς ἀριθμήσεως εἰς κάθε τάξιν καὶ εἰς κάθε εἶδος ἀριθμῶν καὶ προβλημάτων, θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ ἀκόλουθον κεφάλαιον, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν κατανομὴν τῆς ὕλης εἰς τὰ διάφορα σχολικὰ ἔτη.

Τέλος δὲν πρέπει νὰ λησμονηθῇ, ὅτι εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην, ἡ ὁποία πρέπει νὰ διδαχθῇ εἰς τὰ κατώτερα σχολεῖα, πρέπει νὰ καταταχθοῦν ἀφ' ἑνὸς μὲν ***αἱ δοκιμαί***, μὲ τὰς ὁποίας ἐξελέγχεται ἡ ὀρθὴ ἐκτέλεσις τῶν γενομένων ἀριθμητικῶν πράξεων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ***αἱ εὐκολίαι τῆς ἀριθμήσεως***, μὲ τὰς ὁποίας αἱ ἀριθμητικαὶ

πράξεις γίνονται εὐκολώτερα παρὰ μὲ τὸν κανονικὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεώς των.

Καιρὸς εἶναι ἤδη νὰ ἐξετάσωμεν, πῶς πρέπει ἡ τοιουτοτρόπως ἐκλεγεῖσα ἀριθμητικὴ ὕλη νὰ κατανεμηθῇ εἰς τὰ ἔτη τοῦ δημοτικοῦ σχολείου καὶ πῶς πρέπει νὰ διαταχθῇ ἡ ὕλη τοῦ κάθε σχολικοῦ ἔτους].

XXVII. Η ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ.

1. Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΕΙΣ ΤΑ ΕΤΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ.

Ἡ κατανομὴ τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης [εἰς τὰ ἔτη τοῦ δημοτ. σχολείου ἐξαρτᾶται μὲν καὶ ἀπὸ τὰς συνθήκας, μὲ τὰς ὁποίας λειτουργεῖ κάθε τέτοιο σχολεῖον, (ἤτοι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν κάθε σχολικοῦ ἔτους, καθὼς καὶ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν, αἱ ὁποῖαι διατίθενται διὰ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν του, ἀκόμη δὲ καὶ ἀπὸ τὴν φύσιν αὐτῆς τῆς διδακτέας ὕλης], κυρίως ὅμως πρέπει νὰ προσαρμόζεται εἰς τὰς πνευματικὰς δυνάμεις, εἰς τὴν πνευματικὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθητῶν τοῦ κάθε σχολικοῦ ἔτους.

Α. Ἀπὸ ποῖον σχολικὸν ἔτος πρέπει νὰ ἀρχίζῃ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία.

Σήμερα, καθὼς εἶναι γνωστόν, ἀρχίζει ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς ἀμέσως ἀπὸ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος, ἀμέσως ἀπὸ τὴν εἴσοδον τῶν μικρῶν εἰς τὸ σχολεῖον.

Ἐν τούτοις πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι δὲν ἐγίνετο τὸ ἴδιον καὶ εἰς παλαιοτέρους χρόνους. Ἡ Σχολικὴ μέθοδος τοῦ πρίγκιπος τῆς Γόθας ***Ἐρρίκου τοῦ Εὐσεβοῦς*** (τοῦ ἔτους 1642) ἐδιαιροῦσε τοὺς μαθητάς, ποὺ εἶχαν ἡλικίαν ἀπὸ 5—14 ἐτῶν, εἰς τρεῖς βαθμίδας ἢ τάξεις. Ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς ἄρχιζε εἰς τὴν μεσαίαν βαθμίδα. «Ἡ Ἀριθμητικὴ πρέπει νὰ διδαχθῇ εἰς τὴν τάξιν αὐτὴν ἐξ ἴσου καὶ εἰς τὰ ἄρρενα καὶ εἰς τὰ θήλεα καὶ ὡρισμένως εἰς τόσην ἔκτασιν, ὥστε οἱ μαθηταὶ νὰ μάθουν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ νὰ προχωρήσουν, ἐφόσον εἶναι δυνατόν, εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν». — Ὁ δὲ *August Hermann Francke* ἄρχιζε τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν εἰς τὸ Γερμανικόν του σχολεῖον μὲ τοὺς προχωρημένους πλέον μαθητάς, ἐκείνους δηλαδή, οἱ ὁποῖοι ἤξευραν νὰ ἀναγινώσκουν τελείως. Μὲ ὅμοιον τρόπον ῥυθμίζει τὴν διδασκαλίαν τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ τὸ Πρωσσικὸν ***Γενικὸν Διάταγμα τῶν ἀγροτικῶν σχολείων*** τοῦ 1763.

Ἀπὸ τοὺς χρόνους ὅμως ***τοῦ Πεσταλότση*** ἡ διδασκαλία τῆς Ἀριθμητικῆς ἀρχίζει ἀμέσως μὲ τὴν εἴσοδον τῶν μικρῶν εἰς τὸ δημοτικὸν σχολεῖον. Ἡ ἔρευνα δὲ καὶ τῶν πνευματικῶν ἐν γένει δεξιοτήτων τῶν παίδων καὶ ἰδιαιτέρως τῶν ἀριθμητικῶν των γνώσεων ἀποδεικνύει τὴν ὀρθότητα τοῦ ἔκτοτε γινομένου.

Β. Ἡ κατανομὴ τῆς ὕλης εἰς τὰ ἔτη τοῦ ὀκταταξίου δημ. σχολείου, ὅπως γίνεται ἀπὸ τὸν Hartmann.

Ὁ Hartmann (Rein, Encyklopädie, I καὶ VII) εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν παίδων μέχρι τῆς συμπληρώσεως τοῦ 14 ἔτους τῆς ἡλικίας των διακρίνει τὰς ἑξῆς 6 βαθμίδας, ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ δύο πρῶται ἀνήκουν εἰς τὴν προσχολικὴν ἡλικίαν:

Πρώτη: Ἡ βαθμὶς τῆς παθητικῆς προσλήψεως (τὰ τρία πρῶτα ἔτη τῆς ζωῆς).

Δεύτερη: Ἡ βαθμὶς τῆς ἁπλῆς ἀναπλάσεως καὶ τῶν ἀρχῶν τοῦ ἐσωτερικοῦ πνευματικοῦ βίου (ἀπὸ τοῦ 4 μέχρι τοῦ 6 ἔτους τῆς ζωῆς).

Τρίτη: Ἡ βαθμὶς τῆς φαντασίας καὶ τῆς παιδικῆς ἐμπιστοσύνης (1 καὶ 2 σχολικὸν ἔτος).

Τέταρτη: Ἡ βαθμὶς τῆς μηχανικῆς μνήμης καὶ τῆς ὑποταγῆς τῆς ἀτομικῆς βουλήσεως εἰς μίαν δικαιολογημένην γενικὴν βούλησιν (3 καὶ 4 σχολικὸν ἔτος).

Πέμπτη: Ἡ βαθμὶς τῆς ἐξεγέρσεως τῆς διανοίας καὶ τῆς ἐπιρροῆς εἰς τὴν διαγωγὴν τῆς αὐξανούσης ἠθικῆς γνώσεως (5 καὶ 6 σχολικὸν ἔτος).

Ἕκτη: Ἡ βαθμὶς τῆς κυριαρχίας τῆς διανοίας καὶ τῆς τηρήσεως διαγωγῆς καθοριζομένης ὁλονὲν περισσότερον ἀπὸ ἠθικὰς ἀρχὰς (7 καὶ 8 σχολικὸν ἔτος).

Ὁ Hartmann ὑποστηρίζει κατόπιν, ὅτι εἰς τὴν ***τρίτην βαθμίδα*** (ἤτοι τὸ 1 καὶ 2 σχολικὸν ἔτος) ἡ ἐπικράτησις τῆς φαντασίας πρέπει νὰ ἔχῃ ὡς ἀντίρροπον σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐποπτείας. Ἡ μετάδοσις λοιπῶν τῶν ἐποπτειῶν αὐτῶν πρέπει νὰ εἶναι καὶ τὸ ἔργον τῆς πρώτης ἀριθμήσεως, δι' αὐτὸ δὲ καὶ ἡ πρώτη σειρὰ τῶν ἀριθμῶν (1 — 10) δὲν πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς διδαχθεῖσα, πρὶν σχηματίσουν οἱ μαθηταὶ σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐποπτείας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ὑποβοηθεῖ δὲ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ ἔργου αὐτοῦ εἰς τὴν προκειμένην βαθμίδα καὶ ἡ προφανὴς ἐμπιστοσύνη, τὴν ὁποίαν ἔχουν οἱ μαθηταὶ τῆς βαθμίδος αὐτῆς εἰς τὸν διδάσκαλον.

Ἡ ἐπικράτησις τῆς μηχανικῆς μνήμης εἰς τὴν ***τετάρτην βαθμίδα*** (ἤτοι τὸ 3 καὶ 4 σχολικὸν ἔτος) ἀπαιτεῖ τὴν συνειδητὴν ἄσκησιν εἰς τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις πράξεις ἐπάνω εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—1000, καθὼς καὶ τὴν ἄσκησιν εἰς τὰς ἀρχὰς τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως.

Ἡ ἐξέγερσις τῆς διανοίας εἰς τὴν ***πέμπτην βαθμίδα*** (ἤτοι τὸ 5 καὶ 6 σχολικὸν ἔτος) διευκολύνει τὴν εἰσαγωγὴν τῶν μαθητῶν εἰς τὴν ἀτέρμονα σειρὰν τῶν ἄνω τοῦ 1000 ἀριθμῶν καὶ εἰς τοὺς νόμους τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῆς ἀριθμήσεως. Εἰς τὸ 6 σχολικὸν ἔτος πρέπει νὰ διδάσκωνται καὶ τὰ κλάσματα.

Εἰς τὴν ***ἕκτην βαθμίδα*** (ἤτοι τὸ 7 καὶ 8 σχολικὸν ἔτος), εἰς τὴν ὁποίαν κυριαρχεῖ ἡ διάνοια, πρέπει ἡ θεωρητικὴ ἀρίθμησις νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰς σχέσεις τῆς φύσεως καὶ τοῦ ἀνθρωπίνου βίου. Τοιουτοτρόπως ἡ πρακτικὴ ἀρίθμησις ἀποτελεῖ τὸ ἐπιστέγασμα τῆς ὅλης ἀριθμητικῆς διδασκαλίας.

Εἰς τὴν Ἐγκυκλοπαιδείαν τοῦ Rein (τομ. VII, ἄρθρον: Rechenunterricht) καὶ εἰς τὸ μεθοδικόν του ἔργον «Der Rechenunterricht κ.τ.λ.» (σ. 259 κ. ἀκ.) παραθέτει ὁ Hartmann ἀναλυτικὸν πρόγραμμα τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ἡ ὁποία πρέπει νὰ διδάσκεται εἰς τὸ ὀκτατάξιον δημοτικὸν σχολεῖον, βασιζόμενον εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας ἀρχάς του καὶ δοκιμασθὲν καὶ εἰς τὴν πρᾶξιν. Κατανέμει δὲ ὁ Hartmann—ὅπως καὶ πολλοὶ ἄλλοι—τὴν διδακτέαν ἀριθμητικὴν ὕλην εἰς τὰ 8 σχολικὰ ἔτη ὡς ἑξῆς:

1 σχολικὸν ἔτος: Οἱ ἀριθμοὶ 1 - 10. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, προαιρετικῶς δὲ καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις (μὲ τὴν μορφὴν μόνον τῆς μετρήσεως) εἰς τὴν σειρὰν 1—10. Ἡ σειρὰ τῶν καθαρῶν δεκάδων (10, 20, 30 κ.τ.λ.—100) καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις εἰς αὐτήν.

2 σχολικὸν ἔτος: Οἱ ἀριθμοὶ 1—100. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, μὴ ἐκτεινόμεναι καὶ εἰς τοὺς διψηφίους, τοὺς ἔχοντας δεκάδας καὶ μονάδας. Εἰσαγωγὴ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν (μὲ τὴν μορφὴν τῆς μετρήσεως) διὰ σχετικῶν ἀσκήσεων, αἱ ὁποῖαι γίνονται μόνον εἰς τὰς σειρὰς τῶν ἀριθμῶν 10, 5, 2, 4, 3 καὶ 6.

3 σχολικὸν ἔτος: Οἱ ἀριθμοὶ 1 - 100. Ἀποπεράτωσις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις.

4 σχολικὸν ἔτος: Αἱ 4 θεμελ. πράξεις ἐπάνω εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—1000.

5 » »: Οἱ ἄνω τοῦ 1000 ἀριθμοί.

6 » »: Οἱ δεκαδικοὶ καὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

7 καὶ 8 σχολ. ἔτος: Αἱ μέθοδοι, αἱ χρησιμεύουσαι διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ πρακτικοῦ βίου, ἰδίως δὲ ἡ μέθοδος τῶν τριῶν καὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ποσοστῶν.

Γ. Ἡ γνώμη τοῦ συγγραφέως ὡς πρὸς τὸ ζήτημα.

Ὁ συγγραφεὺς τοῦ παρόντος ἔργου εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι εἰς συνήθεις σχολικὰς συνθήκας ἡ ὕλη, τὴν ὁποίαν καθορίζει ὁ Hartmann διὰ τὰ πρῶτα σχολικὰ ἔτη, εἶναι τελείως ἐπαρκής, ἂν μάλιστα ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν, ὅτι τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος δὲν πρέ-

πει νὰ ἐπιβαρύνεται μὲ πολλὴν ὕλην (ἴδ. καὶ ἀν. σ. 366). Ἀλλὰ εἰς εὐμενεστέρας σχολικὰς συνθήκας τὸ μὲν πρῶτον σχολικὸν ἔτος ἠμπορεῖ νὰ διδάσκεται ἐκτὸς τῶν 4 πράξεων εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—20, τὸ δὲ δεύτερον σχολικὸν ἔτος οἱ ἀριθμοὶ 1—100, εἰς δὲ τὸ τρίτον οἱ ἀριθμοὶ 1—1000 καὶ εἰς τὸ τέταρτον οἱ ἄνω τοῦ 1000 ἀριθμοί. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς μὲν τὸ 5 καὶ 6 σχολικὸν ἔτος θὰ διδάσκωνται οἱ δεκαδικοὶ καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, καθὼς καὶ ἡ ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν, εἰς δὲ τὸ 7 καὶ 8 αἱ ἄλλαι μέθοδοι αἱ χρησιμεύουσαι διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ πρακτικοῦ βίου.

Δ. Ἄλλοι τρόποι κατανομῆς τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς τὸ ὀκτατάξιον δημοτικὸν σχολεῖον.

Αἱ Πρωσσικαὶ ***Γενικαὶ Διατάξεις*** τοῦ 1872 ἐκλέγουν καὶ διατάσσουν τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην ὡς ἑξῆς: «Εἰς μὲν τὴν ***κατωτέραν βαθμίδα*** διδάσκονται αἱ 4 θεμελ. πράξεις ἐπάνω εἰς τοὺς ἀκεραίους 1—100 καὶ μὲ τὴν συγκεκριμένην καὶ μὲ τὴν ἀφῃρημένην των μορφήν· εἰς δὲ ***τὴν μεσαίαν*** αἱ 4 πράξεις ἐπάνω εἰς τοὺς ἀνωτέρους ἀπὸ τὸν 100 (συγκεκριμένους καὶ ἀφῃρημένους) ἀριθμούς, προσέτι δὲ ἐφηρμοσμένα προβλήματα τῆς μέσης τιμῆς, αἱ τροπαὶ συμμιγῶν εἰς μονάδας ἀνωτέρας ἢ κατωτέρας τάξεως καὶ ἡ ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν. Εἰς τὴν ***ἀνωτέραν*** βαθμίδα διδάσκονται τὰ κοινὰ κλάσματα, τῶν ὁποίων ἡ διδασκαλία πρέπει νὰ ἔχῃ προπαρασκευασθῇ ἀπὸ τὰς κατωτέρας βαθμίδας, καθὼς καὶ ἡ ἐφαρμογή των εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου, ἀκόμη δὲ καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα καὶ μάλιστα μὲ διεξοδικότητα.—Εἰς δὲ τὴν ἀνωτέραν βαθμίδα τῶν πολυταξίων σχολείων θὰ διδάσκωνται καὶ αἱ δυσκολώτεραι μέθοδοι, αἱ χρησιμεύουσαι εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ πρακτικοῦ βίου, καθὼς καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν». Τοιουτοτρόπως τὸ πρόγραμμα αὐτὸ δὲν κατανέμει τὴν ὕλην εἰς τὰ σχολικὰ ἔτη, ἀλλὰ γενικώτερα εἰς τὰς σχολικὰς βαθμίδας, ἀφήνει δὲ εἰς τὸν διδάσκαλον νὰ κατανείμῃ τὴν ὕλην κάθε βαθμίδος εἰς τὰ σχολικὰ ἔτη της, λαμβάνων ὑπ' ὄψιν του τὰς συνθήκας τοῦ σχολείου καὶ τὴν πρόοδον τῶν μαθητῶν. Σημειωτέον δὲ ἐπίσης, ὅτι προγράφει καὶ τὴν διδασκαλίαν τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν, ἡ ὁποία κατὰ τὴν γνώμην μας δὲν πρέπει νὰ γίνεται εἰς τὸ δημοτικὸν σχολεῖον.

***Εἰς τὸ πρόγραμμα τῶν δημοτ. σχολείων τοῦ** Gross-Berlin* τοῦ 1914 κατανέμεται ἡ διδακτέα ὕλη ὡς ἑξῆς:

1 σχολικὸν ἔτος (7 τάξις): Οἱ ἀριθμοὶ 1—20. Πρόσθεσις, ἀφαίρεσις (μὲ ὑπερπήδησιν τοῦ 10), πολλαπλασιασμός.
2 » » (6 τάξις): Οἱ ἀριθμοὶ 1—100 (Διαίρεσις μετρήσεως καὶ μερισμοῦ μὲ ὑπόλοιπον καὶ ἐντὸς τοῦ μικροῦ πίνακος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).
3 » » (5 τάξις): Οἱ ἀριθμοὶ 1—1000. Πολλαπλασιασμὸς×12, 15, 24, 25. (Ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ διαιρέτης μονοψήφιοι ἢ οἱ ἀριθμοὶ 12, 15, 24, 25).
4 » » (4 τάξις): Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς τοὺς ἄνω τοῦ 1000 ἀριθμοὺς προτιμωμένων τῶν σχετικῶς μικροτέρων).
5 » » (3 τάξις): Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς (τῆς δεκαδικῆς καὶ τῆς μὴ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως).
6 » » (2 τάξις): Τὰ κλάσματα. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν.
7 » » (1 τάξις): Ἡ ἔννοια τοῦ τόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου. Προβλήματα ἀσφαλειῶν.
8 » » (Ἀνωτάτη τάξις): Ἡ ἔννοια τοῦ λόγου εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου. Ἡ οἰκιακή, κοινοτικὴ καὶ δημοσία οἰκονομία. Τὸ χρηματιστήριον.

Εἰς τὸ πρόγραμμα αὐτὸ καθορίζονται 4 ὧραι διδασκαλίας τῆς Ἀριθμητικῆς τὴν ἑβδομάδα δι' ὅλας τὰς τάξεις τῶν ἀρρένων. Τὸ ἴδιον γίνεται καὶ διὰ τὰς τάξεις τῶν θηλέων ἐκτὸς τῶν 2 ἀνωτάτων, εἰς τὰς ὁποίας ἡ Ἀριθμητικὴ διδάσκεται 3 μόνον ὥρας τὴν ἑβδομάδα.

Εἰς ***τὸ πρόγραμμα τοῦ Μονάχου*** τοῦ 1912 κατανέμεται ἡ διδακτέα ὕλη ὡς ἑξῆς:

1 σχολικὸν ἔτος: Οἱ ἀριθμοὶ 1—20.
2 » » : » » 1—100.
3 » » : » » 1—1000.
4 » » : Οἱ ἄνω τοῦ 1000 ἀριθμοί.
5 » » : Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα καὶ ἐφαρμογή των εἰς τὰ νομίσματα, τὰ μέτρα καὶ τὰ σταθμά.
6 » » : Τὸ κλάσμα ἐν γένει καὶ ἐφαρμογὴ καὶ τῶν κοινῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.
7 » » : Εἰσαγωγὴ εἰς τὰς μεθόδους τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τοῦ πρακτικοῦ βίου.
8 » » : (ἀρρένων) : Ἀποπεράτωσις τῶν ἀνωτ. μεθόδων.
(θηλέων) : Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς λογαριασμοὺς τοῦ οἰκοκυρικοῦ καὶ τοῦ ἐπαγγελματικοῦ βίου τῆς γυναικός, (συσχετιζομένη στενὰ μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν πρακτικῶν μαθημάτων).

[Ὅ,τι τώρα πρέπει νὰ σημειωθῇ κατόπιν ἀπὸ ὅλα τὰ ἀνωτέρω, εἶναι τοῦτο, ὅτι δηλαδὴ μία ἀπὸ τὰς κυριωτέρας διαφοράς, τὰς ὁποίας παρουσιάζουν ὡς πρὸς τὴν κατανομὴν τῆς ὕλης τὰ μέχρι τοῦδε ἐφαρμοσθέντα ἢ προταθέντα προγράμματα τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας εἰς τὸ δημοτικὸν σχολεῖον, εἶναι ἡ παρουσιαζομένη ὡς πρὸς τὴν ὕλην, ἡ ὁποία πρέπει νὰ κατανεμηθῇ εἰς τὰ πρῶτα σχολικὰ ἔτη καὶ μάλιστα εἰς τὸ πρῶτον. Εἴδαμεν, ὅτι σύμφωνα μὲ τὴν γνώμην τοῦ Hartmann εἰς τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος ἠμποροῦν νὰ διδάσκωνται αἱ 4 πράξεις μόνον εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—10, ἀπὸ αὐτὰς δὲ μάλιστα ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις προαιρετικῶς, ἡ δὲ διαίρεσις πρέπει νὰ παρουσιάζεται μόνον μὲ τὴν μορφὴν τῆς μετρήσεως. Οἱ Rein, Pickel κτλ., καθὼς καὶ ἀρκετοὶ ἀπὸ τοὺς θιασώτας τῆς ἀποκλειστικῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐργασίας εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν, φρονοῦν, ὅτι εἰς τὸ πρῶτον ἔτος πρέπει νὰ διδάσκεται μόνον ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—10. Ὁ συγγραφεὺς τοῦ παρόντος ἔργου φρονεῖ, καθὼς εἴδαμεν, ὅτι εἰς εὐμενεῖς σχολικὰς συνθήκας ἠμποροῦν νὰ διδάσκωνται τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος αἱ 4 πράξεις εἰς τὴν σειρὰν 1—10 καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1 —20. Παρομοίαν ἀντίληψιν ἀντιπροσωπεύει καὶ τὸ πρόγραμμα τῶν δημ. σχ. τοῦ Gross-Berlin τοῦ 1914, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖον εἰς τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος ἠμπορεῖ νὰ διδάσκεται καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—20. Ἄλλα προγράμματα καὶ ἄλλοι Μεθοδικοὶ καθορίζουν, ὅτι εἰς τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος πρέπει νὰ διδάσκωνται καὶ αἱ 4 πράξεις εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—20, οἱ ὁποῖοι λαμβάνονται ἢ ὡς μία ἀριθμητικὴ σειρὰ ἢ ὡς 2 (1—10, 11—20). Σημειωτέον δὲ πάλιν, ὅτι ἀπὸ τοὺς Μεθοδικούς, οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν τοὺς ἀριθμοὺς 1—20 ὡς δύο σειράς, ἄλλοι μὲν φρονοῦν, ὅτι εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—10 πρέπει νὰ διδάσκεται μόνον ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, ἄλλοι δὲ ὅτι πρέπει νὰ διδάσκωνται καὶ αἱ 4 πράξεις καὶ ἐξ αὐτῶν πάλιν μερικοὶ μὲν εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἡ διαίρεσις πρέπει νὰ διδάσκεται μόνον μὲ τὴν μορφὴν τοῦ μερισμοῦ, ἄλλοι δέ, ὅτι ἠμποροῦν νὰ διδάσκωνται καὶ αἱ 2 μορφαὶ τῆς διαιρέσεως, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι μερικοὶ ἀπὸ αὐτοὺς προτάσσουν τὸν μερισμόν, ἄλλοι δὲ πάλιν τὴν μέτρησιν. Τέλος τὸ μὲν πρόγραμμα τῶν μέσων σχολείων τῆς Πρωσσίας τῆς 3 Φεβρουαρίου 1910 προγράφει διὰ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 1—20 καὶ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—100, ὁ δὲ Kaselitz εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι εἰς τὸ ἔτος αὐτὸ πρέπει νὰ διδάσκεται ἡ σειρὰ 1—100].

[Ε. Ἡ κατανομὴ τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς τὰ ἑξατάξια δημοτικὰ σχολεῖα.

Περιοριζόμενοι τώρα εἰς τὸ ἑξατάξιον δημοτικὸν σχολεῖον ὑποτυπώνομεν ἐδῶ, πῶς πρέπει νὰ γίνῃ ἡ κατανομὴ τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς τὰ ἓξ σχολικά του ἔτη.

α) Ἡ ὕλη τοῦ πρώτου σχολικοῦ ἔτους.

Ἀναντίρρητον βέβαια εἶναι, ὅτι μὲ ἀρίστας σχολικὰς συνθήκας καὶ μὲ ἀγαθὴν γενεὰν μαθητῶν δὲν εἶναι ἀδύνατον νὰ διδαχθοῦν εἰς τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος οἱ ἀριθμοὶ 1—100. Ἐν τούτοις μὲ τὰς συνήθεις σχολικὰς συνθήκας ἡ διδασκαλία τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν θὰ ἐπιβαρύνῃ πολὺ περισσότερον ἀπὸ τὸ πρέπον τὸ πνεῦμα τῶν μαθητῶν, ὁσονδήποτε δεξιοὶ καὶ ἂν εἶναι. Οἱ φρονοῦντες, ὅτι εἰς τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος πρέπει νὰ διδάσκωνται οἱ ἀριθμοὶ 1—100, φέρουν ὑπὲρ τῆς γνώμης των τὸ ἐπιχείρημα, ὅτι τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἐπιβάλλουν αὐταὶ αἱ ἀνάγκαι τῶν μαθητῶν τῆς πρώτης τάξεως, οἱ ὁποῖοι θὰ ἔχουν εἰς τὰς χεῖράς των ἀναγνωστικὸν μὲ περισσοτέρας βέβαια ἀπὸ 10 καὶ 20 σελίδας, θὰ βλέπουν, ἴσως δὲ καὶ θὰ λαμβάνουν καὶ θὰ δίδουν πεντηκοντάλεπτα καὶ δραχμὰς κτλ. Φανερὸν ὅμως εἶναι, ὅτι ἡ κατανομὴ τῆς ὕλης δὲν πρέπει νὰ προσαρμόζεται πρὸς τὰς—δευτερευούσας ἄλλωστε—πρακτικὰς αὐτὰς ἀνάγκας τῶν μαθητῶν, ἀλλὰ πρὸς τὰς πνευματικὰς δυνάμεις των καὶ ὅτι αἱ ἀνάγκαι αὐταὶ τῶν παίδων ἠμποροῦν μὲ κατάλληλον τρόπον νὰ παρακαμφθοῦν (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 1, σελ. 14).

Βέβαιον ἐπίσης εἶναι, ὅτι εἰς λίαν δυσμενεῖς συνθήκας ἐξαρκεῖ διὰ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος ἡ διδασκαλία τῆς θεμελιώδους σειρᾶς 1—10.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἑπομένως ἐξάγεται, ὅτι εἰς συνήθεις σχολικὰς συνθήκας ἡ διδασκαλία τοῦ πρώτου σχολικοῦ ἔτους δὲν πρέπει μὲν νὰ ἐπεκταθῇ ἕως τὸν ἀριθμὸν 100, ὅπως ζητεῖ ὁ Kaselitz, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀνάγκη καὶ νὰ περιορισθῇ εἰς τὴν θεμελιώδη σειρὰν 1—10, ὅπως ζητοῦν ὁ Hartmann, οἱ Rein, Pickel κτλ. καὶ ἀρκετοὶ ἀπὸ τοὺς θιασώτας τῆς ἀποκλειστικῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐργασίας εἰς τὴν ἀριθμητ. διδασκαλίαν. Τὸ ζήτημα τώρα, ἕως ποῖον ἀριθμὸν ἠμπορεῖ νὰ ἐπεκταθῇ, λύεται, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι σπουδαῖος μεθοδικὸς λόγος ἐπιβάλλει, ὅπως εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 11—100 γίνῃ ἕνας σταθμὸς εἰς τὸν ἀριθμὸν 20, τοιουτοτρόπως δὲ ἡ σειρὰ 11—100 ὑποδιαιρεθῇ εἰς 2 σειράς, ἤτοι τὴν 11—20 καὶ τὴν 21—100. Ὁ μεθοδικὸς δὲ αὐτὸς λόγος συνίσταται εἰς τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς μέχρι τοῦ 100 σειρᾶς τὰς μεγαλυτέρας δυσκολίας παρέχουν εἰς τοὺς μαθητὰς ἐκεῖναι ***αἱ ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀπαιτεῖ τὴν ἀπὸ μιᾶς εἰς ἄλλην δεκάδα μετάβασιν*** (π. χ. 38+5=43, 43—5=38). Ἀλλὰ ἡ ὑπερπήδησις τῶν ἀνωτέρων δεκάδων (20, 30, 40 κτλ.) θὰ γίνεται ἀπὸ τοὺς μαθητὰς πολὺ εὐκολώτερα, ἂν ἔχουν ἀσκηθῇ ἀρκετὰ εἰς τὴν ὑπερπήδησιν τῆς πρώτης δεκάδος, ἤτοι τοῦ θεμελιώδους ἀριθμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος 10. Δι᾽ αὐτὸ ἡ ὑπερπήδησις τοῦ 10 πρέπει νὰ ἀσκηθῇ ἐντελῶς ἰδιαιτέρως, πεδίον δὲ τῆς ἀσκήσεως αὐτῆς εἶναι ἡ μέχρι τοῦ 20 σειρὰ (πρβ. Räther, ὅπ. ἀν., σ. 78 καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 4). Κατόπιν ἀπὸ αὐτὰ εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς συνήθεις σχολικὰς συνθήκας ὀρθὸν εἶναι νὰ διδάσκωνται τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος αἱ σειραὶ 1—10 καὶ 1(11)—20.

Μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν σειρῶν αὐτῶν θὰ πρόκειται οἱ μαθηταὶ ἰδίως: ***1) νὰ σχηματίσουν σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς των*** καὶ ***2) νὰ μάθουν νὰ ἐκτελοῦν συνειδητὰ καὶ εὔκολα ὅλας τὰς θεμελιώδεις πράξεις τῆς ἀριθμήσεως***, ἤτοι νὰ μάθουν νὰ ἀριθμοῦν ***ἐντὸς τῶν ὁρίων των.*** Διδασκαλία και

Εἰς τὴν σειρὰν 1—10 αἱ δυναταὶ ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως εἶναι αἱ ἑξῆς 45:

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8	1+9
2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	2+8	
3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6	3+7		
4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6			
5+1	5+2	5+3	5+4	5+5				
6+1	6+2	6+3	6+4					
7+1	7+2	7+3						
8+1	8+2							
9+1								

Αἱ δυναταὶ ἀσκήσεις τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὴν ἴδιαν σειρὰν εἶναι αἱ ἑξῆς 55:

10—1	10—2	10—3	10—4	10—5	10—6	10—7	10—8	10—9
9—1	9—2	9—3	9—4	9—5	9—6	9—7	9—8	9—9
8—1	8—2	8—3	8—4	8—5	8—6	8—7	8—8	10—10
7—1	7—2	7—3	7—4	7—5	7—6	7—7		
6—1	6—2	6—3	6—4	6—5	6—6			
5—1	5—2	5—3	5—4	5—5				
4—1	4—2	4—3	4—4					
3—1	3—2	3—3						
2—1	2—2							
1—1								

Αἱ δυναταὶ ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι αἱ ἑξῆς 22:

1×1	1×2	1×3	1×4	1×5
2×1	2×2	2×3	2×4	2×5
3×1	3×2	3×3		
4×1	4×2			
5×1	5×2			
6×1				
7×1				
8×1				
9×1				
10×1				

Ὡς πρὸς τὴν διαίρεσιν πρέπει πρῶτα νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι ὅλον τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος (ἤτοι καὶ εἰς τὴν σειρὰν 1—10 καὶ εἰς τὴν σειρὰν 1—20) πρέπει νὰ ἀποκλεισθῇ ἡ διδασκαλία τῆς διαιρέσεως μὲ ὑπόλοιπον, διότι μὲ αὐτὴν θὰ ἐπιβαρυνθῇ περισσότερον ἀφ᾽ ὅτι πρέπει τὸ πνεῦμα τῶν μαθητῶν. Ἐπίσης πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι σκόπιμον εἶναι εἰς τὴν σειρὰν 1—10 νὰ μὴ παρουσιάζεται ἡ διαίρεσις καὶ μὲ τὴν μορφὴν τῆς μετρήσεως, ἡ ὁποία δὲν εἶναι γνωστὴ εἰς τοὺς μαθητὰς ἀπὸ τὸν προσχολικὸν βίον καὶ δι᾽ αὐτὸ θὰ παρέχῃ εἰς αὐτοὺς ἀρκετὰς δυσκολίας, ἀλλὰ μόνον μὲ τὴν μορφὴν ***τοῦ μερισμοῦ***, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦν νὰ ἀντιληφθοῦν οἱ παῖδες πολὺ εὐκολώτερα, διότι τὴν ἔχουν συναντήσει καὶ εἰς τὸν προσχολικὸν χρόνον.

Αἱ δυναταὶ ἀσκήσεις τοῦ μερισμοῦ εἰς τὴν σειρὰν 1—10 εἶναι αἱ ἑξῆς 17:

2:2	3:3	4:4	5:5	6: 6
4:2	6:3	8:4	10:5	7: 7
6:2	9:3			8: 8
8:2				9: 9
10:2				10:10

Ἀπὸ τὰς ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως, αἱ ὁποῖαι εἶναι δυναταὶ εἰς τὴν σειρὰν 1—20, παραθέτομεν μόνον ἐκείνας, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀπαιτεῖ ὑπερπήδησιν τοῦ 10 καὶ αἱ ὁποῖαι μόνον εἶναι νέαι καὶ δυσχερεῖς διὰ τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς αὐτῆς. Εἶναι δὲ αὐταὶ αἱ ἑξῆς:

9+2	8+3	7+4	6+5	5+6	4+7	3+8	2+9
9+3	8+4	7+5	6+6	5+7	4+8	3+9	2+10
9+4	8+5	7+6	6+7	5+8	4+9	3+10	
....	....	....	....	5+9	4+10		
....	....	....	....	5+10			
....	....	....	6+10				
....	....	7+10					
....	8+10						
9+10							

Ἐπίσης ἀπὸ τὰς εἰς τὴν ἰδίαν σειρὰν δυνατὰς ἀσκήσεις τῆς ἀφαιρέσεως παραθέτομεν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον μόνον ἐκείνας, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀπαιτεῖ ὑπερπήδησιν τοῦ 10 καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ἑξῆς:

11—2	12—3	13—4	14—5	15—6	16—7	17—8	
11—3	12—4	13—5	14—6	15—7	16—8	17—9	
11—4	12—5	13—6	14—7	15—8	16—9	17—10	
.....	.....	.....	.....	15—9	16—10		
11—10	12—10	13—10	14—10	15—10			
						18—9	19—10
						18—10	

Αἱ νέαι διὰ τοὺς μαθητὰς ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν σειρὰν 1—20 εἶναι αἱ ἑξῆς:

11×1	6×2	4×3	3×4	3×5	2×6	2×7
12×1	7×2	5×3	4×4	4×5	3×6	2×8
.....	8×2	6×3	5×4			2×9
.....	9×2					2×10
20×1	10×2					

Αἱ δυναταὶ ἀσκήσεις τῆς μετρήσεως εἰς τὴν ἰδίαν σειρὰν εἶναι αἱ ἑξῆς:

1 εἰς τὸ 1	2 εἰς τὸ 2	3 εἰς τὸ 3	4 εἰς τὸ 4	5 εἰς τὸ 5
1 εἰς τὸ 2	2 εἰς τὸ 4	3 εἰς τὸ 6	4 εἰς τὸ 8	5 εἰς τὸ 10
1 εἰς τὸ 3	2 εἰς τὸ 6	3 εἰς τὸ 9	4 εἰς τὸ 12	5 εἰς τὸ 15
....	....	3 εἰς τὸ 12	4 εἰς τὸ 16	5 εἰς τὸ 20
....	....	3 εἰς τὸ 15	4 εἰς τὸ 20	
1 εἰς τὸ 20	2 εἰς τὸ 20	3 εἰς τὸ 18		
6 εἰς τὸ 6	7 εἰς τὸ 7	8 εἰς τὸ 8	9 εἰς τὸ 9	10 εἰς τὸ 10
6 εἰς τὸ 12	7 εἰς τὸ 14	8 εἰς τὸ 16	9 εἰς τὸ 18	10 εἰς τὸ 20
6 εἰς τὸ 18				

Τέλος αἱ νέαι ἀσκήσεις τοῦ μερισμοῦ εἰς τὴν σειρὰν 1—20 εἶναι αἱ ἑξῆς:

12:2	12:3	12:4	15:5	12:6	14: 7
14:2	15:3	16:4	20:5	18:6	16: 8
16:2	18:3	20:4			18: 9
18:2					20:10
20:2					

Ἀναγκαῖον τώρα εἶναι νὰ ὑπομνήσωμεν ἐδῶ τὸ καὶ προηγουμένως (ἴδ. ἀν. σελ. 400) λεχθέν, ὅτι δηλαδὴ μερικοὶ Μεθοδικοὶ ὑποστηρίζουν, ὅτι εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—10 ἀρκετὸν εἶναι νὰ ἀσκοῦνται οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν, περιττὸν δὲ εἶναι νὰ ἀσχολοῦνται καὶ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ ἐμφανίζωνται κατὰ πρῶτον εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—20. Ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς αὐτοὺς ὁ Büttner (ὅπ. ἀν., σ. 75 κ. ἀκ.) φέρει πρὸς ὑποστήριξιν τῆς γνώμης αὐτῆς τὸ ἐπιχείρημα, ὅτι αἱ ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως εἶναι κατὰ κανόνα ἀνώτεραι ἀπὸ τὰς δυνάμεις, τὰς ὁποίας ἔχουν οἱ παῖδες, ὅταν διδάσκωνται τοὺς ἀριθμοὺς 1—10. Δι' αὐτὸ δὲ μόλις συγκατατίθεται εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν εὐκολωτέρων μόνον ἀσκήσεων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ μάλιστα εἰς ἐκείνας μόνον τὰς τάξεις, αἱ ὁποῖαι λειτουργοῦν μὲ λίαν εὐνοϊκὰς συνθήκας. Οἱ Rein, Pickel καὶ Scheller (Theorie und Praxis κ.τ.λ., Das erste Schuljahr, ἔκδ 6, σελ. 351 κ. ἀκ.) ἀποκλείουν ὅλως διόλου κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—10 (ἤτοι ὅλον τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος, ἀφοῦ ἡ διδασκαλία τῆς σειρᾶς αὐτῆς καταλαμβάνει εἰς τὸ πρόγραμμά των ὁλόκληρον τὸ ἔτος αὐτό,) τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν διὰ δύο λόγους, πρῶτον μέν, διότι καὶ αὐτοὶ νομίζουν, καθὼς ὁ Büttner, ὅτι αἱ πράξεις αὗται εἶναι ἀνώτεραι ἀπὸ τὰς ἀντιληπτικὰς δυνάμεις τῶν μαθητῶν τῆς πρώτης τάξεως, (διότι οἱ μαθηταὶ αὐτοὶ δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ κατανοήσουν τὴν φύσιν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τοῦ διαιρέτου, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ὅπως οἱ συνήθεις ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους μανθάνουν καὶ γνωρίζουν οἱ παῖδες, δὲν λέγουν δηλ., ὅπως οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, πόσας φορὰς πρέπει νὰ ληφθῇ ἡ μονάς, ἀλλὰ πόσας φορὰς πρέπει νὰ ληφθῇ (νὰ τεθῇ ἢ νὰ ἀφαιρεθῇ) ἕνα πλῆθος μονάδων, δὲν εἶναι δηλ. ἀριθμοὶ παραστατικοὶ ἑνὸς πλήθους πραγμάτων, ἀλλ' οὕτως εἰπεῖν ἀριθμοὶ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ἀριθμοὶ πράξεων), δεύτερον δὲ διότι φρονοῦν, ὅτι, διὰ νὰ κατανοηθῇ ἡ φύσις τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τοῦ διαιρέτου, δὲν ἀρκοῦν αἱ ἐλάχισται ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, αἱ ὁποῖαι εἶναι δυναταὶ ἐντὸς τῆς σειρᾶς 1—10. Τέλος ὁ Hartmann (ὅπ. ἀν., σ. 304 κ. ἀκ.) προτιμᾷ νὰ παραλείψῃ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—10, ὄχι ὅμως διότι φρονεῖ, ὅπως οἱ Büttner, Rein κ.τ.λ., ὅτι αἱ πράξεις αὗται παρέχουν ὑπερβολικὰς δυσκολίας εἰς τοὺς μαθητάς, ἀλλὰ ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι εὑρίσκει, ὅτι ἡ ἐφαρμογή των εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν εἶναι πολὺ περιωρισμένη, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι θεωρεῖ σκοπιμώτερον νὰ δαπανήσῃ τὸν σχετικὸν χρόνον εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν καθαρῶν δεκάδων (10, 20, 30 κ.τ.λ.). Ἐν τούτοις προσθέτει ὁ Hartmann, ὅτι οἱ ἐπιθυμοῦντες νὰ διδάξουν καὶ τὰς πράξεις αὐτὰς εἰς τὴν σειρὰν 1—10 ἠμποροῦν νὰ τὸ κάμουν, βέβαιοι ὄντες, ὅτι θὰ εἶναι κατανοηταὶ εἰς τοὺς μαθητάς, καὶ λαμβάνοντες μόνον

ὑπ' ὄψιν των, ὅτι ἡ διαίρεσις πρέπει νὰ παρουσιασθῇ μόνον μὲ τὴν μορφὴν τῆς μετρήσεως, τὴν ὁποίαν κατὰ τὴν γνώμην του ἠμποροῦν νὰ ἀντιληφθοῦν οἱ μαθηταὶ εὐκολώτερα ἀπὸ τὸν μερισμόν, διότι εἰς μὲν τὴν μέτρησιν δίδονται δύο συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται ἀπὸ τοὺς παῖδας ἡ ἐκτέλεσις μιᾶς γνωστῆς πράξεως (τῆς ἀφαιρέσεως), εἰς δὲ τὸν μερισμὸν ἀπὸ τοὺς δύο διδομένους ἀριθμοὺς ὁ ἕνας εἶναι ἀφῃρημένος, ζητεῖται δὲ ἀπὸ τοὺς παῖδας ἡ ἐκτέλεσις μιᾶς νέας πράξεως. Ἀκριβῶς δὲ διότι ὁ Hartmann δὲν ἀποκλείει τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν (μὲ τὴν μορφὴν τῆς μετρήσεως) εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—10, δι' αὐτὸ καὶ εἰς τὸ πρόγραμμά του τῆς κατανομῆς τῆς ὕλης εἰς τὰ σχολικὰ ἔτη τοῦ δημοτικοῦ σχολείου ἔχομεν ἀναγράψει καὶ τὴν διδασκαλίαν τῶν πράξεων αὐτῶν εἰς τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος (ἴδ. ἀνωτ. σ. 396).

Ἐναντίον τῆς γνώμης τῶν ἀνωτέρω Μεθοδικῶν πρέπει νὰ τονισθῇ, ὅτι καὶ ***ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ὀρθὸν εἶναι νὰ διδάσκωνται καὶ εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 1—10***, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι χωρὶς τὴν διδασκαλίαν καὶ τῶν πράξεων αὐτῶν δὲν ἠμποροῦν νὰ σχηματισθοῦν αἱ ἔννοιαι τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καθ' ὅλα σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι τὸ περιωρισμένον τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως εἰς τὴν σειρὰν 1—10, ἂν δὲν εἶναι λόγος συνηγορῶν διὰ τὴν διδασκαλίαν των εἰς τὴν σειρὰν αὐτήν, δὲν εἶναι ὅμως καὶ ἀποχρῶν λόγος τοῦ ἀποκλεισμοῦ των, τέλος δὲ διότι, ὅπως παρατηρεῖ καὶ ὁ Hartmann, ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων αὐτῶν δὲν παρουσιάζει εἰς τοὺς μαθητὰς ὑπερβολικὰς δυσκολίας. Ὡς πρὸς τὸ τελευταῖον αὐτὸ ἔχομεν ἰδιαιτέρως νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὰς μὲν ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χαρακτηρίζει σχετικὴ εὐκολία, αἱ δὲ πράγματι δυσκολώτεραι ἀσκήσεις τῆς διαιρέσεως θὰ γίνωνται κατανοηταὶ εἰς τοὺς μαθητάς, ἂν δὲν παρουσιάζωνται εἰς αὐτοὺς μὲ τὴν μορφὴν τῆς μετρήσεως, ὅπως θέλει ὁ Hartmann, ἀλλὰ μὲ τὴν μορφὴν τοῦ μερισμοῦ, ἡ ὁποία, ὅπως εἴδαμεν προηγουμένως (ἴδ. ἀν. σ. 403) καὶ θὰ ἴδωμεν καὶ κατωτέρω, καὶ γνωστὴ εἶναι εἰς τοὺς μαθητὰς ἀπὸ τὸν προσχολικὸν χρόνον καὶ καταλλήλως ἐμφανιζομένη καὶ διδασκομένη θὰ παρουσιάζῃ μὲν καὶ τὸν διαιρέτην συγκεκριμένον, δὲν θὰ δίδῃ δὲ τὴν ἐντύπωσιν νέας πράξεως.

Ὅτι ἀκόμη πρέπει νὰ προστεθῇ, εἶναι τοῦτο, ὅτι δηλ. εἰς τὴν διδασκαλίαν καὶ τῶν δύο σειρῶν 1—10 καὶ 1—20, ἰδίως δὲ τῆς πρώτης, πρέπει νὰ ὁδηγοῦνται οἱ μαθηταὶ ὄχι μόνον νὰ ἐκτελοῦν τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις μὲ ἐπίγνωσιν καὶ εὐκολίαν, ἀλλὰ καὶ ***νὰ ἐντυπώνουν στερεὰ εἰς τὴν μνήμην των τὰ ἐξαγόμενά των***, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι χωρὶς τὴν στερεὰν ἐντύπωσιν τῶν ἐξαγομένων αὐτῶν θὰ προσκρούῃ ὁλονὲν εἰς δυσκολίας ἡ ἀρίθμησις εἰς τὰς κατόπιν ἀριθμητικὰς σειράς, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι μὲ αὐτὴν θὰ κατορθώνουν οἱ μαθηταὶ νὰ παριστάνουν πάντοτε τοὺς ἀριθμοὺς τῶν δύο πρώτων σειρῶν μὲ ὅλην τὴν δυνατὴν σαφήνειαν καὶ εὐκρίνειαν.

Ἐπίσης πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι εὐθὺς ἀπὸ τὰ πρῶτα μαθήματα τοῦ προκειμένου σχολικοῦ ἔτους θὰ ἀσκοῦνται οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν λύσιν καὶ ***ἐφηρμοσμένων*** προβλημάτων. Θὰ προκαλοῦνται δὲ εἰς αὐτὴν τόσον κατ' αὐτὴν τὴν διδασκαλίαν τοῦ νέου, ὅσον ἰδίως εἰς τὸ στάδιον τῆς ἐφαρμογῆς του. Θὰ λαμβάνεται δὲ τὸ ὑλικόν των ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀπὸ τὰ διάφορα μαθήματα, τὰ ὁποῖα διδάσκονται εἰς τὴν τάξιν, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀπὸ τὸν καθημερινὸν βίον. Ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῶν τελευταίων αὐτῶν προβλημάτων θὰ μανθάνουν οἱ μαθηταὶ εἰς μὲν τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—10 τὸ λεπτόν, τὸ πεντάλεπτον καὶ τὸ δεκάλεπτον, τὴν ἡμέραν καὶ τὴν ἑβδομάδα, τὸ μέτρον καὶ τὴν ὀκᾶν, εἰς δὲ τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—20 καὶ τὸ εἰκοσάλεπτον καὶ τὴν δωδεκάδα (1 πεντάλ. =5 λεπτά, 1 δεκάλ.=10 λεπτά, 2 πεντάλεπτα, 1 εἰκοσάλ.=20 λεπτά, 2 δεκάλ., 4 πεντάλ., 1 ἑβδομὰς=7 ἡμέραι., 1 δωδεκὰς πραγμάτων=12 πράγματα). Μὲ τὴν γνῶσιν τῶν νομισμάτων καὶ τῶν μέτρων αὐτῶν εἰσάγονται οἱ μικροὶ μαθηταὶ ἀβίαστα εἰς τοὺς ***συμμιγεῖς ἀριθμούς***, μὲ τὴν ἀρίθμησιν δὲ ἐπάνω εἰς αὐτὰ μανθάνουν ἐπίσης ἀβίαστα νὰ ἐκτελοῦν διαφόρους εὐκόλους ἀριθμητικὰς πράξεις ἐπάνω εἰς τοὺς συμμιγεῖς (π.χ. εὐκόλους τροπὰς εἰς μονάδας κατωτέρας ἢ ἀνωτέρας τάξεως κ.τ.λ.).

Ὁποιαδήποτε τώρα καὶ ἂν εἶναι τὰ προβλήματα, τῶν ὁποίων τὴν λύσιν ζητοῦμεν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς τοῦ πρώτου σχολικοῦ ἔτους, δὲν πρέπει κανὲν ἀπὸ αὐτὰ νὰ εἶναι ***πολυσύνθετον***. Ἀπαιτοῦντες ἀπὸ τοὺς μαθητὰς αὐτοὺς τὴν λύσιν τέτοιων δυσκόλων προβλημάτων ζητοῦμεν φυσικὰ πράγματα ἀνώτερα ἀπὸ τὰς δυνάμεις των.

Σημειωτέον ἐπίσης, ὅτι οἱ μαθηταὶ τοῦ πρώτου σχολικοῦ ἔτους θὰ ἀριθμοῦν ἀποκλειστικὰ ἀπὸ ***μνήμης***. Ἐν τούτοις θὰ μάθουν καὶ ***τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν*** καὶ θὰ ἐπασχολοῦνται καὶ μὲ ***τὴν γραπτὴν παράστασιν τῶν ἀπὸ μνήμης ἀριθμουμένων.***

Περιττὸν δὲ εἶναι νὰ τονισθῇ, ὅτι εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 11—20 θὰ ***ἐπαναλαμβάνεται*** καταλλήλως ἡ ὕλη τῆς σειρᾶς 1—10.

Ὅ,τι τέλος ὑπολείπεται νὰ ἐξακριβωθῇ, εἶναι τὸ ζήτημα, ἀπὸ ποῖον ἀριθμὸν τῆς σειρᾶς 1—10 πρέπει νὰ ἀρχίσῃ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία, διότι εἶναι φανερόν, ὅτι, ἂν οἱ μαθηταὶ ἔχουν ἀπὸ τὸν προσχολικὸν χρόνον σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας μερικῶν μελῶν τῆς σειρᾶς 1—10 καὶ γνωρίζουν νὰ ἐκτελοῦν ὡρισμένας ἀριθμητικὰς πράξεις ἐπάνω εἰς αὐτά, ὁ διδάσκαλος δὲν πρέπει νὰ θεωρήσῃ τὰ μέλη αὐτὰ ὡς ἄγνωστα, ἀλλ' ὡς γνωστὰ καὶ ἐπάνω εἰς αὐτὰ ὡς γνωστὰ νὰ ἐποικοδομήσῃ τὴν διδασκαλίαν του.

Οἱ διδάξαντες εἰς τὴν πρώτην τάξιν τοῦ δημοτικοῦ σχολείου θὰ ἔχουν ἀσφαλῶς παρατηρήσει, ὅτι ὅλοι οἱ μαθηταί, οἱ φοιτῶντες διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸ σχολεῖον, μεταχειρίζονται μὲ ἐπίγνωσιν ***τὰ ἀόριστα*** ἀριθμητικά: ἕνα καὶ πολλά, λίγα καὶ πολλά, μερικὰ καὶ ὅλα, περισσότερα καὶ ὀλιγώτερα κ.τ.λ., ὅτι ἐπίσης κάμνουν χρῆσιν τοῦ ἑνικοῦ καὶ τοῦ πληθυντικοῦ ἀριθμοῦ, τέλος δὲ ὅτι γνωρίζουν καὶ μερικοὺς ὡρισμένους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους καὶ μεταχειρίζονται, ἂν καὶ συνηθέστατα ὄχι ὀρθά. Ὅλα αὐτὰ δεικνύουν ἀσφαλῶς, ὅτι οἱ παῖδες αὐτοὶ ἠμποροῦν πλέον νὰ παραβλέπουν τὰς ποιότητας τῶν πραγμάτων καὶ νὰ προσέχουν μόνον εἰς τὸ πλῆθός των, ὅτι αἰσθάνονται τὴν ἀνάγκην νὰ διακρίνουν τὰ διάφορα πλήθη τὸ ἕνα ἀπὸ τ' ἄλλο, ὅτι μὲ ὀλίγας λέξεις ἔχουν πλέον σχηματίσει καὶ κατέχουν τὴν ***γενικὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ***. Ἀλλ' ἂν κατέχουν τὴν γενικὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ, δὲν εἶναι ἐξ ἄλλου βέβαιον, ὅτι ἔχουν σχηματίσει ***καὶ ὅλως διόλου σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας*** ἔστω καὶ ἐλαχίστων ***ὡρισμένων*** ἀριθμῶν. Πολλοὶ βέβαια ἀπὸ αὐτοὺς ἠμποροῦν νὰ λέγουν σωστὰ ἀρκετοὺς ὡρισμένους ἀριθμοὺς καὶ μάλιστα εἰς τὴν φυσικήν των σειράν. Σχετικαὶ ἔρευναι τοῦ Hartmann (Analyse des kindlichen Gedankenkreises, σ. 80), συνεχισθεῖσαι 5 ὁλόκληρα ἔτη, ἀπέδειξαν, ὅτι ἀπὸ 1312 ἑξαετῆ παιδία, εἰσερχόμενα εἰς τὸ δ. σχολεῖον τῆς Annaberg, τὰ 861, ἤτοι 66°/₀, ἐγνώριζαν νὰ μετροῦν ἕως τὸ 10. Παρόμοιαι ἔρευναι τοῦ Räther κατέδειξαν, ὅτι ἀπὸ 1217 παιδία, εἰσερχόμενα εἰς τὰ δ. σχολεῖα τῆς Βρεσλαυΐας, 78°/₀ ἠμποροῦσαν ἐπίσης νὰ ἀριθμοῦν ἕως τὸ 10. Ἐπίσης δὲ καὶ ὁ Tanck ἀπὸ σχετικὰς ἐρεύνας, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν εἰς 229 παιδία εἰσερχόμενα εἰς τὸ δ. σχολεῖον τοῦ Neumünster, εἶχε τὸ πόρισμα, ὅτι 60 °/₀ ἀπὸ αὐτὰ ἠμποροῦσαν νὰ ἀριθμοῦν ἕως τὸ 10. Ἀλλὰ ὅλοι οἱ ἐρευνηταὶ αὐτοὶ ἔκαμαν μαζὶ καὶ τὴν παρατήρησιν, ὅτι τὰ πορίσματά των ἐδείκνυαν μόνον, ὅτι οἱ ἐξετασθέντες παῖδες κατεῖχαν ***τὰ ὀνόματα*** τῶν 10 πρώτων ὡρισμένων ἀριθμῶν εἰς τὴν κανονικήν των σειράν, καὶ ὅτι ἡ βαθυτέρα τοῦ πράγματος ἐξέτασις ἐφανέρωσε, ὅτι οἱ παῖδες αὐτοὶ δὲν συνέδεαν κατὰ κανόνα μὲ τὰ ὀνόματα τῶν ὡρισμένων αὐτῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ πραγματικόν των περιεχόμενον, δὲν εἶχαν ἑπομένως σαφῆ καὶ εὐκρινῆ ἔννοιαν τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς. Ὅ,τι δὲ ἀπὸ τὴν βαθυτέραν αὐτὴν ἔρευναν ἔμεινεν ὡς ἀσφαλές, εἶναι μόνον τοῦτο, ὅτι δηλ. ὅλοι οἱ εἰς τὸ σχολεῖον εἰσερχόμενοι μαθηταὶ γνωρίζουν καὶ τὸ ὄνομα καὶ τὸ περιεχόμενον μόνον τοῦ ἀριθμοῦ 2, ἀλλ' ὅτι καὶ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ τὴν ἔννοιαν δὲν τὴν ἔχουν τόσον σαφῆ καὶ εὐκρινῆ, ὅσον πρέπει νὰ εἶναι, διὰ να στηριχθῇ εἰς αὐτὴν ὡς γνωστὴν ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία. Ἐφόσον δὲ τὸ πρᾶγμα ἔχει ἔτσι, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία πρέπει νὰ ἀρχίσῃ τὸ ἔργον της μὲ τὴν ἐπεξεργασίαν τοῦ πρώτου καθαυτὸ ἀριθμοῦ, ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ 2 (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 1, σ. 26 κ. ἀκ.).

β) Ἡ ὕλη τοῦ δευτέρου σχολικοῦ ἔτους.

Ἐφόσον εἰς τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος ἔγινε ἡ διδασκαλία τῶν σειρῶν 1—10 καὶ 1—20, εἰς τὸ δεύτερον σχολικὸν πρέπει νὰ

γίνῃ ἡ διδασκαλία τῆς κατόπιν φυσικῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, ἤτοι τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν 1(21)—100.

Πέραν τῆς σειρᾶς αὐτῆς δὲν πρέπει νὰ προχωρήσῃ ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία εἰς τὸ ἔτος αὐτὸ μὲ τὰς συνήθεις σχολικὰς συνθήκας. Ὁ δὲ λόγος τοῦ πράγματος εἶναι, ὅτι οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ μάθουν νὰ ἐκτελοῦν τὰς ἀσκήσεις τῆς σειρᾶς αὐτῆς μὲ ὅλην τὴν δυνατὴν εὐκολίαν καὶ τελειότητα, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι ἀποτελοῦν τὴν βάσιν ὅλης τῆς κατόπιν ἀριθμήσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν ἀνήκουν κατὰ μέγα μέρος αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις, αἱ ἐκτελούμεναι εἰς τὸν καθημερινὸν βίον ἀπὸ μνήμης. Φυσικὰ δὲ ἡ διάθεσις ἑνὸς σχολικοῦ ἔτους διὰ τὴν κατόρθωσιν τοῦ σκοποῦ αὐτοῦ δὲν ἀποτελεῖ σπατάλην χρόνου (πρβλ. Räther, ὅπ. ἀν., σ. 88).

Ἂν τώρα μερικοὶ Παιδαγωγικοί, ὅπως ὁ Hartmann (ἴδ. ἀνωτ. σελ.396), οἱ Rein, Pickel κ.τ.λ. καὶ ἄλλοι, ἔχουν τὴν γνώμην, ὅτι διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς σειρᾶς 1—100 πρέπει νὰ διατεθοῦν 2 σχολικὰ ἔτη, ἤτοι τὸ δεύτερον καὶ τὸ τρίτον, εἰς τὴν γνώμη αὐτὴν πρέπει νὰ ἀντιταχθῇ ἡ διδακτικὴ πεῖρα, ἡ ὁποία μαρτυρεῖ, ὅτι ἡ σειρὰ 1—100 ἠμπορεῖ νὰ διδαχθῇ πολὺ καλὰ ἐντὸς τοῦ δευτέρου σχολικοῦ ἔτους.

Ἐφόσον ἡ ἀρτιότης τῶν σχολικῶν συνθηκῶν ἐπιτρέπει νὰ διδαχθοῦν οἱ μαθηταὶ τοῦ πρώτου σχολικοῦ ἔτους τὴν σειρὰν 1—100 (ἴδ. ἀνωτ. σελ.401), ἐννοεῖται, ὅτι οἱ μαθηταὶ αὐτοὶ μὲ τὰς ἴδιας σχολικὰς συνθήκας θὰ διδαχθοῦν τὸ δεύτερον σχολικὸν ἔτος τὴν σειρὰν 1—1000.

Ἐφόσον ἀπεναντίας ἡ δυσμένεια τῶν σχολικῶν συνθηκῶν δὲν ἐπιτρέπει εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν νὰ προχωρήσῃ κατὰ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος πέραν τῆς σειρᾶς 1—10 (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 401), κατὰ τὸ δεύτερον θὰ διδάσκεται πρῶτον μὲν ἡ σειρὰ 1—20, κατόπιν δὲ ἡ σειρὰ 1—100.

Μὲ τὴν διδασκαλίαν τώρα τῆς σειρᾶς 1(21) - 100 θὰ πρόκειται οἱ μαθηταὶ ἰδίως: 1) νὰ σχηματίσουν σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τῶν νέων ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς καὶ 2) νὰ μάθουν νὰ ἐκτελοῦν μὲ ὅλην τὴν δυνατὴν τελειότητα καὶ εὐκολίαν τὰς θεμελιώδεις ἀριθμητικὰς πράξεις ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς σειρᾶς.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς πράξεις αὐτάς, πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι εἰς τάξεις, αἱ ὁποῖαι δὲν λειτουργοῦν μὲ εὐνοϊκὰς συνθήκας, θὰ ἠμποροῦσαν νὰ παραλειφθοῦν οἱ πολλαπλασιασμοὶ διψηφίων μὲ μονοψηφίους καὶ αἱ διαιρέσεις, αἱ δίδουσαι ὡς πηλίκον διψήφιον ἀριθμόν. Σημειωτέον ἐπίσης, ὅτι κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ θὰ διδάσκεται καὶ ***ἡ μὲ ὑπόλοιπον διαίρεσις***. Ἡ διαίρεσις αὐτὴ ἐκτὸς τῆς ἄλλης της χρησιμότητος ἔχει καὶ αὐτήν, ὅτι δηλ. ἠμπορεῖ νὰ δώσῃ ἀφορμὴν καὶ νὰ χρησιμοποιηθῇ φυσικώτατα, διὰ νὰ σχηματίσουν οἱ μαθηταὶ ἀκόμη ἀπὸ τὸ ἔτος αὐτὸ καὶ ***κλασματικὰς*** παραστάσεις. Τὸ εἰς τὸν μερισμὸν ἀπομένον ὑπόλοιπον (9 μῆλα : 2 παιδ. =4 μῆλ., ὑπόλ. 1 μῆλον, 7 μῆλα : 3 παιδ.=2 μῆλ., ὑπόλ. 1 μῆλον κ.τ.λ.) πρέπει καὶ αὐτὸ νὰ μερισθῇ εἰς 2,3 κ.τ.λ. ἴσα μέρη. Ἐφόσον δὲ γίνεται πράγματι αὐτὸ καὶ κόπτεται τὸ 1 ἀκέραιον μῆλον εἰς τόσα μέρη, εἶναι εὔκολον νὰ δειχθῇ εἰς τοὺς μαθητάς, ὅτι 1 ἀκέραιον ὅλον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο δεύτερα (μισά), τρία τρίτα κ.τ.λ. Ἀλλὰ καὶ ὁ χωρὶς ὑπόλοιπον μερισμὸς δίδει ἀφορμὴν εἰς τὸν σχηματισμὸν κλασματικῶν παραστάσεων. Ὁ μερισμὸς μὲ τὸ 2 δίδει ἀφορμὴν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῆς κλασματικῆς παραστάσεως τῶν δευτέρων, ὁ μερισμὸς μὲ τὸ 3 τῶν τρίτων κ. οὕτ. καθ. Ἀπὸ τὸ δεύτερον λοιπὸν σχολικὸν ἔτος ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ εἰσαχθοῦν εἰς τὰ κλάσματα. Φυσικὰ μὲ τὴν εἰσαγωγὴν αὐτὴν δὲν πρόκειται νὰ γίνῃ καθαυτὸ διδασκαλία τῶν κλασμάτων, ἀλλὰ μόνον προπαρασκευή της. Μὲ αὐτὴν θὰ συναθροίζωνται ὀλίγον κατ' ὀλίγον ὅλαι αἱ κλασματικαὶ παραστάσεις, ὅσαι ἠμποροῦν νὰ παρουσιασθοῦν ἀβίαστα εἰς τὴν ψυχὴν τῶν παίδων καὶ νὰ κατανοηθοῦν εὔκολα ἀπὸ αὐτούς, ἔτσι δὲ κατόπιν ἡ κλασματικὴ ἀρίθμησις, ὅταν θὰ παρουσιασθῇ ὡς κύριον ὑποκείμενον τῆς διδασκαλίας, δὲν θὰ θεωρηθῇ ἀπὸ τοὺς μαθητὰς ὡς κάτι ὁλωσδιόλου νέον, ἀλλὰ θὰ εὕρῃ ἀρκετὰ στηρίγματα εἰς τὴν συνείδησίν των (ἴδ. *Räther*, ὅπ. ἀν., σελ. 126).

Σημειωτέον ἐπίσης, ὅτι καὶ κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ θὰ διδάσκεται μὲν ἀποκλειστικὰ ***ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις***, θὰ προκαλοῦνται ὅμως πάντοτε οἱ μαθηταὶ ***νὰ παριστάνουν καὶ ἐγγράφως*** τὰς ἐκτελουμένας ἀριθμητικὰς πράξεις μὲ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον γίνονται ἀπὸ μνήμης.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ δεύτερον σχολικὸν ἔτος εὐρύνεται ἡ ἐμπειρία τῶν παίδων καὶ ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ ἀπὸ τὴν πραγματικὴν ἄποψιν, θὰ δίδεται φυσικὰ εἰς αὐτὸ περισσότερη παρὰ εἰς τὸ πρῶτον θέσις εἰς ***τὰ ἐφηρμοσμένα*** προβλήματα. Ἐφόσον δὲ θὰ δίδωνται προβλήματα ἐφηρμοσμένα εἰς τὸν καθημερινὸν βίον, θὰ μανθάνουν οἱ μαθηταὶ τὸ πεντηκοντάλεπτον καὶ τὴν δραχμήν, τὸ δίδραχμον, τὸ πεντόδραχμον, τὸ δεκάδραχμον, τὸ 25δραχμον, τὸ 50δραχμον καὶ τὸ 100δραχμον, τὰς ὥρας, τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα λεπτά, τοὺς μῆνας καὶ τὸ ἔτος, τὸ δεκατόμετρον καὶ τὸ ἑκατοστόμετρον, καθὼς καὶ τὸν στατῆρα (1 πεντηκοντάλ.=50 λεπτὰ κ. τ. λ., 1 δρ.=100 λ. κ.τ.λ , 1 ἔτος=52 ἑβδ., 1 ἔτος=12 μῆν., 1 μὴν=30 ἡμέρ., 1 ἡμέρ.=24 ὥρ., 1 ὥρα=60 λεπτά, 1 λεπτὸν=60 δευτερόλεπτα, 1 μέτρ.=10 δεκατόμετρα, 100 ἑκατοστόμετρα, 1 στατὴρ=44 ὀκ.), θὰ ἐξακολουθοῦν δὲ ἐξ ἄλλου νὰ πλουτίζουν ἀβίαστα τὰς εἰς ***τοὺς συμμιγεῖς*** ἀριθμοὺς ἀναφερομένας παραστάσεις των καὶ νὰ ἐκτελοῦν σχετικὰς μὲ αὐτοὺς ἀσκήσεις.

Τέλος πρέπει νὰ προστεθῇ, ὅτι καὶ εἰς τὸ ἔτος αὐτὸ ἡ διδασκαλία τῶν νέων ὑλῶν θὰ συνοδεύεται ἀπὸ συστηματικὴν ***ἐπανάληψιν*** τῶν θεμελιωδεστέρων ἀπὸ τὰς προδιδαχθείσας ὕλας.

γ) Ἡ ὕλη τοῦ τρίτου σχολικοῦ ἔτους.

Ἐφόσον μὲ τὸ δεύτερον σχολικὸν ἔτος τελειώνει ἡ διδασκαλία τῆς σειρᾶς 1—100, ὑπολείπονται πρὸς ἀποπεράτωσιν τῆς διδασκαλίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δύο πράγματα κυρίως: 1) ἡ ἐπέκτασις τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς πέραν τοῦ 100 καὶ 2) ἡ ἀρίθμησις εἰς τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμούς.

Ἡ ἐπέκτασις τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ προχωρήσῃ εἰς τὴν μεσαίαν ἐν γένει βαθμίδα τοῦ δημοτικοῦ σχολείου πέραν τῶν ἑκατομμυρίων, τὰ ὁποῖα ἀπαντοῦν οἱ μαθηταὶ τῆς βαθμίδος αὐτῆς μόνον εἰς τὸ μάθημα τῆς Γεωγραφίας καὶ εἰς αὐτὸ δὲ πολὺ σπάνια. Οἱ ἀνώτεροι ἀπὸ τὰ ἑκατομμύρια ἀριθμοὶ ἠμποροῦν νὰ διδαχθοῦν εἰς τὴν τελευταίαν βαθμίδα τοῦ δημοτικοῦ σχολείου.

Μερικοὶ Μεθοδικοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Hartmann (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 396), διαιροῦν τὴν μέχρι τῶν ἑκατομμυρίων σειρὰν εἰς τὰς σειρὰς 1—1000 καὶ 1 - τῶν ἑκατομμυρίων, ἀφιερώνουν δὲ διὰ καθεμίαν ἀπὸ αὐτὰς ἕνα σχολικὸν ἔτος, διδάσκοντες καὶ εἰς τὰς δύο τὴν ἀρίθμησιν α) εἰς τοὺς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς καὶ β) εἰς τοὺς συμμιγεῖς. Ἀλλ' ἡ ἀρίθμησις τῶν συμμιγῶν εἶναι τόσον ἰδιότυπη, ὥστε, ὅπως πολὺ ὀρθὰ παρατηρεῖ ὁ *Räther* (ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σελ. 3), μὲ τὴν ἀρίθμησιν εἰς τοὺς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς 1—1000 συγγενεύει πολὺ περισσότερον ἡ ἀρίθμησις εἰς τοὺς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς 1—ἑκατομμυρ. παρὰ ἡ ἀρίθμησις εἰς τοὺς συμμιγεῖς τῆς σειρᾶς 1—1000. Δι' αὐτὸ εἶναι ὀρθότερον εἰς τὴν ἀρίθμησιν εἰς τοὺς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς 1—1000 νὰ ἐπακολουθήσῃ ἡ ἀρίθμησις εἰς τοὺς ὁμοίους ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς 1—ἑκατομμυρ. Ἄλλωστε ἡ καθαυτὸ ἀρίθμησις εἰς τοὺς συμμιγεῖς, καθὼς δεικνύει ἡ ἐμπειρία, εἶναι ἀρκετὰ δύσκολη καὶ ὑπερβαίνει τὰς δυνάμεις τῶν μαθητῶν τῆς τρίτης τάξεως. Δι' αὐτὸ ὀρθότερον εἶναι τὸ τρίτον σχολικὸν ἔτος νὰ διδαχθῇ ***ἡ ἀρίθμησις τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς 1—τῶν ἑκατομμυρίων.*** Εἶναι ἀληθές, ὅτι ἀρκετοὶ Μεθοδικοί, καθὼς καὶ ἐπίσημα προγράμματα εὑρίσκουν καὶ τὸ ὑλικὸν αὐτὸ πολὺ διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς τρίτης τάξεως καὶ δι' αὐτὸ τὴν μὲν διδασκαλίαν τοῦ τρίτου σχολικοῦ ἔτους περιορίζουν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—1000, τοὺς δὲ μέχρι τοῦ ἑκατομμυρίου ἀριθμοὺς διδάσκουν κατὰ τὸ 4 σχολικὸν ἔτος, εἰς τὸ ὁποῖον διδάσκουν κατόπιν καὶ τοὺς συμμιγεῖς. Νομίζομεν ἐν τούτοις, ὅτι τὸ προκείμενον ὑλικὸν δὲν θὰ ἐπιβαρύνῃ σημαντικὰ τοὺς μαθητὰς τοῦ τρίτου σχολικοῦ ἔτους, διότι ἡ μὲν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1001—τῶν ἑκατομμυρ. θὰ περιορίζεται, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον, εἰς τοὺς στρογγύλους καὶ εὐμνημονεύτους ἀριθμούς, ἡ δὲ γραπτὴ ἀρίθμησις εἰς τοὺς ἰδίους ἀριθμοὺς δὲν θὰ παρουσιάζῃ καμίαν ἰδιαίτερην δυσκολίαν εἰς τοὺς μαθητάς, καθόσον δὲν διαφέρει ἀπὸ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν ἐπάνω εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—1000, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἔχουν ἐντελῶς ἀσκηθῆ κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ θὰ ἐξακολουθήσῃ φυσικὰ ὁ πλουτισμὸς τῶν μαθητῶν μὲ ***κλασματικὰς*** παραστάσεις, καθὼς καὶ μὲ παραστάσεις ἀναφερομένας εἰς ***τοὺς συμμιγεῖς*** ἀριθμούς.

Τὸ ἴδιον ἔτος, ὅπως ὑπεδηλώσαμεν ἀμέσως ἀνωτέρω, ἔχομεν δὲ ἀναπτύξει εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς ἀπὸ μνήμης καὶ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως (ἴδ. ἀν. σελ. 217 κ. ἀκ.), θὰ ἀρχίσῃ καὶ ἡ διδασκαλία τῆς καθαυτὸ ἐγγράφου ἢ γραπτῆς ἀριθμήσεως. Ἔτσι κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ θὰ διδάσκωνται ἐκ παραλλήλου καὶ ***ἡ ἀπὸ μνήμης*** καὶ ***ἡ ἔγγραφος ἀρίθμησις***, ἐνῷ δὲν θὰ παύσῃ νὰ συνοδεύῃ τὴν ἀπὸ μνήμης ***ἡ γραπτὴ παράστασις*** τῶν ἀριθμουμένων ***μὲ τὸν τρόπον τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως.*** Ἐνθυμούμενοι τώρα, ὅτι σύμφωνα μὲ τὰ λεχθέντα εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν κεφάλαιον περὶ τῆς ἀπὸ μνήμης καὶ ἐγγράφου ἀριθμήσεως πεδίον ἐφαρμογῆς τοῦ μὲν πρώτου ἀπὸ τὰ εἴδη αὐτὰ τῆς ἀριθμήσεως εἶναι κυρίως τὰ προβλήματα τὰ ἔχοντα μικροτέρους καὶ εὐκολωτέρους ἀριθμούς, τοῦ δὲ δευτέρου τὰ ἔχοντα μεγαλυτέρους καὶ δυσκολωτέρους, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας, ὅτι εἰς μὲν τὴν σειρὰν 1—1000, τῆς ὁποίας οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μικρότεροι καὶ εὐκολώτεροι, πρέπει νὰ ἐπικρατῇ ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις τῆς γραπτῆς, εἰς δὲ τὴν σειρὰν 1—τῶν ἑκατομμυρ. πρέπει νὰ γίνεται τὸ ἐναντίον.

Ὅτι εἰς τὸ τρίτον σχολικὸν ἔτος πρέπει νὰ δίδεται περισσοτέρα θέσις παρὰ εἰς τὰ δύο προηγούμενα εἰς ***τὰ ἐφηρμοσμένα*** προβλήματα, εἶναι εὐνόητον. Ἐπασχολούμενοι δὲ οἱ μαθηταὶ μὲ τὰ προβλήματα αὐτὰ θὰ μανθάνουν τὸ χιλιόδραχμον κ.τ.λ., τὰ δράμια (1 ὀκ.=400 δρ.), τὸ χιλιόμετρον (=1000 μέτρ.), τὸ χιλιοστόμετρον, προσέτι δὲ τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

Καὶ κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ θὰ γίνεται ***συστηματικὴ ἐπανάληψις*** τῶν θεμελιωδεστέρων ἀπὸ τὰς προδιδαχθείσας ὕλας.

δ) Ἡ ὕλη τοῦ τετάρτου σχολικοῦ ἔτους.

Ὅ,τι ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ὑπολείπεται νὰ διδαχθῇ, εἶναι κυρίως μὲν οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί, εἰς τοὺς ὁποίους ἄλλωστε οἱ μαθηταὶ ἔχουν εἰσαχθῆ ἀπὸ τὸ πρῶτον ἀκόμη σχολικὸν ἔτος, κατὰ δεύτερον δὲ λόγον τὰ σύνθετα προβλήματα μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς.

Εὐνόητον ἑπομένως εἶναι, ὅτι τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ἡ ὁποία θὰ διδαχθῇ κατὰ τὸ 4 σχολικὸν ἔτος, πρέπει νὰ ἀποτελέσουν ***οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί***, πρᾶγμα ἄλλωστε τὸ ὁποῖον ἐξάγεται καὶ ἀπὸ ὅσα εἴπαμεν ὁμιλοῦντες διὰ τὴν ὕλην τοῦ τρίτου σχολικοῦ ἔτους.

Ὅ,τι τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν θὰ διδαχθῇ εἰς τοὺς μαθητὰς τοῦ 4 σχολικοῦ ἔτους, εἶναι προφανῶς τὰ διάφορα εἴδη των (ἤτοι συμμιγεῖς παριστάνοντες μονάδας α) τῆς ἀπαριθμήσεως, β) τοῦ χρόνου, γ) τοῦ μήκους καὶ τῆς ἐπιφανείας, δ) τοῦ βάρους καὶ ε) τῶν νομισμάτων), αἱ τροπαὶ μονάδων ἑνὸς εἴδους συμμιγῶν εἰς μονάδας κατωτέρας ἢ ἀνωτέρας τάξεως καὶ αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις ἐπάνω εἰς τὰ διάφορα εἴδη τῶν συμμιγῶν.

Ποῖαι ἀπὸ τὰς μονάδας τῶν διαφόρων εἰδῶν τῶν συμμιγῶν πρέπει νὰ διδάσκωνται ἐν γένει εἰς τὸ δημοτικὸν σχολεῖον, ἄρα καὶ εἰς τὸ προκείμενον σχολικὸν ἔτος, εἴπαμεν ὁμιλοῦντες διὰ τὴν ἐκλογὴν ἐν γένει τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης (ἴδ. ἀν. σελ. 382). Ὅ,τι μόνον ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν ἐδῶ, εἶναι, ὅτι καὶ ἀπὸ τὰς μονάδας, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ διδαχθοῦν εἰς τὸ δημοτικὸν σχολεῖον, δὲν πρέπει νὰ διδαχθοῦν κατὰ τὸ 4 σχολικὸν ἔτος ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων ἡ κατανόησις προϋποθέτει γεωμετρικὰς γνώσεις, τὰς ὁποίας δὲν ἔχουν ἀκόμη οἱ μαθηταὶ τῆς τετάρτης τάξεως. Ἡ διδασκαλία τῶν μονάδων αὐτῶν πρέπει νὰ γίνῃ εἰς τὴν ἀνωτέραν βαθμίδα τοῦ δημοτ. σχολείου ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς εἰς τὴν βαθμίδα αὐτὴν γινομένης ***ἐπαναλήψεως*** τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν. Δὲν θὰ διδάσκωνται λοιπὸν εἰς τὴν τετάρτην τάξιν αἱ μονάδες τοῦ ὄγκου καὶ τῆς χωρητικότητος, ἀπὸ δὲ τὰς μονάδας τῆς ἐπιφανείας θὰ διδάσκωνται μόνον ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων ἡ γνῶσις εἶναι ἀναγκαιοτάτη διὰ τὸ μάθημα τῆς Γεωγραφίας (τετραγ. μέτρον, τετραγ. χιλιόμετρον, τετραγ. ἑκατοστόμετρον καὶ χιλιοστόμετρον.

Ἀπὸ τὰς μονάδας τῶν διαφόρων συμμιγῶν ἄλλαι μέν, καθὼς εἶναι γνωστόν, ***ἔχουν δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν***, ἄλλαι δὲ ***δὲν ἔχουν***.

Μονάδες, μὴ ἔχουσαι δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν καὶ χρησιμώταται καὶ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν ἄλλων μαθημάτων, εἶναι ἐν πρώτοις ***αἱ μονάδες τῆς ἀπαριθμήσεως***, ἤτοι ἡ δωδεκὰς (δωδεκάδα, ντουζίνα), ἡ ἡμίσεια δωδεκὰς ἢ

ἑξὰς (μισὴ δωδεκάδα ἢ ντουζίνα, ἑξάρι), τὸ ζεῦγος (ζευγάρι) καὶ τὸ τεμάχιον (κομμάτι). Μὲ τὴν δωδεκάδα καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις της ἀγοράζονται καὶ πωλοῦνται π.χ. τὰ πινάκια, τὰ ποτήρια, τὰ μαχαίρια, τὰ πηρούνια καὶ τὰ κοχλιάρια, τὰ μανδίλια, τὰ περιλαίμια κ.τ.λ. Εἰς τὰς σχετικὰς ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ἀρκεῖ προφανῶς νὰ δίδωνται αἱ μονάδες δύο μόνον ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω τάξεις (π. χ. δωδεκ. καὶ ἡμίσ. δωδεκάδ., δωδεκ. καὶ κομμάτια κ.τ.λ.).

Ἄλλαι μονάδες, μὴ ἔχουσαι δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν καὶ ἐπίσης χρησιμώταται, εἶναι ***αἱ μονάδες τοῦ χρόνου*** (ἔτος, μῆνες, ἡμέραι, ὧραι, λεπτά, δευτερόλεπτα). Εἰς τὰς σχετικὰς ἀσκήσεις τῆς μὲν προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἠμποροῦν νὰ παρουσιάζωνται μονάδες καὶ 3 τάξεων (ἔτη, μῆνες, ἡμέραι κ.τ.λ.), τοῦ δὲ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ἀρκεῖ νὰ παρουσιάζωνται μονάδες δύο μόνον τάξεων (ἔτη καὶ μῆνες, μῆνες καὶ ἡμέραι, ἡμέραι καὶ ὧραι, ὧραι καὶ λεπτά). Σύμφωνα δὲ μὲ τὴν ὀρθὴν γνώμην τοῦ Steuer (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 350) ἀπὸ τὰ ***ἐφηρμοσμένα*** προβλήματα τοῦ χρόνου ἀρκεῖ νὰ διδάσκωνται μόνον ὅσα ἀναφέρονται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ***τῆς διαρκείας*** τῶν γεγονότων, περιττεύει δὲ ἡ διδασκαλία ἐκείνων, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς ***τοῦ σημείου τῆς ἐνάρξεως ἢ τῆς λήξεως*** τῶν γεγονότων, καθόσον τὰ τελευταῖα αὐτὰ προβλήματα ἀπαντοῦν σπάνια εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ εἰς τὰ ἄλλα μαθήματα τοῦ δημοτικοῦ σχολείου καὶ ἔχουν σχεδὸν μόνον θεωρητικὴν ἀξίαν. Ἂν κάποτε ζητῆται καὶ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἐνάρξεως ἢ τῆς λήξεως κανενὸς γεγονότος, ἂς γίνεται μόνον κατὰ ἔτη.

Ἄλλαι χρησιμώταται μονάδες, μὴ ἔχουσαι δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν εἶναι ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μήκους ὁ (μικρὸς) πῆχυς καὶ τὰ ῥούπια (μέτρησις ὑφασμάτων) καὶ ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ βάρους ὁ στατήρ, αἱ ὀκάδες καὶ τὰ δράμια, ἀπὸ τὰς ὁποίας πάλιν τάξεις ἀρκοῦν 2 εἰς τὰς σχετικὰς ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Αἱ ἄλλαι συνήθεις μονάδες τοῦ μήκους (μέτρον, δεκατόμετρον, ἑκατοστόμετρον, χιλιοστόμετρον, χιλιόμετρον), τῆς ἐπιφανείας (τετραγωνικὸν μέτρον, χιλιόμετρον (νέον στρέμμα), ἑκατοστόμετρον καὶ χιλιοστόμετρον) καὶ τῶν Ἑλληνικῶν νομισμάτων ἔχουν δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν. Εἰς τὰ σχετικὰ προβλήματα καὶ ἀσκήσεις ἀρκεῖ νὰ χρησιμοποιοῦνται δύο μόνον τάξεις των.

Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί, οἱ μὴ ἔχοντες δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, γράφονται, ὅπως εἶναι γνωστόν, καθὼς ἀπαγγέλλονται (π. χ. 3 πήχ. 7 ρούπ., 5 ἔτ. 6 μῆν. κ.τ.λ.) ἤτοι ὅπως οἱ ἁπλοῖ συγκεκριμένοι ἀκέραιοι. Ἀλλὰ καὶ αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις ἐπάνω εἰς τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς γίνονται καὶ ἀπὸ μνήμης καὶ ἐγγράφως μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον εἰς τοὺς ἁπλοῦς ἀκεραίους, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι ἡ καθεμία των συνδέεται καὶ μὲ μίαν ἄλλην πρᾶξιν, τὴν τροπὴν δηλ. τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως, εἶναι μὲ ἄλλους λόγους πρᾶξις σύνθετη. Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τοὺς συμμιγεῖς τοὺς ἔχοντας δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν, ἠμποροῦν βέβαια καὶ αὐτοὶ νὰ γραφοῦν, ὅπως οἱ μὴ ἔχοντες τὴν ὑποδιαίρεσιν δεκαδικήν, π. χ. 5 δρ. 5 λεπτ. Ἂν συμβῇ αὐτό, ἐπειδὴ καὶ αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις θὰ γίνωνται καὶ εἰς τοὺς συμμιγεῖς αὐτοὺς καὶ προφορικῶς καὶ ἐγγράφως, ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἄλλους, εἶναι προφανές,ὅτι τὸ νέον καὶ ἰδιάζον, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχουν νὰ μάθουν οἱ μαθηταὶ ὡς πρὸς ὅλους τοὺς συμμιγεῖς ἐν συγκρίσει μὲ τοὺς μέχρι τοῦδε διδαχθέντας ἁπλοῦς ἀκεραίους, θὰ εἶναι αὐτὸ μόνον, ὅτι δηλ. τὰ προβλήματα τῶν συμμιγῶν εἶναι πάντοτε σύνθετα προβλήματα ἀκεραίων, ἀπαιτοῦντα διὰ τὴν λύσιν των τὴν ἐκτέλεσιν περισσοτέρων τῆς μιᾶς ἀριθμητικῶν πράξεων. Ἄλλο τίποτε νέον ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως, ἀπὸ τῆς ἀπόψεως δηλ. τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, δὲν θὰ ἔχουν νὰ μάθουν ὡς πρὸς τοὺς συμμιγεῖς οἱ μαθηταί.

Ἀλλὰ οἱ συμμιγεῖς τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως δὲν γράφονται καὶ δὲν ἀριθμοῦνται ἐγγράφως οὔτε εἰς τὸν πρακτικὸν βίον οὔτε εἰς τὰ ἄλλα μαθήματα, ὅπως οἱ μὴ ἔχοντες δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν. Αἱ 5 δρ. καὶ τὰ 5 λεπτ. π.χ. δὲν γράφονται 5 δρ. 5 λεπτ., ἀλλὰ 5,05 δρ. καὶ τὰ 5 χιλιόμετρα καὶ 550 μέτρα δὲν γράφονται 5 χμ. 550 μ., ἀλλὰ 5,550 χμ., γράφονται δηλ. ὡς **δεκαδικοὶ** ἀριθμοί. Ἡ πρόσθεσις 5 δρ. 75 λεπτ. + 4 δρ. 80 λεπτ. δὲν γίνεται ἐγγράφως, ὅπως ἡ πρόσθεσις τῶν ἄλλων συμμιγῶν (δηλ.:

5 δρ. 75 λ.
4 δρ. 80 λ.
———————
155 λ.
1 δρ. 55 λ.
10 δρ. 55 λ.),

ἀλλ' ὅπως ἡ πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν (δηλ. 5,75 δρ.
4,80 »
———————
10,55 δρ.). Καὶ ἐρωτᾶται τώρα: εἶναι ὀρθὸν εἰς τὸ τέταρτον σχολικὸν ἔτος νὰ ἀποφευχθῇ ἡ δεκαδικὴ γραφὴ τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδ. καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησίς των ὡς δεκαδικῶν καὶ νὰ διδαχθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ μόνον ὡς συμμιγεῖς, γραφόμενοι καὶ ἀριθμούμενοι ἐγγράφως μόνον μὲ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον καὶ οἱ ἄλλοι συμμιγεῖς, οἱ μὴ ἔχοντες δεκαδ. τὴν ὑποδιαίρεσιν, μολονότι σπουδαῖοι πρακτικοὶ λόγοι ἐπιβάλλουν τὸ ἐναντίον; Εἶναι ὀρθὸν νὰ διδαχθοῦν οἱ μαθηταὶ τὴν δεκαδικὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησίν των ὡς δεκαδικῶν μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν συμμιγῶν, εἰς τὴν ἐπακολουθοῦσαν δηλ. χωριστὴν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν, μολονότι θὰ βλέπουν ἐν τῷ μεταξύ, ὅτι οἱ συμμιγεῖς αὐτοὶ καὶ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ εἰς τὰ ἄλλα μαθήματα γράφονται καὶ ἀριθμοῦνται ἐγγράφως ὡς δεκαδικοί;

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὰ ἐρωτήματα αὐτὰ ἔχει δοθῇ ἤδη εἰς τὸ κεφάλαιον «περὶ τῆς θέσεως τῶν κοινῶν καὶ τῶν δεκαδ. κλασμάτων εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ δημοτ. σχολείου»(ἴδ. ἀνωτ., σελ. 196 κ.ἀκ.). Ἐκεῖ ἐλέγαμεν, ὅτι, ἐφόσον οἱ συμμιγεῖς τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως γράφονται καὶ ἀριθμοῦνται ἐγγράφως καὶ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ εἰς τὰ ἄλλα μαθήματα τοῦ δημοτ. σχολείου ὡς δεκαδικὰ κλάσματα, εἶναι ἐπάναγκες νὰ ἐξηγηθῇ εἰς τοὺς μαθητὰς ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς γραφῆς καὶ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεώς των, ὅτι δέ, ἐπειδὴ ἡ ἐξήγησις αὐτὴ δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ χωρὶς τὴν γνῶσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των, ἀπαραίτητον εἶναι ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως νὰ διδαχθοῦν καὶ τὰ κλάσματα αὐτὰ καὶ ἡ ἀρίθμησίς των.

Σπεύδομεν ὅμως νὰ ἐπαναλάβωμεν καὶ ἐδῶ τὸ ἐκεῖ τονισθὲν ὅτι δηλ. ἡ διδασκαλία αὐτὴ πρέπει φυσικὰ νὰ περιορισθῇ εἰς ἐκεῖνο μόνον τὸ μέρος τῶν δεκαδ. κλασμάτων καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των, τοῦ ὁποίου ἡ κατανόησις δὲν προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν ἰδιαζόντων νόμων τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως, διότι, ὅπως εἶναι εὐνόητον, τὸ ὑπόλοιπον μέρος πρέπει νὰ διδαχθῇ συμπληρωτικὰ μετὰ τὴν συστηματικὴν διδασκαλίαν τῶν κοινῶν κλασμάτων. Τὸ μέρος τώρα, τοῦ ὁποίου ἡ κατανόησις δὲν προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν ἰδιαζόντων νόμων τῆς κλασματ. ἀριθμήσεως, περιλαμβάνει τὴν γραφὴν τῶν δεκαδ. κλασμάτων τῶν ἐχόντων 1—3 τὸ πολὺ δεκαδ. ψηφία καὶ τὴν ἔγγραφον ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως τέτοιων δεκαδ. κλασμάτων, καθὼς καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεώς των μὲ ἀκέραιον. Ἀκριβῶς ὅμως δὲν χρειάζονται καὶ περισσότερα πράγματα ἀπὸ τὰ δεκαδ. κλάσματα, διὰ νὰ κατανοήσουν οἱ μαθηταὶ τὴν δεκαδικὴν γραφὴν τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως καὶ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησίν των ὡς δεκαδικῶν, ὅπως γίνονται εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ τὰ ἄλλα μαθήματα τοῦ δημοτ. σχολείου, διότι καὶ εἰς τὰ μαθήματα αὐτὰ καὶ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον δὲν χρησιμοποιοῦνται δεκαδ. κλάσματα μὲ περισσότερα ἀπὸ 3 δεκαδ. ψηφία καὶ δὲν γίνονται συνήθως ἄλλαι πράξεις μὲ αὐτὰ ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω μνημονευθείσας.

Εἶναι τώρα ἀληθές, ὅτι καὶ τὸ μέρος αὐτὸ τῶν δεκαδ. κλασμάτων καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διδαχθῇ ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως, μολονότι δὲν προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν ἰδιαζόντων νόμων τῆς κλασματ. ἀριθμήσεως, προϋποθέτει ὅμως, καθὼς γνωρίζομεν, ὡρισμένας κλασματικὰς γνώσεις. Ἀλλ' αἱ γνώσεις αὐταί, ὅπως ἐπίσης ἠξεύρομεν, εἶναι ὀλίγαι καὶ εὔληπτοι, συνίστανται δὲ ἀκριβῶς εἰς ἐκείνας, τὰς ὁποίας, καθὼς εἴδαμεν εἰς τὰς ἀμέσως προηγουμένας παραγράφους, θὰ παρέχῃ ἡ διδασκαλία κατὰ τὸ δεύτερον καὶ τρίτον σχολικὸν ἔτος. Ἐφόσον αἱ κλασματικαὶ αὐταὶ γνώσεις θὰ μεταδίδωνται κατὰ τὰ μνημονευθέντα σχολικὰ ἔτη, ἡ διδασκαλία τῶν δεκαδ. κλασμάτων κατὰ τὸ 4 σχολ. ἔτος, περιοριζομένη εἰς τὰ ἀνωτέρω διαγραφέντα ὅρια, δὲν θὰ παρέχῃ καμίαν δυσκολίαν εἰς τοὺς μαθητάς, οἱ ὁποῖοι ἀπεναντίας θὰ εὑρίσκουν μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν καὶ τῶν ἀκεραίων πλεῖστα σημεῖα ἐπαφῆς, τὰ ὁποῖα, καθὼς εἶναι γνωστόν, καὶ πράγματι ὑφίστανται. Ἐξ ἄλλου δὲ δὲν ἠμπορεῖ βέβαια νὰ ὑποστηριχθῇ, ὅτι μὲ τὴν προσθήκην τοῦ περιωρισμένου αὐτοῦ ὑλικοῦ ἀπὸ τὰ δεκαδ. κλάσματα αὐξάνει ἡ διδακτέα ὕλη τοῦ 4 σχολ. ἔτους ὑπὲρ τὸ πρέπον, διότι εἶναι φανερόν, ὅτι μόνοι οἱ συμμιγεῖς καὶ τὰ σύνθετα προβλήματα τῶν ἀκεραίων δὲν ἀποτελοῦν ὑλικὸν ἀρκετὰ πλούσιον διὰ τὸ ἔτος αὐτό.

Κατόπιν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω εἶναι προφανές, ὅτι δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐπικροτήσωμεν τὴν γνώμην τῶν Μεθοδικῶν ἐκείνων—Μεθοδικῶν ἀνηκόντων εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν φρονούντων, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ δὲν εἶναι κλάσματα—, οἱ ὁποῖοι ἐπάνω εἰς τοὺς συμμιγεῖς τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως διδάσκουν ὅλον τὸ ὑλικὸν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Δὲν ἠμποροῦμεν δὲ νὰ τὸ κάμωμεν αὐτό, ὄχι μόνον διότι ἔτσι θὰ ἐπιβαρυνθοῦν οἱ μαθηταὶ τοῦ 4 σχολ. ἔτους μὲ παραπολὺ ὑλικόν, ἀλλὰ προπάντων διότι, διὰ νὰ κατανοήσουν οἱ μαθηταὶ τοὺς δεκαδικοὺς τοὺς ἔχοντας περισσότερα ἀπὸ 3 δεκαδικὰ ψηφία, καθὼς καὶ τὴν ἐκτέλεσιν ὡρισμένων πράξεων τῆς ἀριθμήσεως τῶν δεκαδικῶν, ὅπως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως μὲ δεκαδικόν, πρέπει νὰ ἔχουν συστηματικὰ ἐνασχοληθῇ μὲ τὰ κλάσματα καὶ τοὺς ἰδιαιτέρους νόμους τῆς ἀριθμήσεώς των, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν ἔχουν κάμει ἀκόμη οἱ μαθηταὶ τοῦ τετάρτου σχολικοῦ ἔτους.

Ὅσον ἀφορᾷ τώρα ἄλλας γνώμας διαφόρων Μεθοδικῶν, ἀνηκόντων εἰς τὴν ὁμάδα τῶν φρονούντων, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ εἶναι κλάσματα, π.χ. τὴν γνώμην, ὅτι ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως πρέπει νὰ διδαχθῇ μόνον ἡ δεκαδικὴ γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν συμμιγῶν αὐτῶν, ἢ τὴν γνώμην, ὅτι ἡ διδασκαλία τῶν δεκαδικῶν πρέπει νὰ ἀρχίσῃ ἀπὸ τὸ 2 σχολ. ἔτος, παραπέμπομεν τὸν ἀναγνώστην εἰς τὰ λεχθέντα περὶ αὐτῶν εἰς τὸ κεφάλαιον «περὶ τῆς θέσεως τῶν κοινῶν καὶ τῶν δεκαδ. κλασμάτων εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ δημοτ. σχολείου».

Ὅ,τι μόνον ὑπολείπεται νὰ ἐξετασθῇ ἐδῶ, εἶναι ἡ γνώμη τῶν Μεθοδικῶν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι φρονοῦν, ὅτι οἱ συμμιγεῖς τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως πρέπει νὰ διδαχθοῦν, ὅπως καὶ οἱ συμμιγεῖς οἱ μὴ ἔχοντες δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν, χωρὶς δηλ. νὰ συνδυασθῇ ἡ διδασκαλία των μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν. Ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς αὐτοὺς ἄλλοι μὲν ἀνήκουν εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν φρονούντων, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ δὲν εἶναι κλάσματα, ἄλλοι δὲ εἰς τὴν ἀντίθετην κατηγορίαν. Οἱ πρῶτοι ὑποστηρίζουν τὴν γνώμην των μὲ τὸ ἐπιχείρημα, ὅτι ἡ τελεία κατανόησις τῶν δεκαδικῶν ἐπιβάλλει τὴν χωριστὴν καὶ ἀσύγχυτην διδασκαλίαν των, δι' αὐτὸ δὲ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ πρέπει νὰ διδαχθοῦν μετὰ τὴν ὁποπεράτωσιν τῆς διδασκαλίας τῶν ἀκεραίων, ἑπομένως καὶ τῶν συμμιγῶν ἀκεραίων. Ἀλλὰ τὸ ἐπιχείρημα αὐτὸ δὲν ἔχει καμίαν ἀξίαν, διότι οὔτε ἠμποροῦν νὰ κατανοηθοῦν οἱ δεκαδικοὶ κατ' ἄλλον τρόπον καλύτερα παρὰ διδασκόμενοι ἐπάνω εἰς τοὺς συμμιγεῖς τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως, εἰς τοὺς ὁποίους καὶ μόνον ἐφαρμόζονται, οὔτε ὑπάρχει καμία ἄλλη εὐκαιρία δικαιολογοῦσα τὴν διδασκαλίαν των ἀπὸ τὴν εὐκαιρίαν τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν αὐτῶν. Οἱ δεύτεροι ὑποστηρίζουν τὴν γνώμην των μὲ τὸ ἐπιχείρημα, ὅτι ἡ κατανόησις τῶν δεκαδ. κλασμάτων προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν κοινῶν, ἐπιχείρημα, τὸ ὁποῖον εἴδαμεν ἀναπτυσσόμενον ἤδη εἰς τὸ κεφάλαιον «περὶ τῆς θέσεως τῶν κοινῶν καὶ τῶν δεκαδ. κλασμάτων κ.τ.λ.». Τὸ κατὰ τὰ ἄλλα ὀρθὸν αὐτὸ ἐπιχείρημα δὲν ἔχει ὅμως τὴν θέσιν του ἐπὶ τοῦ προκειμένου, διότι οἱ μαθηταὶ ἔχουν εἰσαχθῆ εἰς τὰ κλάσματα καὶ τὴν ἀρίθμησίν των ἀπὸ τὸ δεύτερον ἀκόμη σχολικὸν ἔτος, δι' αὐτὸ δὲ κατέχουν ὅλας τὰς κλασματικὰς γνώσεις, ὅσας χρειάζονται διὰ τὴν κατανόησιν ἐκείνου τοῦ ὑλικοῦ ἀπὸ τοὺς δεκαδικούς, τὸ ὁποῖον θὰ διδαχθοῦν κατὰ τὸ τέταρτον σχολ. ἔτος ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως.

Μολονότι τώρα οἱ περὶ ὧν πρόκειται Μεθοδικοὶ διδάσκουν τοὺς συμμιγεῖς τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως ὅπως τοὺς ἄλλους συμμιγεῖς, ἐν τούτοις βλέπουν, ὅτι εἶναι ὑποχρεωμένοι νὰ εἰσαγάγουν τοὺς μαθητὰς τοὐλάχιστον εἰς τὴν δεκαδικὴν γραφὴν τῶν συμμιγῶν αὐτῶν, ἀφοῦ αὐτὴ καὶ μόνη ἐφαρμόζεται εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ εἰς τὰ ἄλλα μαθήματα. Καὶ εἰσάγουν πράγματι τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν γραφὴν αὐτήν, στηρίζοντες ὅμως αὐτὴν ὄχι εἰς τὴν γνῶσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, τὴν ὁποίαν δὲν θεωροῦν ἀπαραίτητην διὰ τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἀλλὰ εἰς ***τὴν τροπὴν τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως εἰς μονάδας ἄλλης***. Ἔτσι ἡ γραφὴ 5,05 δρ., 5,65 δρ. κ.τ.λ. παρουσιάζονται ἀπὸ αὐτοὺς ὡς ἕνας σύντομος τρόπος γραφῆς τῶν συμμιγῶν 5 δρ. 5 λεπτ., 5 δρ. 65 λεπτ. κ.τ.λ., προερχόμενος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 505 λεπτ., 565 λεπτ. κ.τ.λ., τρεπομένους εἰς μονάδας ἀνωτέρας τάξεως. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ τῶν λεπτῶν διαιρούμενοι μὲ τὸν 100 τρέπονται εἰς δραχμάς, αἱ ὁποῖαι δηλώνονται σαφέστερα, καθόσον ἀποχωρίζονται αἱ ἑκατοντάδες τῶν ἀριθμῶν, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὰς δραχμάς, μὲ ἕνα κόμμα, τὴν ὑποδιαστολήν, ἀπὸ τὰς δεκάδας καὶ τὰς μονάδας, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὰ ἀπομείναντα μετὰ τὴν τροπὴν λεπτά. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς ἐξηγήσεως τῆς δεκαδικῆς γραφῆς οἱ ἀνωτέρω συμμιγεῖς, μολονότι θὰ γράφωνται δεκαδικά, δὲν θὰ γίνωνται εἰς τοὺς μαθητὰς γνωστοὶ καὶ ὡς δεκαδικοί, ἀλλὰ θὰ εἶναι πάντα δι' αὐτοὺς μόνον συμμιγεῖς μὲ μονάδας δύο τάξεων, αἱ ὁποῖαι χωρίζονται ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην μὲ ἕνα κόμμα.

Ὁ τρόπος βέβαια αὐτὸς τῆς εἰσαγωγῆς τῶν μαθητῶν εἰς τὴν δεκαδικὴν γραφὴν τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδ. εἶναι δυνατός. Θὰ ἀφήνῃ ὅμως εἰς τοὺς μαθητάς, ὅπως ὀρθότατα παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σ. 153), ἀρκετὰς ἀπορίας. Διατί εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 5,05 δρ., 5,65 δρ. δίδεται ἡ ὀνομασία τῶν δραχμῶν; Δὲν εἶναι ὀρθότερον νὰ δίδεται εἰς αὐτοὺς ἡ ὀνομασία τῶν λεπτῶν (5,05 λ., 5,65 λ.), ἀφοῦ αὐτὴν τὴν ὀνομασίαν εἶχαν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἐξ ἀρχῆς καὶ αὐτὴ ἄλλωστε ἁρμόζει εἰς τὰ απομείναντα καὶ μὲ τὴν ὑποδιαστολὴν χωριζόμενα λεπτά; Δὲν θὰ ἦτο μάλιστα ὀρθότερον νὰ γραφοῦν: δρ. 5,05 λεπτ., δρ. 5,65 λεπτά; Ἀλλὰ καὶ ἡ σημασία τῆς ὑποδιαστολῆς δὲν θὰ κατανοηθῇ ἀρκετὰ ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Ἐφόσον εἶναι μόνον σημεῖον χωρισμοῦ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων τῶν συμμιγῶν, δὲν θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐξηγήσουν, διατὶ αἱ 5 δρ. καὶ τὰ 5 λ. δὲν γράφονται 5,5 δρ., ὅπως π.χ οἱ 3 πήχ. καὶ τὰ 7 ῥούπ. θὰ ἠμποροῦσαν νὰ γραφοῦν 3,7 π., ἐὰν ἐπρόκειτο οἱ πήχεις καὶ τὰ ῥούπια νὰ χωρισθοῦν μὲ τὴν ὑποδιαστολήν. Εἶναι βέβαια ἀληθές, ὅτι οἱ ὀπαδοὶ τῆς προκειμένης γνώμης προκειμένου διὰ τὰς δραχμὰς καὶ τὰ λεπτὰ ἐξηγοῦν εἰς τοὺς μαθητὰς μὲ ἀρκετὴν εὐκολίαν, ὅτι ἡ πρώτη κατόπιν τῆς ὑποδιαστολῆς θέσις (ἡ τῶν δεκάτων) φανερώνει τὰ δεκάλεπτα καὶ ἡ δεύτερη (ἡ τῶν ἑκατοστῶν) τὰ λεπτὰ καὶ ὅτι δι' αὐτό, ὅταν ἔχωμεν μόνον λεπτά, εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάλεπτων σημειώνομεν 0. Ἀλλὰ πῶς θὰ δικαιολογηθῇ ἡ θέσις τῶν δεκάτων καὶ τῶν ἑκατοστῶν εἰς τὸν ἀριθμὸν 3,005 χιλιόμετρα;

Εἶναι λοιπὸν προφανές, ὅτι, ἂν πρόκειται οἱ μαθηταὶ νὰ κατανοήσουν τὴν δεκαδικὴν γραφὴν τῶν προκειμένων συμμιγῶν, δὲν ἀρκεῖ νὰ στηριχθῇ αὐτὴ εἰς τὴν τροπὴν εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως, ἀλλὰ πρέπει νὰ βασισθῇ εἰς τὴν γνῶσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. Μόνον εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν περίπτωσιν θὰ ἠμπορούν οἱ μαθηταὶ νὰ τὴν ἐννοοῦν τελείως καὶ νὰ ἀντιλαμβάνωνται, ὅτι ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5,05 δρ. ὀνομάζεται μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τῆς ἀνωτέρας τάξεως, ἤτοι τῶν δραχμῶν, διότι τὰ 5 λεπτὰ εἶναι 5 ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς, καὶ ὅτι ἡ ὑποδιαστολὴ δὲν χωρίζει κυρίως τὰς μονάδας δύο τάξεων, ἀλλὰ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἀπὸ τὰ δέκατα καὶ τὰ ἑκατοστά του. Ἀλλὰ καὶ ἂν πρὸς στιγμὴν παραδεχθῶμεν, ὅτι καὶ μὲ τὸν ἄλλον τρόπον θὰ ἠμποροῦσαν οἱ μαθηταὶ νὰ κατανοήσουν τελείως τὴν δεκαδικὴν γραφὴν τῶν προκειμένων συμμιγῶν, δὲν βλέπομεν τὸν λόγον, διατὶ νὰ καταφύγωμεν εἰς τὴν λοξοδρομίαν αὐτὴν [1] καὶ νὰ μὴ διδάξωμεν ἀπ᾿ εὐθείας καὶ τὴν γραφὴν καὶ τὴν ἀρίθμησιν τῶν συμμιγῶν αὐτῶν λαμβανομένων καὶ ὡς δεκαδικῶν, ἀφοῦ κανεὶς λόγος, ὅπως εἴδαμεν, δὲν ἀποκλείει τὴν διδασκαλίαν αὐτήν, ἐφόσον περιορίζεται εἰς τὰ ὅρια, τὰ ὁποῖα προηγουμένως ἐχαράξαμεν.

Ἀπὸ ὅλα λοιπὸν τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι ἡ ὕλη τοῦ 4 σχολ. ἔτους θὰ περιλαμβάνῃ **ἐκτὸς τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα,** τὰ ὁποῖα θὰ διδάσκωνται ἐπ᾿ εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῆς δεκαδικῆς γραφῆς καὶ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως. Θὰ διδάσκωνται δὲ ἀπὸ τὰ δεκαδ. κλάσματα—σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμεν ἀνωτέρω—ἡ γραφὴ καὶ ἡ ἀπαγγελία τέτοιων κλασμάτων μὲ 1—3 τὸ πολὺ ψηφία, ἡ γραπτὴ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων αὐτῶν, καθὼς καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσίς των μὲ ἀκέραιον.

Διδάσκοντες ἔτσι κατὰ τὸ τέταρτον σχολ. ἔτος καὶ ἀρκετὸν ὑλικὸν ἀπὸ τοὺς τόσον χρησίμους διὰ τὸν πρακτικὸν βίον δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς κατορθώνομεν νὰ εἰσάγωνται εἰς αὐτοὺς καὶ ἐκεῖνοι ἀπὸ τοὺς μαθητάς, οἱ ὁποῖοι διὰ διαφόρους λόγους δὲν ἠμποροῦν νὰ φοιτήσουν καὶ εἰς τὰς δύο ἀνωτέρας τάξεις.

Τὸ δεύτερον μέρος τῆς ὕλης τοῦ τετάρτου σχολ. ἔτους ἀποτε-

---

[1] Χάριν τοῦ περιέργου μόνον πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι οἱ ὀπαδοὶ τοῦ τρόπου αὐτοῦ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν μαθητῶν εἰς τὴν δεκαδικὴν γραφὴν τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδ. φρονοῦν, ὅτι μὲ τὴν εἰσαγωγὴν αὐτὴν **προπαρασκευάζουν** ἀρκετὰ τοὺς μαθητὰς καὶ εἰς τὴν ἐπακολουθοῦσαν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν καὶ τῆς ἀριθμήσεώς των, ἐνῷ ἡ εἰσαγωγὴ αὐτὴ δὲν ἔχει καμίαν σχέσιν μὲ τοὺς δεκαδικοὺς καὶ τὴν ἀρίθμησίν των.

λοῦν **τὰ σύνθετα προβλήματα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν,** ἤτοι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐκτελοῦνται περισσότεραι ἀπὸ μίαν ἀριθμητικαὶ πράξεις. Ἀπὸ τὰ προβλήματα αὐτὰ ὀρθὸν εἶναι νὰ διδαχθοῦν τὸ ἔτος αὐτὸ τὰ προβλήματα τῆς μέσης τιμῆς καὶ τὰ ἁπλούστερα καὶ συνηθέστερα ἀπὸ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἀπὸ **τὰ προβλήματα τῆς μέσης τιμῆς** καλὸν εἶναι νὰ διδαχθοῦν τὸ ἔτος αὐτὸ ἐκεῖνα μόνον, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀπαιτεῖ 1) μόνον διαίρεσιν (π.χ.: εἰς μίαν ἐκδρομὴν διήνυσα εἰς 4 ὥρας 15,600 χμ· πόσα διήνυσα κατὰ μέσον ὅρον τὴν ὥραν;) καὶ 2) πρόσθεσιν καὶ διαίρεσιν (π.χ.: εἰς ἕνα ταξίδι μου τριῶν ἡμερῶν ἐξώδευσα τὴν πρώτην ἡμέραν 98 δρ., τὴν δεύτερην 75 δρ. καὶ τὴν τρίτην 89 δρ. Πόσας δρ. ἐξώδευσα κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέραν;).

Ἀπὸ τὰ προβλήματα **τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν** φυσικὰ πρέπει νὰ διδαχθοῦν τὰ προβλήματα τῆς **καθαυτὸ** μεθόδου τῶν τριῶν, ἤτοι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀπὸ τὰ πολλὰ συμπεραίνομεν διὰ τὰ πολλά, διότι εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τιμῆς τῶν πολλῶν μονάδων ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς καὶ τἀνάπαλιν ἔχουν πλέον ἀσκηθῆ οἱ μαθηταὶ μὲ τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως. Ἀπὸ τὰ προβλήματα τῆς καθαυτὸ μεθόδου τῶν τριῶν πρέπει νὰ διδαχθοῦν, καθὼς εἴπαμεν καὶ προηγουμένως, τὰ ἁπλούστερα καὶ συνηθέστερα. Ἁπλούστερα εἶναι ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι κατ᾿ εὐθεῖαν ἀνάλογοι καὶ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἢ συμμιγεῖς γραφόμενοι δεκαδικά. Συνηθέστερα δὲ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν συμπεραίνομεν ἀπὸ ὁσαδήποτε πολλὰ δι᾿ ἄλλα πολλά, ἀλλὰ ἀπὸ **ὡρισμένα καὶ σταθερὰ πολλὰ** δι᾿ ἄλλα πολλὰ καὶ τὸ ἐναντίον. Ἐφόσον π. χ. τὰ κεραμίδια πωλοῦνται μὲ τὴν χιλιάδα, δὲν πρέπει νὰ δίδωμεν εἰς τοὺς μαθητὰς προβλήματα τοῦ τύπου «τὰ 518 κεραμίδια στοιχίζουν 630 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 750;», ἀλλὰ τοῦ τύπου «τὰ 1000 κεραμίδια στοιχίζουν 1200 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 750;» ἢ «τὰ 750 κεραμίδια στοιχίζουν 684 δ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 1000;» (ἴδ. κ. Räther, ὅπ. ἀν., σ. 208 κ. ἀκ.).

Καὶ κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ θὰ διδάσκεται καὶ **ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις,** ἐνῷ δὲν θὰ παύσῃ νὰ συνοδεύῃ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν καὶ ***ἡ γραπτὴ παράστασις τῶν ἀριθμουμένων μὲ τὸν τρόπον τῆς ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως***. Αἱ οὐσιώδεις διαφοραί, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν εἰς τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν εἰδῶν τῆς ἀριθμήσεως, εἶναι γνωσταὶ (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 225). Ἐκτὸς τοῦ ὅτι εἰς τὴν γραπτὴν ἠμποροῦν νὰ ἀριθμοῦνται μεγαλύτεροι καὶ περισσότεροι ἀριθμοὶ παρὰ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης, εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν ἠμποροῦμεν νὰ ἀρχίζωμεν τὴν ἀρίθμησιν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, ἐνῷ εἰς τὴν γραπτὴν θὰ ἀρχίζωμεν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς κατωτέρας. Προκειμένου δὲ ἰδιαιτέρως περὶ τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως προστίθεται καὶ ἄλλη μία οὐσιώδης διαφορά, ὅτι δηλ. οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ θὰ ἀριθμοῦνται ἐγγράφως καὶ ὡς δεκαδικὰ κλάσματα.

Αὐτὴ ἡ φύσις τῆς ὕλης, ἡ ὁποία διδάσκεται κατὰ τὸ 4 σχολ. ἔτος, ἀπαιτεῖ νὰ δίδεται εἰς αὐτὸ πολὺ μεγαλύτερη θέσις εἰς τὰ ***ἐφηρμοσμένα*** προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ ὕλη θὰ λαμβάνεται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀπὸ τὸν πρακτικὸν βίον, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀπὸ τὰ ἄλλα μαθήματα τῆς τάξεως, ἰδίως δὲ ἀπὸ τὴν Γεωγραφίαν, τὴν Φυσ. Ἱστορίαν καὶ τὴν Ἑλλην. Ἱστορίαν.

Ἐκ παραλλήλου μὲ τὴν διδασκαλίαν τῆς νέας ὕλης θὰ γίνεται ***ἐπανάληψις*** τῆς προδιδαχθείσης μὲ κατάλληλα προβλήματα καὶ ἀσκήσεις. Σκόπιμον δὲ ἐπίσης εἶναι κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως νὰ ἐπαναλαμβάνωνται οἱ συμμιγεῖς οἱ μὴ ἔχοντες δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν.

ε) Ἡ ὕλη τοῦ πέμπτου σχολικοῦ ἔτους.

Εἰς τὰ 4 προηγούμενα σχολικὰ ἔτη ἔμαθαν οἱ μαθηταὶ ἐπαρκέστατα τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, καὶ τοὺς ἁπλοῦς καὶ τοὺς συμμιγεῖς, καθὼς καὶ τὰς ἐπ' αὐτῶν ἀριθμητικὰς πράξεις. Ἔμαθαν ἐπίσης καὶ τὰ δεκαδ. κλάσματα καὶ τὴν ἀρίθμησίν των εἰς ἀρκετὴν ἔκτασιν, ἀπέκτησαν δὲ καὶ σποραδικὰς μέν, ἀλλ' ἀρκετὰς γνώσεις ἀναφερομένας εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα. Εἰς τὸ 5 σχολ. ἔτος ἐνδεικνύεται φυσικὰ νὰ διδαχθοῦν ***τὰ κλάσματα, καὶ τὰ κοινὰ καὶ τὰ δεκαδικά, καὶ τὴν ἀρίθμησίν των*** συστηματικὰ καὶ εἰς τὴν βαθύτητα καὶ τὴν ἔκτασιν, τὴν ὁποίαν ἀπαιτοῦν καὶ ἡ ἀνάπτυξις τοῦ ἀριθμητικοῦ των διαφέροντος καὶ αἱ ἀνάγκαι τοῦ πρακτικοῦ βίου καὶ τῆς διδασκαλίας τῶν ἄλλων μαθημάτων. Σχετικὰ μὲ τὰ δεκαδ. κλάσματα θὰ ἐπιμείνῃ φυσικὰ ἰδιαιτέρως ἡ διδασκαλία εἰς ἐκείνας τὰς ὕλας των, ὅσαι δὲν ἔχουν διδαχθῆ κατὰ τὸ 4 σχολ. ἔτος. Τέτοιαι ὕλαι εἶναι οἱ δεκαδικοί, οἱ ἔχοντες περισσότερα ἀπὸ 3 δεκαδ. ψηφία, τὰ περιοδικὰ δεκαδ. κλάσματα καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις μὲ δεκαδικόν.

Κατὰ τὸ ἴδιον σχολικὸν ἔτος πρέπει νὰ ἐξακολουθήσῃ ἡ διδασκαλία ***τῶν συνθέτων προβλημάτων***. Θὰ συνεχισθοῦν τὰ προβλήματα τῆς μέσης τιμῆς, εἰς τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ δίδωνται ἀντὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ κοινὰ κλάσματα, καὶ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ἐπίσης ὁ δεύτερος ὅρος, εἰς μερικὰς δὲ περιπτώσεις καὶ οἱ δύο ἄλλοι θὰ ἠμποροῦν νὰ εἶναι κοινὰ κλάσματα. Ἐκτὸς τῶν συνθέτων αὐτῶν προβλημάτων θὰ δίδωνται καὶ ἄλλα σχετικῶς εὔκολα μὲ ἀκεραίους ἢ δεκαδικὰ ἢ κοινὰ κλάσματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις θὰ ἀπαιτῇ τὸν συνδυασμὸν διαφορετικῶν πράξεων παρὰ εἰς ἐκεῖνα, ὅπως π.χ. τὸν συνδυασμὸν πολλαπλασιασμοῦ καὶ προσθέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, διαιρέσεως, ἀφαιρέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἀφαιρέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ, διαδοχικὴν ἀφαίρεσιν ἢ πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν καὶ διαδοχικὸν πολλαπλασιασμὸν (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 387).

Ὡς πρὸς τὴν θέσιν τώρα, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχουν εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν κοινῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων καὶ τῶν συνθέτων προβλημάτων τὰ 2 εἴδη τῆς ἀριθμήσεως, ἤτοι ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις, παραπέμπομεν τὸν ἀναγνώστην, εἰς ὅσα εἴπαμεν ὡς πρὸς τὸ ζήτημα αὐτὸ εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς ἀπὸ μνήμης καὶ τῆς ἐγγράφου ἀριθμήσεως (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 225 κ. ἀκ.).

Ὅπως ἐξάγεται τώρα ἀπὸ τὴν φύσιν τῆς ἀριθμ. ὕλης τοῦ 5 σχολ. ἔτους, θὰ δίδωνται εἰς αὐτὸ κυρίως ***προβλήματα μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς καὶ ἐφηρμοσμένα***. Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ τῶν προβλημάτων ***τῶν κοινῶν κλασμάτων*** θὰ ἀναφέρωνται ἰδίως εἰς μονάδας μὴ ἐχούσας δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν (ἤτοι εἰς μονάδας τοῦ χρόνου, τῆς ἀπαριθμήσεως κ.τ.λ.), διότι εἰς τὰς ἐχούσας δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν θὰ γίνεται κατὰ κανόνα χρῆσις τῶν δεκαδ. κλασμάτων. Ἐν τούτοις κατ' ἐξαίρεσιν θὰ ἠμποροῦμεν κάποτε νὰ μεταχειριζώμεθα εἰς τὰς τελευταίας αὐτὰς μονάδας καὶ κοινὰ κλάσματα, διότι, ὅπως πολὺ ὀρθὰ παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀνωτ., μέρ. 3, σ. 55), α) καὶ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον γίνεται κάποτε χρῆσις εἰς τὰς μονάδας αὐτὰς κοινῶν κλασμάτων, π.χ. τῶν δευτέρων, τῶν τετάρτων κ.τ.λ. $\left(\frac{1}{2}\right.$ τοῦ μέτρου, $\frac{1}{4}$ τῆς δραχμῆς), β) ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις γίνεται πολλὰς φορὰς εὐκολώτερα μὲ τὰ κοινὰ κλάσματα παρὰ μὲ τὰ δεκαδικὰ (1,75 δρ. $\times 6 = 1\frac{3}{4}$ δρ. $\times 6$), γ) προάγεται καὶ ἡ κατανόησις, ἂν ἕνα πρόβλημα δὲν λύεται μόνον μὲ τὰ δεκαδ. κλάσματα, ἀλλὰ καὶ μὲ τὰ κοινὰ καὶ ἂν τὰ δεκαδικὰ γράφωνται κάποτε καθὼς τὰ κοινὰ (π.χ. $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου). Εἰς τὰ σχετικὰ ἐν τούτοις προβλήματα τὰ διδόμενα κοινὰ κλάσματα πρέπει νὰ εἶναι πάντοτε ***πραγματικὰ*** μέρη τῆς μονάδος, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρονται· ἂν πρόκειται π. χ. περὶ τῆς δραχμῆς, πρέπει νὰ δίδωνται κοινὰ κλάσματα, ὅπως τὰ $\frac{1}{4}$ δρ., $\frac{4}{5}$ δρ. κ.τ.λ. καὶ ὄχι ὅπως τὰ $\frac{1}{6}$ δρ., $\frac{4}{7}$ δρ. κ.τ.λ. Φυσικὰ εἰς τὰ ἐξαγόμενα τῶν προβλημάτων αὐτῶν ἠμπορεῖ νὰ παρουσιάζωνται καὶ μὴ πραγματικὰ μέρη τῶν σχετικῶν μονάδων (π.χ. 1 δρ. : 6 $= \frac{1}{6}$ δρ.). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει τὸ ἐξαγόμενον νὰ τρέπεται εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, τὸ δὲ προϊὸν τῆς τροπῆς αὐτῆς νὰ στρογγυλεύεται· π.χ. $\frac{1}{6}$ δρ. $= 16\frac{2}{3}$ λ. $= 17$ λ. (ἴδ. καὶ Räther, αὐτ.).

Ἐκ παραλλήλου μὲ τὴν διδασκαλίαν τῆς νέας ὕλης θὰ γίνεται καὶ κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ ***ἐπανάληψις*** τῆς προδιδαχθείσης.

ς) *Ἡ ὕλη τοῦ ἕκτου σχολικοῦ ἔτους.*

Ὅ,τι ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην τοῦ δημοτ. σχολείου ὑπολείπεται ἀκόμη νὰ διδαχθῇ, εἶναι ***τὰ σύνθετα προβλήματα***, τὰ ὁποῖα, καθὼς γνωρίζομεν, εἶναι ***ἐφηρμοσμένα***, ἀντλοῦντα τὴν ὕλην των ἀπὸ τὰς ποικίλας σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου καὶ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῶν πραγματικῶν μαθημάτων. Τὰ προβλήματα αὐτὰ θὰ ἀποτελέσουν καὶ τὴν ὕλην, ἡ ὁποία πρέπει νὰ διδαχθῇ κατὰ τὸ τελευταῖον σχολικὸν ἔτος.

Εἰς ὅλα τὰ σύνθετα προβλήματα ἐκτὸς τῶν προβλημάτων τῆς ἑταιρείας, κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ὁποίων ἔχουν νὰ μάθουν οἱ μαθηταὶ καὶ κάτι ὅλως διόλου νέον ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως, δηλ. τὰ περὶ τοῦ λόγου, δὲν παρουσιάζεται κανένα νέον καὶ ἄγνωστον εἰς τοὺς μαθητὰς ἀριθμητικὸν στοιχεῖον, καμία νέα καὶ ἄγνωστη εἰς αὐτοὺς ἀριθμητικὴ πρᾶξις. Εἰς ὅλα γίνεται ἐφαρμογὴ γνωστῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς τὰς ποικίλας σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου καὶ εἰς τὰς ὕλας τῶν πραγματικῶν μαθημάτων. Ἐν τούτοις νέον διὰ τοὺς μαθητὰς εἶναι ὁ συνδυασμὸς τῶν γνωστῶν πράξεων, ὁ ὁποῖος εἰς τὰ περισσότερα ἀπὸ τὰ προβλήματα αὐτὰ εἶναι ὅλως διόλου ἰδιότυπος, ἀποτελῶν αὐτόχρημα νέον εἶδος ἀριθμήσεως. Δι' αὐτὸ εἶναι προφανές, ὅτι μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν προβλημάτων αὐτῶν οἱ μαθηταὶ δὲν ἐφαρμόζουν μόνον τὰ γνωστά, ἀλλὰ καὶ ἐπαυξάνουν τὰς ἀριθμητικάς των γνώσεις.

Ἂν τώρα κατὰ τὸ 6 σχολικὸν ἔτος διδάσκωνται οἱ μαθηταὶ μόνον προβλήματα ἐφηρμοσμένα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον καὶ τὰ πραγματικὰ μαθήματα, δὲν πρέπει βέβαια νὰ νομισθῇ, ὅτι τὰ προβλήματα αὐτὰ ἀνήκουν ἀποκλειστικὰ εἰς τὴν δικαιοδοσίαν τοῦ τελευταίου σχολικοῦ ἔτους. Τὰ ἐφηρμοσμένα προβλήματα, καθὼς εἴδαμεν μέχρι τοῦδε, παρουσιάζονται καὶ εἰς ὅλα τὰ ἄλλα σχολικὰ ἔτη, ἀρχίζουν δὲ νὰ διδάσκωνται ἀπὸ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος. Εἰς τὸ τελευταῖον σχολικὸν ἔτος δὲν διδάσκονται παρὰ τὰ ἀπομείναντα ἐφηρμοσμένα προβλήματα, ὁποῖα εἶναι τὰ σύνθετα (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 3, σ. 123 καὶ ἀκ.).

Ἀλλὰ καὶ τὰ σύνθετα προβλήματα, ὅπως ἠξεύρομεν, δὲν παρουσιάζονται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸ ἔτος αὐτό. Κατὰ τὸ 4 σχολ. ἔτος διδάσκονται μερικὰ ἀπὸ τὰ προβλήματα τῆς μέσης τιμῆς καὶ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, κατὰ δὲ τὸ 5 συνεχίζεται ἡ διδασκαλία τῶν προβλημάτων αὐτῶν καὶ διδάσκονται καὶ μερικὰ ἄλλα εἴδη συνθέτων προβλημάτων. Κατὰ τὸ προκείμενον τώρα ἔτος εἶναι ἀπαραίτητον νὰ συμπληρωθῇ ἡ διδασκαλία τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τῆς σπουδαιοτάτης αὐτῆς μεθόδου, μὲ τὴν ὁποίαν λύονται ὅλα σχεδὸν τὰ ὑπόλοιπα εἴδη τῶν συνθέτων προβλημάτων, ὅσα πρόκειται νὰ διδαχθοῦν εἰς τοὺς μαθητάς. Ἐπίσης πρέπει νὰ συμπληρωθῇ καὶ ἡ διδασκαλία τῶν προβλημάτων τῆς μέσης τιμῆς, νὰ διδαχθοῦν δὲ καὶ ἐκεῖνα ἀπὸ αὐτά, ὅσα λύονται μὲ τὸν συνδυασμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς προσθέσεως καὶ τῆς διαιρέσεως καὶ εἶναι, καθὼς ηὑρομεν, κυρίως ἁπλᾶ προβλήματα μίξεως. Τὰ νέα εἴδη τῶν συνθέτων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα θὰ διδαχθοῦν οἱ μαθηταὶ κατὰ τὸ ἔτος αὐτό, εἶναι τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, τὰ τῆς μετατροπῆς Ἑλληνικῶν νομισμάτων εἰς ξένα καὶ ξένων εἰς Ἑλληνικά, αἱ ποικίλαι τάξεις τῶν προβλημάτων τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ποσοστῶν, τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρείας, ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν ὁποίων θὰ διδαχθοῦν εἰς τοὺς μαθητὰς τὰ περὶ τοῦ λόγου, καὶ τὰ ἁπλᾶ προβλήματα τῆς μίξεως, ὅσα λύονται μὲ τὴν εὕρεσιν τῆς μέσης τιμῆς ἢ μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ἢ μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ λόγου.

Μερικὰ ἀπὸ τὰ σύνθετα προβλήματα τοῦ ἔτους αὐτοῦ, καθὼς τὰ τῆς ἁπλῆς καὶ συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν καὶ τῆς μέσης τιμῆς, παρουσιάζουν σχέσεις τοῦ πρακτικοῦ βίου κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον γνωστὰς εἰς τοὺς παῖδας. Ὅλα ὅμως τὰ ἄλλα παρουσιάζουν ***σχέσεις μὴ γνωστὰς εἰς τοὺς μαθητάς***, αἱ ὁποῖαι δι' αὐτὸ ἀπαραίτητον εἶναι μὲ τὴν εὐκαιρίαν τῆς διδασκαλίας τῶν προβλημάτων αὐτῶν νὰ μεταδοθοῦν εἰς αὐτούς.

Σχετικὰ μὲ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχουν ***ἡ ἀπὸ μνήμης*** καὶ ***ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις*** κατὰ τὸ ἔτος αὐτό, πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἡ ὕλη του κατὰ μέγιστον μέρος (πρβ. τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ τὰ δι' αὐτῆς λυόμενα ἄλλα σύνθετα προβλήματα) εὐνοεῖ ἐξ ἴσου καὶ τὰ δύο εἴδη τῆς ἀριθμήσεως, δι' αὐτὸ δὲ πρέπει εἰς τὴν ὕλην αὐτὴν νὰ καλλιεργῆται καὶ ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις. (Ἴδ. καὶ ἀν. σ. 248).

---

2 Η ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΟΥ ΚΑΘΕ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ.

Ὡς πρὸς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ὅλων ἐν γένει τῶν σχολικῶν ἐτῶν ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι πρέπει νὰ γίνεται ἔτσι, ὥστε ἡ ἑκάστοτε ἀκολουθοῦσα ὕλη νὰ στηρίζεται εἰς τὴν προηγουμένην. Ἂν γίνεται μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἡ διάταξις, θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ εὑρίσκουν πάντοτε μόνοι των τὸ νέον, δι' αὐτὸ δὲ θὰ αἰσθάνωνται διαρκῶς πρόοδον καὶ διαρκῶς χαρὰν δι' αὐτήν, καθὼς καὶ διαρκῶς προσδοκίαν, ὅτι θὰ ἐπαυξήσουν ἀκόμη τὰς γνώσεις των. Ἡ ἀνωτέρω ἀπαίτησις ὡς πρὸς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης, ἰσχύουσα ἐν γένει διὰ τὴν ὕλην κάθε μαθήματος, ἔχει ἰδιάζουσαν ἰσχὺν διὰ τὰς ἀριθμητικὰς ὕλας, εἰς τὰς ὁποίας αἱ ἑκάστοτε ἀκολουθοῦσαι, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἀριθμήσεως, στηρίζονται ἀποκλειστικὰ εἰς τὰς προηγουμένας, μὲ κανένα δὲ τρόπον δὲν ἠμποροῦν νὰ κατανοηθοῦν, ἂν δὲν ἔχουν κατανοηθῆ τελείως αἱ προηγούμεναι. Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης τοῦ κάθε σχολικοῦ ἔτους ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἀκόλουθα.

α. *Ἡ διάταξις τῆς ὕλης τοῦ πρώτου σχολικοῦ ἔτους.*

Α. Ὡς πρὸς τὴν διάταξιν τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς τὴν σειρὰν 1—10 παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Ἡ ὕλη αὐτὴ ἀποτελεῖται, καθὼς εἴδαμεν (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 402), ἀπὸ 2 κυρίως ἐργασίας, τῶν ὁποίων τὴν ἐκτέλεσιν ζητοῦμεν ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Ζητοῦμεν δηλ. ἀπ' αὐτούς: 1) νὰ σχηματίσουν ἐντελῶς σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς 1—10 καὶ 2) νὰ μάθουν νὰ ἀριθμοῦν συνειδητὰ καὶ εὔκολα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, ἤτοι νὰ μάθουν νὰ ἐκτελοῦν συνειδητὰ καὶ εὔκολα ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς σειρᾶς αὐτῆς. Πῶς πρέπει νὰ διαταχθοῦν αἱ 2 αὐταὶ ἐργασίαι, διὰ νὰ συντελῇ καὶ ἡ διάταξίς των εἰς τὴν καλυτέραν ἐκτέλεσιν τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τοὺς μαθητάς;

Ἕνα εἶδος διατάξεως προκύπτει, ἄν, χωρὶς νὰ παραμεληθῇ ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἐργασίας, θεωρηθῇ ἐν τούτοις ὡς περισσότερον κινοῦσα τὸ διαφέρον τῶν παίδων καὶ ὡς περισσότερον σημαντικὴ ἡ δευτέρη, ἤτοι ***ἡ ἀρίθμησις***, τὴν ὁποίαν θὰ πρέπῃ δι᾽ αὐτὸ νὰ ἀρχίσουν οἱ μαθηταὶ ὅσον τὸ δυνατὸν γρηγορώτερα. Διὰ νὰ γίνῃ τώρα τὸ τελευταῖον αὐτό, δὲν θὰ εἶναι βέβαια ἀπαραίτητον νὰ σχηματίσουν οἱ μαθηταὶ ἀμέσως ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ***ἐντελῶς*** σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10, δὲν θὰ εἶναι δηλαδὴ ἀπαραίτητον, πρὶν προβοῦν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῆς ἐννοίας ἑνὸς νέου ἀριθμοῦ, νὰ ἔχουν σχηματίσει ἐντελῶς σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τῶν προηγουμένων του. Ἀρκετὸν θὰ εἶναι, ἂν οἱ μαθηταὶ σχηματίσουν ***ἐπαρκῶς*** σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τοῦ ἑνὸς μετὰ τὸν ἄλλον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, τόσον τοὐλάχιστον σαφεῖς, ὥστε νὰ ἠμποροῦν ἐπὶ τῇ βάσει των νὰ προβοῦν εἰς τὴν ἀρίθμησιν, εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Διὰ νὰ σχηματίσουν τώρα οἱ μαθηταὶ τέτοιας ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, δὲν εἶναι βέβαια ἀνάγκη νὰ μανθάνουν διὰ τὸν καθένα ὅλα τὰ γνωρίσματά του, ἀπεναντίας δὲ εἶναι ἀρκετὸν νὰ μανθάνουν ἔστω καὶ ***ἕνα*** μόνον, ἀρκεῖ τὸ γνώρισμα αὐτὸ νὰ εἶναι ***θεμελιῶδες***. Κατόπιν ἀπὸ τὴν σύντομην αὐτὴν ***εἰσαγωγὴν*** τῶν μαθητῶν εἰς τὸν σχηματισμὸν ὅλων τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς θὰ ἐπακολουθῇ ἀμέσως ἡ κυρία των ἐργασία, ἤτοι ἡ ἄσκησίς των εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ***εἰς ὁλόκληρην τὴν σειράν***, ἡ ἄσκησίς των εἰς τὴν ἀρίθμησιν ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς σειρᾶς. Διὰ νὰ μὴ ἀποβῇ τώρα ἐμπόδιον εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ὁ εἰς τὴν εἰσαγωγὴν γενόμενος ἀτελὴς σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν, ἀπαραίτητον βέβαια θὰ εἶναι νὰ μὴ γίνωνται αἱ ἀσκήσεις τῆς κάθε ἀριθμητικῆς πράξεως ἄτακτα, ἀλλὰ νὰ διατάσσωνται ἔτσι, ὥστε αἱ ἑκάστοτε ἀκολουθοῦσαι νὰ στηρίζωνται καθ᾽ ὁλοκληρίαν εἰς τὰς προηγουμένας καὶ νὰ ἐξάγωνται ἀβίαστα ἀπὸ αὐτάς. Προκειμένου π. χ. διὰ τὴν πρόσθεσιν, εἰς κάθε ἀριθμὸν τῆς σειρᾶς θὰ προσθέτεται πρῶτα ὁ ἀριθμὸς 1, κατόπιν ὁ 2, ἔπειτα ὁ 3 κ.τ.λ. Ὁ καθένας πάλιν ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ γίνεται ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς προσθέσεις αὐτάς, θὰ λαμβάνεται μὲ τὴν τάξιν, τὴν ὁποίαν ἔχει εἰς τὴν σειράν, ἤτοι θὰ λαμβάνεται πρῶτα ὁ 1, κατόπιν ὁ 2, ἔπειτα ὁ 3 κ. τ. λ. (ἴδ. π. χ. τὰς ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως ἀνωτ., σ.402). Μὲ αὐτὴν τὴν διάταξιν τῶν ἀσκήσεων τῆς κάθε ἀριθμητικῆς πράξεως θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐκτελοῦν ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς σειρᾶς ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς αὐτὰς πράξεις εὔκολα καὶ ἀπρόσκοπτα. Ἐνῷ δὲ θὰ μανθάνουν ἔτσι τὴν κυριωτέραν ἀπὸ τὰς ἐργασίας, αἱ ὁποῖαι ζητοῦνται ἀπὸ αὐτούς, δὲν θὰ ὑστερήσουν καὶ εἰς τὸ ἔργον τοῦ σχηματισμοῦ ***ἐντελῶς*** σαφῶν καὶ εὐκρινῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν 1—10. Διότι φυσικὰ μὲ τὴν ἐπιτυχῆ ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς τὴν σειρὰν 1—10 θὰ κατορθώνεται μαζὶ νὰ γίνωνται ὁλονὲν ***σαφέστεραι καὶ εὐκρινέστεραι*** καὶ αἱ ἔννοιαι τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς, αἱ ὁποῖαι εἰς τὴν εἰσαγωγὴν εἶχαν σχηματισθῇ ἀτελῶς. Ἀπὸ ὅλα τώρα τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι ἡ προκειμένη διάταξις ἔχει εἰς τὰς γενικωτάτας της γραμμὰς ὡς ἑξῆς: 1 ***Σύντομη εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10.*** 2. ***Ἐκτέλεσις τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις εἰς ὁλόκληρην τὴν σειρὰν 1—10.***

Ἃς ἐξετάσωμεν τώρα, ἂν γίνεται μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν καλὰ ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς δύο ἐργασίας, αἱ ὁποῖαι ζητοῦνται ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Ἃς ἴδωμεν πρῶτα ἂν κατορθώνουν οἱ μαθηταὶ νὰ σχηματίζουν ἐντελῶς σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10. Ἐντελῶς σαφῆ καὶ εὐκρινῆ ἔννοιαν τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς θὰ ἔχουν, ὅπως ηὑρομεν, οἱ μαθηταί, ἂν κατέχουν ὅλα τὰ γνωρίσματά του, π. χ. τοῦ 4, ἂν γνωρίζουν, ὅτι $3+1$ (ἢ $1+1+1+1)=4$, $2+2=4$, $1+3=4$, $2\times2=4$, $1\times4=4$, $4\times1=4$, $4-1=3$, $4-2=2$, $4-3=1$, $4:4=1$, $4:2=2$, $4:1=4$. Μὲ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν 1—10, ἡ ὁποία προτάσσεται εἰς τὴν προκειμένην διάταξιν, δὲν σχηματίζουν βέβαια οἱ μαθηταὶ τέτοιας ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν 1—10. Ἄλλωστε οὔτε ἐπιδιώκεται αὐτό, καθὼς εἴπαμεν, μὲ τὴν εἰσαγωγὴν αὐτήν, ἡ ὁποία δὲν ζητεῖ τίποτε ἄλλο παρὰ νὰ σχηματίσουν οἱ μαθηταὶ μόνον ***ἐπαρκῶς*** σαφεῖς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, καὶ ὡρισμένως τόσον σαφεῖς, ὥστε νὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ προχωρήσουν εἰς τὴν ἐπ' αὐτῶν ἀρίθμησιν. Ἂς ἴδωμεν δι' αὐτὸ πρῶτα, ἂν σχηματίζουν πράγματι οἱ μαθηταὶ μὲ τὴν εἰσαγωγὴν αὐτὴν τέτοιας ἐννοίας, δηλ. ἐπαρκῶς σαφεῖς. Πῶς γίνεται εἰς αὐτὴν ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν 1—10 ἀπὸ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς προκειμένης διατάξεως; Μερικοὶ ἀπὸ αὐτοὺς φρονοῦν, ὅτι ὁ σχηματισμὸς αὐτὸς ἠμπορεῖ νὰ κατορθωθῇ μὲ ***τὴν στιγμιαίαν ἀντίληψιν*** εἴτε σταθερῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν εἴτε ὁμοειδῶν ἀντικειμένων. Δὲν συζητοῦμεν διὰ τὴν γνώμην αὐτήν, διότι, ὅπως εἴδαμεν ἀλλοῦ, οὔτε εἶναι δυνατὸν μὲ τὴν στιγμιαίαν ἀντίληψιν νὰ σχηματίσουν οἱ μαθηταὶ ἔστω καὶ ἀμυδρότατα σαφῆ καὶ εὐκρινῆ ἔννοιαν τῶν ἀριθμῶν, οὔτε, καὶ ἂν ἦτο αὐτὸ κατορθωτόν, θὰ ἠμποροῦσαν νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ ἔννοιαι αὐταὶ διὰ τὴν ἀρίθμησιν. Διὰ τοὺς λόγους δὲ αὐτοὺς ἀκριβῶς οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς Μεθοδικούς, οἱ ὁποῖοι ἀσπάζονται τὴν προκειμένην διάταξιν, εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν 1—10 πρέπει νὰ γίνῃ διὰ μέσου ***τῆς ἀπαριθμήσεως***. Ποῖον εἶναι τώρα τὸ γνώρισμα, τὸ ὁποῖον μανθάνουν οἱ μαθηταὶ μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν διὰ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2—10; Ὅτι ὁ καθένας των ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν προηγούμενον +1. Τὸ γνώρισμα αὐτὸ βέβαια εἶναι θεμελιῶδες, εἶναι ὁ ἴδιος ὁ θεμελιώδης νόμος, ὁ ὁποῖος διέπει τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν. Μαθητής, ὁ ὁποῖος ἔμαθε, ὅτι ὁ 2=1+1, ὅτι ὁ 3=2 (ἤτοι 1+1)+1, ὅτι ὁ 4=3 (ἤτοι 2+1 ἢ 1+1+1)+1 κ.τ.λ., γνωρίζει βέβαια κατιτὶ σπουδαῖον διὰ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2,3,4 κ.τ.λ., ἔχει σχηματίσει πράγματι ὁπωσδήποτε σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖ. ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Αἱ ἔννοιαί του αὐταὶ εἶναι ὁπωσδήποτε τόσον σαφεῖς, ὥστε νὰ ἠμπορῇ μὲ αὐτὰς νὰ προχωρήσῃ εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ἀρκεῖ μόνον αἱ ἀσκήσεις τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ αὐτὰς νὰ διατάσσωνται κατάλληλα. Ἀλλὰ τὸ κύριον ζήτημά μας δὲν εἶναι, ἂν οἱ μαθηταὶ σχηματίζουν μὲ τὴν προκειμένην διάταξιν ***ὁπωσδήποτε*** σαφεῖς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν 1—10, ἀλλ' ἂν σχηματίζουν μὲ αὐτὴν ***ἐντελῶς*** σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Καὶ τὸ ζήτημα ὅμως αὐτὸ θεωρεῖται ὡς λυμένον ἀπὸ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς προκειμένης διατάξεως, οἱ ὁποῖοι

ὑποστηρίζουν, ὅτι, ἂν αἱ ἔννοιαι τῶν ἀριθμῶν 1—10 σχηματίζωνται ὁπωσδήποτε ἀτελεῖς εἰς τὴν εἰσαγωγήν, ἐν τούτοις μὲ τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἀρίθμησιν γίνονται ὁλονὲν σαφέστεραι καὶ εὐκρινέστεραι. Κανένας βέβαια δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀμφισβητήσῃ τὴν ἀκρίβειαν τοῦ πράγματος αὐτοῦ. Πράγματι ὁ μαθητής, ὁ ὁποῖος ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν π. χ. 6 ἔμαθε εἰς τὴν εἰσαγωγὴν μόνον, ὅτι εἶναι=5+1, ἀργότερα, ὅταν θὰ φθάσῃ εἰς τὰς ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως τοῦ 2, θὰ μάθῃ, ὅτι εἶναι καὶ 4+2 καὶ οὕτ. καθ. Ἐν τούτοις ἐναντίον τοῦ σχηματισμοῦ αὐτοῦ τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν 1—10 πρέπει νὰ παρατηρηθοῦν δύο πράγματα. Τὸ πρῶτον εἶναι, ὅτι, ἀφοῦ οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἀποκτήσουν ἐντελῶς σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ***πολὺ προτιμότερον εἶναι νὰ τὰς σχηματίσουν ἔτσι εὐθὺς ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἢ τουλάχιστον νὰ τὰς σχηματίζουν μὲ τὰ περισσότερά των γνωρίσματα.*** Ἂν τὰ γνωρίσματα τῆς καθεμιᾶς των συμπληρώνωνται κατὰ διαλείμματα, δὲν θὰ κατορθώνουν οἱ μαθηταὶ νὰ τὰς ἔχουν σχηματίσει σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς παρὰ μόνον μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν ὅλων τῶν ἀσκήσεων ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ἐνῷ εἰς ὅλον τὸν ἐν τῷ μεταξὺ χρόνον ποτὲ δὲν θὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 μὲ ὅλην τὴν δυνατὴν σαφήνειαν καὶ εὐκρίνειαν. Τὸ δεύτερον, τὸ ὁποῖον ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, εἶναι, ὅτι μὲ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν, ὅπως γίνεται εἰς τὴν προκειμένην διάταξιν, οἱ μαθηταὶ δὲν θὰ δοκιμάζουν τὸ εὐχάριστον συναίσθημα τῆς προόδου, τὸ ὁποῖον θὰ ἐδοκίμαζαν, ἂν ἐπροχωροῦσαν εἰς τὴν γνῶσιν κάθε νέου ἀριθμοῦ μόνον κατόπιν τῆς τελείας γνώσεως τῶν προηγουμένων του. Εἶναι βεβαίως ἀληθές, ὅτι ἡ προκειμένη διάταξις εἰς τὸν τρόπον τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν 1—10 ἀκολουθεῖ τὴν φυσικὴν πορείαν, τὴν πορείαν δηλαδή, τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ κάθε ἄνθρωπος μόνος του, χωρὶς διδασκαλίαν, εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ κατὰ τὴν ὁποίαν τοὺς σχηματίζει τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον διὰ μέσου τῆς προσθέσεως τῆς μονάδος, μόνον δὲ ὀλίγον κατ' ὀλίγον, ἐφόσον δηλαδὴ πλέον ἐκτελεῖ μὲ αὐτοὺς τὰς διαφόρους ἀριθμητικὰς πράξεις, ἀρχίζει νὰ μανθάνῃ καὶ τὰ ἄλλα γνωρίσματά των. Ἐν τούτοις ἡ διδασκαλία δὲν εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ ἀκολουθήσῃ τὴν πορείαν αὐτήν, ἐφόσον ἠμπορεῖ νὰ εὕρῃ ἄλλην, ἡ ὁποία θὰ συντελῇ εἰς τὸν ἐξ ἀρχῆς σχηματισμὸν ἐντελῶς σαφῶν καὶ εὐκρινῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν ἐξάγεται, ὅτι ἡ προκειμένη διάταξις, μολονότι μὲ αὐτὴν κατορθώνουν οἱ μαθηταὶ νὰ σχηματίσουν ***εἰς τὸ τέλος*** τέτοιας ἐννοίας, ἐν τούτοις θὰ μειονεκτῇ ἀπὸ κάθε ἄλλην, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἠμποροῦσε νὰ κατορθωθῇ, ὥστε οἱ μαθηταὶ νὰ μὴ προχωροῦν εἰς τὸν σχηματισμὸν νέου ἀριθμοῦ, πρὶν μάθουν ὅλα τὰ γνωρίσματα τῶν προηγουμένων του.

Ὅτι τώρα ἡ δεύτερη ἐργασία, τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν ἀπὸ τοὺς μαθητάς, ἤτοι ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς τὴν σειρὰν 1—10, θὰ γίνεται μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν συνειδητὰ καὶ εὔκολα ἀπὸ αὐτούς, τὸ εἴπαμεν καὶ προηγουμένως καὶ τὸ ἐπαναλαμβάνομεν καὶ τώρα. Ἀφοῦ αἱ ἀσκήσεις τῆς κάθε πράξεως διατάσσονται εἰς αὐτὴν ἔτσι, ὥστε ἀπὸ τὰς ἑκάστοτε προηγουμένας νὰ ἔχουν οἱ μαθηταὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα τὰ ἀναγκαῖα διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀκολούθων, εἶναι προφανές, ὅτι θὰ ἠμποροῦν νὰ τὰς ἐκτελοῦν ὅλας μὲ ἐπίγνωσιν καὶ εὐκολίαν. Ἐξ ἄλλου διὰ τὸν ἴδιον λόγον θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ λύουν τὴν κάθε ἄσκησιν ***μόνοι των***. Τέλος ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ πρῶτον ἀκόμη εἶδος τῶν ἀσκήσεων (τὴν πρόσθεσιν τοῦ 1) θὰ χρησιμοποιοῦνται ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς σειρᾶς (1+1, 2+1, 3+1. . . 9+1. 1+2, 2+2, 3+2, 4+2. . . 8+2 κ.τ.λ.), θὰ προσλαμβάνῃ ἡ διδασκαλία καὶ μεγάλην ποικιλίαν, ἡ ὁποία θὰ τονώνῃ τὸ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν διαφέρον τῶν μαθητῶν.

Ἀπὸ ὅλα τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι ἡ προκειμένη διάταξις, μολονότι μὲ αὐτὴν δὲν κατορθώνουν οἱ μαθηταὶ νὰ σχηματίζουν εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ἐντελῶς σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς τὰς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν 1—10, ἐν τούτοις, ἐπειδὴ ἀφ' ἑνὸς μὲν συντελεῖ εἰς τὸ νὰ φθάνουν οἱ μαθηταὶ εἰς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα βαθμιαίως, ἀφ' ἑτέρου δὲ τοὺς ὑποβοηθεῖ εἰς τὸ νὰ ἐκτελοῦν τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις συνειδητὰ καὶ εὔκολα, δὲν εἶναι ἀξία ἀπορρίψεως, ἠμπορεῖ δὲ νὰ ἐφαρμόζεται ἀπὸ κάθε διδάσκαλον χωρὶς κανένα ἐνδοιασμόν.

Τὸ κύριον μειονέκτημα τῆς ἐξετασθείσης διατάξεως εἶναι, καθὼς εἴδαμεν, ὅτι μὲ αὐτὴν δὲν κατορθώνουν οἱ μαθηταὶ νὰ σχη-

ματίζουν ἐξ ἀρχῆς σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς τὰς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν 1—10, δὲν κατορθώνουν νὰ προχωροῦν εἰς τὸν σχηματισμὸν κάθε νέου ἀριθμοῦ μόνον μετὰ τὴν πρόσκτησιν ὅλων τῶν γνωρισμάτων τῶν προηγουμένων του. Διὰ νὰ κατορθωθῇ αὐτό, χωρὶς ἐν τούτοις νὰ παραμεληθῇ καὶ ἡ σύγχρονη ἄσκησις τῶν μαθητῶν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ἐσκέφθηκε ὁ Grube, ὅτι εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἐξετάζεται ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 ***μόνος του ἀπὸ κάθε ἔποψιν*** ἤ, ὅπως εἶπε ὁ Grube καὶ λέγεται ἔκτοτε, νὰ ἐξετάζεται ***μονογραφικῶς***. Ἡ μονογραφικὴ αὐτὴ ἐξέτασις τοῦ κάθε ἀριθμοῦ κατορθώνεται, ἄν, ἀφοῦ σχηματισθῇ ὁ ἀριθμός, ἐπακολουθῇ ***σύγκρισίς του μὲ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς προηγουμένους του κατὰ σειρὰν καὶ ἔρευνα ὅλων τῶν σχέσεων, εἰς τὰς ὁποίας εὑρίσκεται μὲ αὐτούς.*** Προϊὸν τῆς συγκριτικῆς αὐτῆς ἐρεύνης εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἐξαγωγὴ ὅλων τῶν γνωρισμάτων τοῦ ἐξεταζομένου ἀριθμοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ ἐκτέλεσις ὅλων τῶν πράξεων τῆς ἀνιούσης ἀριθμήσεως, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ἐξαγόμενον, καὶ ὅλων τῶν πράξεων τῆς κατιούσης, τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ἀφετηρία.

Ἐφόσον τώρα οἱ ἀριθμοὶ 1—10 ἐξετάζονται μονογραφικῶς, ἡ διάταξις τῆς σχετικῆς ἀριθμητικῆς ὕλης θὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς. Ἡ ὕλη θὰ καταταχθῇ εἰς 9 διαδοχικὰ τμήματα. Εἰς τὸ πρῶτον θὰ ἐξετάζωνται οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 2, εἰς τὸ καθένα δὲ ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα ἀπὸ ἕνας ἀπὸ τοὺς ἄλλους 8 ἀριθμούς. Εἰς κάθε τμῆμα θὰ προηγῆται μὲν ὁ πρῶτος σχηματισμὸς τοῦ ἐξεταζομένου ἀριθμοῦ, θὰ ἐπακολουθῇ δὲ σύγκρισίς του μὲ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς μικροτέρους του ἀριθμοὺς κατὰ σειράν. Ἀπὸ κάθε σύγκρισιν θὰ ἐξάγωνται τὰ σχετικὰ γνωρίσματα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ αἱ σχετικαὶ ἀριθμητικαὶ πράξεις.

Διὰ νὰ κατανοηθῇ καλύτερα τὸ προκείμενον εἶδος τῆς διατάξεως, παραθέτομεν ἀμέσως κατωτέρω τὴν διάταξιν τῆς ἐξετάσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 4, ὅπως ὑποτυπώνεται ἀπὸ τὸν Grube :

Ὁ ἀριθμὸς 4.

1) Σύγκρισις μὲ τὸν 1.

	| | | |	4
|	1	1+1+1+1=4
|	1	4×1=4
|	1	4—1—1—1=1
|	1	1 : 4 (τὸ 1 εἰς τὸ 4)=4.

2) Σύγκρισις μὲ τὸν 2.

| |	2	2+2=4
		2×2=4
		4—2=2
| |	2	2 : 4=2.

3) Σύγκρισις μὲ τὸν 3.

| | |	3+1=4, 1+3=4
	1×3+1=4
	4—3=1, 4—1=3
|	3 : 4=1 (1) (Τὸ 3 εἰς τὸ 4 χωρεῖ 1 φορὰν καὶ μένει ὑπόλοιπον 1).

Ἔχοντες τώρα ὑπ᾿ ὄψιν μας τὴν ἀνωτέρω διάταξιν ἂς ἐξετάσωμεν κατὰ πρῶτον, ἂν κατορθώνουν μὲ αὐτὴν οἱ μαθηταὶ νὰ σχηματίζουν ἐντελῶς σαφῆ καὶ εὐκρινῆ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἑκάστοτε ἐξεταζομένου ἀριθμοῦ. Ὁ πρῶτος σχηματισμός του γίνεται διὰ τῆς ἐποπτείας αἰσθητῶν ἀντικειμένων, γραμμῶν, ὅπως θέλει ὁ Grube (π.χ. τοῦ 4 διὰ τῆς ἐποπτείας 4 γραμμῶν), κύβων, εἰκόνων ἀριθμῶν κ.τ.λ., ὅπως προτιμοῦν ἄλλοι ἀπὸ τοὺς θιασώτας του. Ὅτι μὲ τὴν στιγμιαίαν ἀντίληψιν δὲν εἶναι δυνατὸς ὁ σχηματισμὸς ἔστω καὶ ἀμυδρᾶς ἐννοίας ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ καὶ ὅτι καὶ κατ᾿ αὐτὴν πράγματι ὁ ἀριθμὸς σχηματίζεται διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως, εἶναι περιττὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν. Ἀλλ᾿ ἂς ἴδωμεν, μήπως μὲ τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἐργασίαν κατορθώνουν οἱ μαθηταὶ νὰ κατανοήσουν καὶ νὰ ἐντυπώσουν στερεὰ τὰ διάφορα γνωρίσματα τοῦ ἐξεταζομένου ἀριθμοῦ. Οἱ ὀπαδοὶ τοῦ προηγουμένου εἴδους τῆς διατάξεως ἐξάγουν, καθὼς εἴδαμεν, ἕνα πρὸς ἕνα τὰ γνωρίσματα τοῦ κάθε ἀριθμοῦ ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν, ἀπὸ τὴν ἐκτέ-

λεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Εἰς τὴν προκειμένην ὅμως διάταξιν δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιον. Εἰς αὐτὴν οἱ μαθηταὶ στηριζόμενοι εἰς τὴν ἐποπτείαν ***συγκρίνουν*** τὸν νέον ἀριθμὸν μὲ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς μικροτέρους του, καὶ ὡρισμένως πρῶτα μὲ τὸν 1 (1 γραμμήν). Ἡ σύγκρισις αὐτὴ κάμνει τοὺς μαθητὰς νὰ ***ἀναλύσουν*** τὸν 4 εἰς 4 μονάδας (4 γραμμὰς) καὶ νὰ μάθουν ἔτσι, ὅτι ὁ 4 εἶναι 1 καὶ 1 καὶ 1 καὶ 1. Τὸ γνώρισμα λοιπὸν αὐτὸ τοῦ 4 τὸ μανθάνουν οἱ μαθηταὶ ὄχι μὲ τὴν ἄνοδον 3 βαθμίδων ἀπὸ τὸν 1, ἤτοι μὲ τὴν πρόσθεσιν 1+1+1+1=4, ἀλλὰ μὲ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἑτοίμου ἀριθμοῦ 4, τὴν στηριζομένην εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐποπτείαν. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον μανθάνουν καὶ τὰ ἄλλα γνωρίσματα τοῦ 4. Μανθάνουν π.χ., ὅτι γνώρισμά του εἶναι τὸ 2+2 μὲ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ 4 εἰς 2 καὶ 2 καὶ ὄχι μὲ τὴν ἄνοδον 2 βαθμίδων ἀπὸ τὸ 2, ἤτοι μὲ τὴν πρόσθεσιν 2+2=4 κ. οὕτ. καθ. Μερικοὶ μάλιστα ἀπὸ τοὺς θιασώτας τοῦ Grube δὲν αἰσθάνονται οὔτε τὴν ἀνάγκην νὰ ἀρχίσουν τοὐλάχιστον μὲ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἐξεταζομένου ἀριθμοῦ εἰς τὰς μονάδας, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀποτελεῖται, καὶ ἔτσι νὰ διδάξουν ὡς πρῶτον γνώρισμά του τὴν σύστασίν του ἀπὸ ὡρισμένας μονάδας. Τοιουτοτρόπως π. χ. ὁ Klauwell (Das erste Schuljahr, Leipzig, 1883, σελ. 51 παρὰ Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 1, σελ. 42) ἐργάζεται μὲ τὸν ἀριθμὸν 7 ὡς ἑξῆς: Θέτει ἐνώπιον τῶν μαθητῶν 7 κύβους, τοὺς ὁποίους καὶ παρουσιάζει ὡς 7. Μετὰ τοῦτο μετακινεῖ ὀλίγον 3 ἀπ᾿ αὐτοὺς καὶ ἐρωτᾷ τοὺς μαθητάς: «Ἀπὸ τί γίνεται τώρα ὁ 7;». Ἀπόκρισις: «Ὁ 7 γίνεται τώρα ἀπὸ 4 καὶ 3». Μόλις δέ, ἀφοῦ γίνουν ὅλαι αἱ δυναταὶ ἀναλύσεις τοῦ 7, γίνεται εἰς τὸ τέλος καὶ ἡ ἀνάλυσίς του εἰς μονάδας. Ἀλλὰ εἶναι προφανές, ὅτι μία ἀνάλυσις, ἡ ὁποία δὲν στηρίζεται εἰς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ἀλλὰ βασίζεται μόνον εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐποπτείαν, δὲν γίνεται μὲ κατανόησιν, ἀλλὰ μόνον μηχανικά, δι᾿ αὐτὸ δὲ καὶ τὰ πορίσματά της, ἤτοι τὰ γνωρίσματα τῶν ἀριθμῶν, θὰ διατηροῦνται μὲν εἰς τὴν ψυχὴν τῶν παίδων, ἐφόσον θὰ ἐξακολουθῇ ἡ ἐξωτερικὴ ἐποπτεία, θὰ ἐξαλειφθοῦν δὲ ἀπ᾿ αὐτήν, ὅταν παύσῃ καὶ ἡ ἐποπτεία. Ἡ μόνη ὁδός, διὰ τῆς ὁποίας ἠμποροῦν νὰ μάθουν οἱ μαθηταὶ τὰ γνωρίσματα τῶν ἀριθμῶν μὲ κατανόησιν καὶ νὰ τὰ ἐντυπώσουν στερεὰ εἰς τὴν ψυχήν των, εἶναι ***ἡ ὁδὸς τῆς ἐξαγωγῆς των***

ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν, ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν.).

Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα, ἂν ἐπιτυγχάνεται μὲ τὸ προκείμενον εἶδος τῆς διατάξεως ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Αἱ πράξεις ***δὲν γίνονται*** εἰς αὐτὸ μὲ τὸν φυσικὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεώς των, ἤτοι ***μὲ τὴν ἄνοδον καὶ κάθοδον εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειράν***, ἀλλὰ ***ἐξάγονται ἕτοιμαι ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν*** καὶ τὰ πορίσματά της, ἤτοι ἀπὸ τὰ γνωρίσματα τῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἀνάλυσις δεικνύει π.χ., ὅτι ὁ 4 γίνεται ἀπὸ 1 καὶ 1 καὶ 1 καὶ 1· ἀπὸ αὐτὸ ἐξάγεται ἀμέσως τὸ συμπέρασμα: «λοιπὸν 1+1+1+1=4». Ἐπειδὴ δηλαδὴ ὁ 4 ἀναλύεται, καθὼς δεικνύει ἡ ἐξωτερικὴ ἐποπτεία, εἰς 1+1+1+1, δι' αὐτὸ 1+1+1+1=4. Ἐπειδὴ ἐπίσης ὁ 4 ἀναλύεται, ὅπως δεικνύει ἡ ἐποπτεία, εἰς 2 καὶ 2, δι' αὐτὸ 2+2=4 κ. οὕτ. καθ. Φυσικὰ δὲ ὁ Klauwell, ὁ ὁποῖος ἀναλύει τὸν 7 κατὰ πρῶτον εἰς 4 καὶ 3, μόνον δὲ εἰς τὸ τέλος τῆς ἐπεξεργασίας του ζητεῖ τὴν ἀνάλυσίν του εἰς τὰς μονάδας, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀποτελεῖται, ὡς πρώτην πρόσθεσιν σχετικὴν μὲ τὸν 7 ἐξάγει τὴν «4 + 3 = 7» καὶ ὡς τελευταίαν τὴν «1+1+1+1+1+1+1». Ἀλλὰ εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐφόσον αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις δὲν συνίστανται εἰς τὴν ἄνοδον καὶ κάθοδον ὡρισμένων βαθμίδων εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειράν, ἀλλὰ ἐξάγονται ἕτοιμαι ἀμέσως ἀπὸ τὰς ἀναλύσεις τῶν ἀριθμῶν, δὲν θὰ μανθάνωνται συνειδητά, ἀλλὰ ὅλως διόλου ***μηχανικά***. Ἐφόσον ὁ παῖς ἐξάγει τὴν πρότασιν τῆς προσθέσεως 2+2=4 μόνον ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν 4=2+2, ἐπειδὴ ἡ ἀνάλυσις δὲν μεταδίδει καὶ τὴν κατανόησιν τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελεῖται ἡ πρόσθεσις, ἡ πρότασις τῆς προσθέσεως 2+2=4 θὰ ἐντυπωθῇ μόνον μηχανικά. Ἐὰν δὲ ἡ πρότασις αὐτὴ τῆς προσθέσεως, ἡ ὁποία ἐντυπώθηκε εἰς τὸν παῖδα μὲ τὸν μηχανικὸν αὐτὸν τρόπον, λησμονηθῇ, δὲν θὰ ἠμπορῇ νὰ τὴν σχηματίσῃ ἐκ νέου, διότι δὲν ἔχει κατανοήσει τὸν τρόπον τοῦ σχηματισμοῦ της. Ὅλως διόλου ὅμως διαφορετικὰ θὰ ἔχῃ τὸ πρᾶγμα, ἂν ὁ μαθητὴς σχηματίσῃ τὴν πρότασιν 2+2=4 ἀνερχόμενος ἀπὸ τὸν 2 δύο βαθμίδας (εἴτε κατὰ μονάδας, εἴτε κατὰ δυάδας). Ἡ πρότασις 2+2 θὰ τοῦ λέγῃ πάντοτε, ὅτι ὀφείλει νὰ ἀνέλθῃ ἀπὸ τὸν 2 δύο βαθμίδας, δι' αὐτὸ δὲ θὰ ἠμπορῇ νὰ ἐξάγῃ πάντοτε τὸ ζητούμενον πόρισμα 4, τὸ ὁποῖον μὲ τὴν συχνὴν ἐξαγωγὴν θὰ ἐντυπωθῇ στερεὰ εἰς τὴν μνήμην του (πρβ. Räther, ὅπ. ἀν.).

Μὲ τὴν διάταξιν λοιπὸν αὐτὴν τοῦ Grube δὲν γίνεται μὲ ἐπιτυχίαν καμία ἀπὸ τὰς δύο ἐργασίας, τὰς ὁποίας ζητοῦμεν ἀπὸ τοὺς παῖδας, οὔτε δηλ. ἡ ἐξαγωγὴ τῶν γνωρισμάτων τῶν ἀριθμῶν, οὔτε ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἐπ' αὐτῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Ἡ κυρία δὲ αἰτία τοῦ πράγματος εἶναι, ὅτι, ἐνῷ θὰ ἔπρεπε ἡ μὲν ἐξαγωγὴ τῶν γνωρισμάτων τῶν ἀριθμῶν νὰ βασίζεται εἰς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ἡ δὲ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων αὐτῶν νὰ γίνεται διὰ τῆς ἀνόδου καὶ τῆς καθόδου εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειράν, καὶ αἱ δύο αὐταὶ ἐργασίαι στηρίζονται εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἐξεταζομένου ἀριθμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν κατ' ἀνάγκην ὁδηγεῖ ἡ σύγκρισίς του μὲ τοὺς προηγουμένους του, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν ἀφετηρίαν τῆς ἐξετάσεώς του. Ἀλλὰ ἡ ἀνάλυσις δὲν εἶναι ***αὐτοτελὴς ἀριθμητικὴ πρᾶξις***. Εἶναι ἁπλούστατα ***τὸ πόρισμα τῶν 4 θεμελιωδῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ τοῦ εἰς αὐτὰς βασιζομένου σχηματισμοῦ τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν***, εἶναι τρόπον τινὰ ἡ συμπερίληψις τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν, τὸ γενικὸν καὶ ἀφῃρημένον προϊόν των, ὅπως ὀρθότατα παρατηρεῖ ὁ Räther, (ὅπ. ἀν. σ.45). Ἀκριβῶς δὲ δι' αὐτὸ καὶ ἡ ἐπιτυχὴς ἐκτέλεσις τῆς ἀναλύσεως εἶναι τὸ κριτήριον τῆς πλήρους κατανοήσεως καὶ τῶν 4 θεμελιωδῶν πράξεων καὶ τοῦ ἀπὸ τὰς πράξεις αὐτὰς ἐξαγομένου περιεχομένου τῶν ἀριθμῶν. Ἂν οἱ μαθηταὶ ἠμποροῦν νὰ ἀναλύουν ἕνα ἀριθμὸν εἰς τοὺς προσθετέους, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἀποτελεῖται, καὶ εἰς τοὺς παράγοντάς του, αὐτὸ εἶναι ἀσφαλὴς ἀπόδειξις, ὅτι ἐκτελοῦν μὲ κατανόησιν τὰς θεμελιώδεις πράξεις εἰς τὴν μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ διήκουσαν σειράν, δι' αὐτὸ δὲ καὶ ἔχουν σχηματίσει σαφεστάτην καὶ εὐκρινεστάτην τὴν ἔννοιάν του. Ἀπὸ τὴν φύσιν αὐτὴν τῆς ἀναλύσεως ἐξάγεται, ὅτι ἡ θέσις της εἶναι κατόπιν ἀπὸ τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις καὶ τὸν εἰς αὐτὰς βασιζόμενον σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν. Ὅλας αὐτὰς τὰς ἐργασίας τὰς προϋποθέτει καὶ εἰς αὐτὰς στηρίζεται. Μόνον εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τασσομένη θὰ ἠμπορῇ νὰ γίνεται ἀπὸ τοὺς παῖδας μὲ κατανόησιν. Ἀκριβῶς δὲ διὰ τὴν φύσιν αὐτὴν τῆς ἀναλύσεως καὶ οἱ παῖδες μόνοι των, χωρὶς διδασκαλίαν, πρῶτα φθάνουν εἰς κάθε νέον ἀριθμὸν μὲ τὴν ἀρίθμησιν καὶ ἔπειτα τὸν αναλύουν. Ἐφόσον ἀπεναντίας τάσσεται ἡ ἀνάλυσις ἐκεῖ, ὅπου τάσσεται ἀπὸ τὴν προκειμένην διάταξιν, στηρίζεται δὲ μόνον εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐποπτείαν τοῦ ἑτοίμου ἀριθμοῦ, θὰ γίνεται ὅλως διόλου μηχανικά, μηχανικὰ δὲ δι' αὐτὸ θὰ γίνωνται καὶ αἱ εἰς αὐτὴν στηριζόμεναι ἐργασίαι τῆς ἐξαγωγῆς τῶν γνωρισμάτων τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῆς ἐκτελέσεως τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν.).

Ἀποβλέποντες τώρα εἰδικῶς εἰς τὴν μορφήν, μὲ τὴν ὁποίαν παρουσιάζεται τὸ προκείμενον εἶδος τῆς διατάξεως ἀπὸ τὸν Grube, ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν σύντομα τὰ ἑξῆς ἀκόμη:

1) Ὁ G. παραλείπει εἰς τὴν διάταξίν του τὰς ἀσκήσεις τῆς ἀνιούσης καὶ κατιούσης ἀπαριθμήσεως, μὲ τὰς ὁποίας ὁ κάθε ἀριθμὸς γίνεται καλύτερα ἀντιληπτὸς ὡς μέλος τῆς σειρᾶς 1–10.

2) Ὁ G. εἰς τὰς ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως ἐπιτάσσει τὰς ἀσκήσεις τῆς ἄλλης πράξεως τῆς ἀνιούσης ἀριθμήσεως, ἤτοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, κατόπιν δὲ ἀπὸ αὐτὰς τάσσει τὰς ἀσκήσεις τῶν 2 πράξεων τῆς κατιούσης ἀριθμήσεως, ἤτοι τῆς ἀφαιρέσεως καὶ τῆς διαιρέσεως. Πολὺ ὅμως ***ὀρθότερον εἶναι εἰς τὴν πρόσθεσιν νὰ ἐπιτάσσεται ἡ ἀφαίρεσις, μετ' αὐτὴν δὲ νὰ διδάσκωνται ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις***, διότι α) ἡ φύσις τῆς προσθέσεως ὡς ἀνόδου εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν γίνεται καλύτερα ἀντιληπτή, ἂν ἀμέσως μετὰ τὴν ἄνοδον ἐπακολουθῇ ἡ ἀντίθετη πορεία, δηλ. ἡ κάθοδος, β) καὶ ἡ ἀριθμητικὴ ἀκόμη σειρὰ ὁλονὲν περισσότερον γίνεται σαφὴς καὶ εὐκρινὴς εἰς τὸ πνευματικὸν ὄμμα τῶν μαθητῶν, ἂν μετὰ κάθε ἄνοδον ὡρισμένων βαθμίδων εἰς τὴν σειρὰν ἐπιχειροῦν ἀμέσως κάθοδον τῶν ἰδίων βαθμίδων εἰς αὐτήν, 3) ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἐξελέγχουν ἡ μία τὴν ἄλλην καὶ 4) εἰς κάθε πρόβλημα προσθέσεως ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνα πρόβλημα ἀφαιρέσεως, ὄχι ὅμως καὶ πολλαπλασιασμοῦ (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 47 καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σελ. 84). Προφανὲς δὲ εἶναι, ὅτι τάσσοντες εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τὴν ἀφαίρεσιν πρέπει νὰ ἐπεξεργαζώμεθα κάθε σειράν της (ἀφαίρεσις τοῦ 1, τοῦ 2 κ. τ. λ.) ὄχι αὐτοτελῶς, ἀλλὰ ὡς ἀντιστροφὴν τῆς ἀμέσως προηγηθείσης σειρᾶς τῆς προσθέσεως.

3) Ὁ G. ἀποχωρίζει τὰς ἀσκήσεις τῆς κάθε πράξεως τὴν μίαν ἀπὸ τὴν ἄλλην, ἐνῷ σκοπιμώτερον εἶναι καὶ διὰ τὴν κατανόησιν τῆς πράξεως καὶ διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ περιεχομένου τοῦ διδασκομένου ἀριθμοῦ αἱ ἀσκήσεις τῆς κάθε πράξεως νὰ συνενώνωνται εἰς μίαν ὁμάδα, ἐκτὸς φυσικὰ τῶν ἀσκήσεων τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως, αἱ ὁποῖαι, καθὼς εἴδαμεν πρὸ ὀλίγου, σκοπιμώτερον εἶναι νὰ συνδιδάσκωνται καὶ μάλιστα ἔτσι, ὥστε εἰς κάθε σειρὰν προσθέσεως νὰ ἐπακολουθῇ ἡ ἀντίστοιχη σειρὰ τῆς ἀφαιρέσεως.

4) Ἀπὸ τὰς ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ***προτάσσεται*** εἰς τὴν διάταξιν τοῦ G. ***ἡ ἄσκησις μὲ πολλαπλασιαστὴν τὸν 1***, ἡ ἄσκησις δηλ., μὲ τὴν ὁποίαν θὰ σχηματίζεται ὁ νέος ἀριθμὸς ἀπὸ τὸν ἑαυτόν του, πολλαπλασιαζόμενον μὲ τὴν μονάδα. Ὀρθότερον εἶναι ἡ ἄσκησις αὐτὴ νὰ μὴ προηγῆται ὡς αὐτοτελὴς ἄσκησις, ἀλλὰ ***νὰ ἐπιτάσσεται*** εἰς τὰς ἄλλας ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς συμπλήρωσις. Ὁ λόγος δὲ τοῦ πράγματος εἶναι, ὅπως ὀρθότατα παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀν., σελ. 47), ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ τὴν μονάδα δὲν εἶναι εὔκολον νὰ κατανοηθῇ ἐξ ἀρχῆς ἀπὸ τοὺς μικροὺς παῖδας, οἱ ὁποῖοι δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐννοήσουν, ὅτι ὑπάρχει τίποτε διὰ νὰ λογαριάσουν εἰς τὰ σχετικὰ προβλήματα. Δι' αὐτὸ λοιπὸν δὲν πρέπει νὰ ἀρχίζωμεν μὲ τέτοιους πολλαπλασιασμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν μόνον θεωρητικὴν ἀξίαν καὶ πρέπει νὰ τάσσωνται εἰς τὸ τέλος τῶν ἀσκήσεων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅπου καὶ κατανοοῦνται πλέον ἀπὸ τοὺς παῖδας καὶ μάλιστα ὡς συμπλήρωμα τῶν ἀσκήσεων ἐκείνων. Φυσικὰ δέ, ὅ,τι εἴπαμεν διὰ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς μὲ πολλαπλασιαστὴν τὸν 1, ἰσχύει καὶ διὰ τὰς διαιρέσεις μὲ διαιρέτην τὴν μονάδα, ἐφόσον τοὐλάχιστον αἱ διαιρέσεις αὐταὶ παρουσιάζονται μὲ τὴν μορφὴν τοῦ μερισμοῦ.

Ὅ,τι τώρα ἐξάγεται ἀπὸ ὅσα εἴπαμεν διὰ τὸ προκείμενον εἶδος τῆς διατάξεως, εἶναι τὸ ἑξῆς. Μολονότι εἶναι ἀξιέπαινος ὁ σκοπός του, ὁ ὁποῖος, καθὼς εἴπαμεν, ἀποβλέπει εἰς τὸ νὰ μὴ προχωροῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς νέου ἀριθμοῦ, πρὶν γίνουν τέλειοι κάτοχοι ὅλων τῶν γνωρισμάτων τῶν προηγουμένων του, ἐν τούτοις ἐπειδὴ βασίζει τὸν σχηματισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς τὴν ἀνάλυσιν καὶ δι' αὐτὸ δὲν συντελεῖ οὔτε εἰς τὴν ἐπιτυχῆ πλήρωσιν τοῦ σκοποῦ του οὔτε εἰς τὴν ἐπιτυχῆ ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, δι᾽ αὐτὸ δὲν εἶναι ἄξιον συστάσεως. Ἐν τούτοις πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι τὸ εἶδος αὐτὸ τῆς διατάξεως τὸ ἀποδέχονται ἀρκετοὶ ἀπὸ τοὺς Μεθοδικούς, ὅσοι φρονοῦν, ὅτι οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ σχηματίζουν τοὺς ἀριθμοὺς μὲ στιγμιαίαν ἀντίληψιν. Τὸ πρᾶγμα αὐτὸ θὰ μᾶς φανῇ πολὺ φυσικόν, ἂν λάβωμεν ὑπ᾽ὄψιν, ὅτι ἀπὸ τὸν τοιουτοτρόπως γινόμενον σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν οἱ μαθηταὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ φθάσουν μὲ ἄλλο μέσον εἰς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις παρὰ μόνον μὲ τὴν ἀνάλυσιν τῶν σταθερῶν εἰκόνων τῶν ἀριθμῶν εἰς τὰ στοιχεῖά των, μὲ τὴν ὁποίαν, καθὼς εἴδαμεν, καὶ τὸ προκείμενον εἶδος τῆς διατάξεως προβαίνει εἰς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις.

Ἡ ἐξέτασις τῶν ἀνωτέρω περιγραφέντων εἰδῶν τῆς διατάξεως μᾶς δεικνύει καθαρά, ὅτι, ἂν πρόκειται οἱ μαθηταὶ νὰ μὴ προχωροῦν εἰς τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς νέου ἀριθμοῦ, πρὶν μάθουν διὰ τῆς ἀριθμήσεως ὅλα τὰ γνωρίσματα τῶν προηγουμένων του, καὶ ἂν πρόκειται μαζὶ μὲ τὸν σχηματισμὸν τοῦ κάθε ἀριθμοῦ νὰ ἀσκοῦνται τελείως εἰς ὅλας τὰς σχετικὰς μὲ αὐτὸν ἀριθμητικὰς πράξεις διὰ τῆς ἐλευθέρας ἀνόδου καὶ καθόδου εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειράν, πρέπει προφανῶς ἡ ἀριθμητικὴ ὕλη ***νὰ διαταχθῇ ἔτσι, ὥστε τὸ ἑκάστοτε μονογραφικῶς ἐξεταζόμενον νὰ μὴ εἶναι ὁ νέος ἀριθμός, ἀλλὰ ἡ σειρά, τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἀποτελεῖ τὸ τελευταῖον μέλος***. Εἰς κάθε τέτοιαν σειρὰν θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐκτελοῦν ἀνερχόμενοι καὶ κατερχόμενοι εἰς αὐτὴν ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας νέαι δι᾽ αὐτοὺς θὰ εἶναι ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων ἐξαγόμενον ἢ ἀφετηρία εἶναι τὸ τελευταῖον μέλος τῆς σειρᾶς, ἤτοι ὁ νέος ἀριθμός, νὰ ἐξάγουν δὲ ἀπὸ τὰς τελευταίας αὐτὰς πράξεις ὅλα τὰ γνωρίσματα τοῦ νέου ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τοιουτρόπως θὰ ἔχουν σχηματίσει ἐντελῶς σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας, πρὶν προβοῦν εἰς τὴν ἐξέτασιν τοῦ ἀκολούθου του ἢ ἀκριβέστερον εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς σειρᾶς, τῆς ὁποίας ὁ ἀκόλουθος ἀριθμὸς ἀποτελεῖ πάλιν τὸ τελευταῖον μέλος. Μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν ***ὁ σχηματισμὸς τῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων***, ἡ ἀρίθμησις, ***δὲν θὰ εἶναι***, ὅπως εἰς τὰς προηγουμένας διατάξεις, ***δύο ἰδιαίτεραι ἐργασίαι, ἀλλὰ θὰ γίνωνται μαζὶ καὶ μάλιστα ἔτσι, ὥστε ὁ σχηματισμὸς τῶν ἐννοιῶν***

νὰ εἶναι προϊὸν τῆς ἀριθμήσεως. Τὸ νέον αὐτὸ εἶδος τῆς διατάξεως, τοῦ ὁποίου ἕνας ἀπὸ τοὺς κυριωτέρους ἀντιπροσώπους εἶναι ὁ Räther (ὅπ. ἀν., σ. 55—58) καὶ τὸ ὁποῖον προφανῶς συνδυάζει τὰ πλεονεκτήματα τῶν προηγουμένων εἰδῶν, χωρὶς νὰ ἔχῃ τὰ μειονεκτήματά των, ἔχει εἰς τὰς γενικωτάτας του γραμμὰς ὡς ἑξῆς. Ὅλη ἡ ἀριθμητικὴ σειρὰ 1—10 κατανέμεται εἰς ***μερικὰς σειράς***, ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς ὁποίας ἔχει ὡς τελικὸν μέλος τὸν ἑκάστοτε νέον ἀριθμόν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 1 εἶναι γνωστὸς εἰς τοὺς μαθητάς, δὲν εἶναι δὲ ἄλλωστε ἀριθμός, ἀλλὰ γίνεται ἀριθμός, ἐφόσον τίθεται εἰς ἀντίθεσιν μὲ κάποιον πλῆθος, πρῶτος δὲ καθαυτὸ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 2, ἐννοεῖται, ὅτι αἱ μερικαὶ αὐταὶ σειραὶ θὰ εἶναι 9, ἤτοι κατὰ σειρὰν αἱ 1—2, 1—3, 1—4, . . . 1—10. Εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς μερικὰς αὐτὰς σειρὰς θὰ ἐκτελοῦν οἱ μαθηταὶ ὅλας τὰς δυνατὰς ἀριθμητικὰς πράξεις. Τὸ κορύφωμα τῶν πράξεων αὐτῶν θὰ ἀποτελοῦν φυσικὰ ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων ἐξαγόμενον ἢ ἀφετηρία θὰ εἶναι τὸ τελευταῖον μέλος τῆς σειρᾶς, ὁ νέος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ἔτσι θὰ σχηματίζουν οἱ μαθηταὶ ἐντελῶς σαφῆ καὶ εὐκρινῆ ἔννοιαν.

Ἄς ἴδωμεν τώρα, πῶς θὰ διατάσσεται ἡ ὕλη τῆς κάθε μερικῆς σειρᾶς.

Δὲν χωρεῖ καμία ἀμφιβολία κατόπιν ἀπὸ ὅλα, ὅσα ἔχομεν εἰπεῖ ἕως τώρα, ὅτι ἀπὸ ὅλας τὰς ἀσκήσεις, ὅσαι συντελοῦν εἰς τὴν κατανόησιν τοῦ περιεχομένου τοῦ νέου ἀριθμοῦ τῆς μερικῆς σειρᾶς (ἤτοι τοῦ τελευταίου) καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ γίνωνται κατ᾽ ἀρχὰς μὲν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξωτερικῆς ἐποπτείας, κατόπιν δὲ καὶ χωρὶς αὐτήν, ***τὴν πρώτην σειρὰν*** θὰ ἀποτελοῦν ***αἱ ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως***.

Ἡ μὲν πρόσθεσις, ὡς ἡ κατ᾽ ἐξοχὴν ἀρχικὴ καὶ θεμελιώδης, δι᾽ αὐτὸ δὲ καὶ ἁπλουστάτη ἀπὸ ὅλας τὰς πράξεις, συντελεῖ εὐκολώτερα ἀπὸ κάθε ἄλλην εἰς τὴν κατανόησιν τοῦ περιεχομένου τοῦ νέου ἀριθμοῦ, ἡ δὲ ἀφαίρεσις ἀποτελεῖ συμπλήρωμά της. Ἀπὸ τὰς ἀσκήσεις πάλιν αὐτὰς προφανῶς θὰ προηγῆται ***ἡ πρόσθεσις τῆς μονάδος***, μὲ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ γίνεται ὁ πρῶτος σχηματισμὸς τοῦ νέου ἀριθμοῦ, καὶ ἡ ἀντιστροφή της, ἤτοι ***ἡ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος***. Ἂν π. χ. διδάσκεται ἡ μερικὴ σειρὰ 1—6, ἀφοῦ οἱ μαθηταὶ σχηματίσουν ἐκ νέου τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς 2—5 ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ 1 ($1+1=2$, $2+1=3$, $3+1=4$, $4+1=5$) καὶ φθάσουν ἔτσι εἰς τὸν τελευταῖον γνωστὸν ἀριθμὸν 5, προκαλοῦνται νὰ σχηματίσουν ἀπὸ αὐτὸν μὲ τὴν πρόσθεσιν τοῦ 1 τὸν νέον ἀριθμὸν 6. Εἰς τὴν πρόσθεσιν αὐτὴν ἐπιτάσσεται ἀμέσως ἡ ἀντίστοιχη ἀφαίρεσις τῆς μονάδος 6—1. Οἱ μαθηταὶ προκαλοῦνται νὰ κατέλθουν ἀπὸ τὸν νέον ἀριθμὸν 6 μὲ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ 1 εἰς τὸν ἀριθμὸν 5, ἀπὸ τὸν ὁποῖον καὶ ἐσχηματίσθηκε, κατόπιν δὲ νὰ ἐπαναλάβουν τὴν ἀπὸ τὴν προηγουμένην διδασκαλίαν γνωστὴν πλέον κάθοδον ἀπὸ τὸν 5 εἰς τὸν 4 κ.τ.λ. Ὡς δεύτερη ἄσκησις πρέπει προφανῶς νὰ ἐπακολουθῇ ***ἡ ἀνιοῦσα καὶ ἡ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις εἰς τὴν μερικὴν σειράν***, διότι αἱ ἀσκήσεις αὐταὶ δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, καθὼς ἠξεύρομεν, παρὰ ***συντομευμένη πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τοῦ 1***. Κατόπιν θὰ ἐπακολουθοῦν ***ἀσκήσεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως εἰς τὴν σειρὰν πρῶτα τοῦ 2, ἔπειτα τοῦ 3, κατόπιν τοῦ 4 κ. οὕτ. καθ.*** Ἀπὸ αὐτὰς αἱ μὲν ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως θὰ καταλήγουν εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ νέου ἀριθμοῦ (ἐδῶ τοῦ 6) ἀπὸ ἕνα προηγούμενόν του διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ 2 ($4+2=6$), τοῦ 3 ($3+3=6$) κτλ., αἱ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως θὰ ἀρχίζουν μὲ τὸν σχηματισμὸν ἀπὸ τὸν νέον ἀριθμὸν (ἐδῶ τὸν 6) ἑνὸς κατωτέρου του διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 2 ($6-2=4$), τοῦ 3 ($6-3=3$) κ.τ.λ.

Μετὰ τὴν σειρὰν τῶν ἀνωτέρω ἀσκήσεων τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως θὰ ἐπακολουθῇ πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν ἡ σειρὰ ***τῶν ἀσκήσεων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ***, αἱ ὁποῖαι θὰ στηρίζωνται εἰς τὴν γνωστὴν πρόσθεσιν, τῆς ὁποίας, ὅπως ἠξεύρομεν, συντόμευσίς εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός. Θὰ προηγῆται ἡ ἄσκησις μὲ πολλαπλασιαστὴν τὸν 2, θὰ ἐπακολουθοῦν δὲ κατὰ σειρὰν ἀσκήσεις μὲ πολλαπλασιαστὴν τὸν 3, τὸν 4 κ.τ.λ. Μὲ τὰς ἀσκήσεις αὐτὰς θὰ σχηματίζεται ὁ νέος ἀριθμὸς ἀπὸ ἕνα προηγούμενόν του πολλαπλασιαζόμενον μὲ τὸν 2 ($3\times2=6$), μὲ τὸν 3 ($2\times3=6$) κ.τ.λ. Τελευταία ἄσκησις, ὅπως εἴπαμεν καὶ ἀλλοῦ, θὰ εἶναι ἡ ἄσκησις μὲ πολλαπλασιαστὴν τὸν 1 ($6\times1=6$).

Μετὰ τὴν σειρὰν τῶν ἀσκήσεων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ ἐπακολουθῇ ***ἡ σειρὰ τῶν ἀσκήσεων τῆς διαιρέσεως (τοῦ μερισμοῦ)***, ἡ ὁποία εἶναι ἡ δυσκολώτερη ἀπὸ ὅλας τὰς θεμελιώδεις πράξεις, γίνεται δὲ εὐκολώτερα, ἂν δὲν διδάσκεται αὐτοτελῶς, ἀλλὰ σχετιζομένη μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον θὰ ἠμπορῇ νὰ γίνεται, ἂν διδάσκεται τελευταία. Θὰ προηγῆται ἡ ἄσκησις, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρέτης θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὡς διαιρετέον λαμβανόμενον νέον ἀριθμὸν ($6:6=1$), θὰ ἐπακολουθοῦν δὲ ἀσκήσεις, εἰς τὰς ὁποίας ὁ διαιρέτης θὰ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρετέον αὐτὸν ($6:3=2$, $6:2=3$), θὰ ἐπιτάσσεται δὲ ὡς τελευταία ἡ ἄσκησις μὲ διαιρέτην τὴν μονάδα ($6:1=6$), ἡ ὁποία ἠμπορεῖ καὶ νὰ παραλείπεται.

Μετὰ τὰς ἀσκήσεις τῆς διαιρέσεως πρέπει νὰ ἐπακολουθοῦν ***ἀσκήσεις ἀναλύσεως*** τοῦ νέου (καὶ μεγίστου) ἀριθμοῦ τῆς μερικῆς σειρᾶς εἰς ὅλους τοὺς δυνατοὺς προσθετέους, εἰς τὸ τέλος δὲ θὰ γίνωνται ἀσκήσεις μὲ ἀνάμικτα προβλήματα, τῶν ὁποίων σκοπὸς θὰ εἶναι ἡ στερέωσις τοῦ νέου καὶ ἡ ἐπανάληψις τῶν προδιδαχθέντων.

Συνοψίζοντες ὅλα τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι ἡ μὲν διάταξις ὅλης τῆς ὕλης εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 1—10 πρέπει νὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς:

1. Ἀριθμητικαὶ πράξεις εἰς τὴν σειρὰν 1—2 καὶ σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ 2.
2. Ἀριθμητικαὶ πράξεις εἰς τὴν σειρὰν 1—3 καὶ σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ 3.
3. Ἀριθμητικαὶ πράξεις εἰς τὴν σειρὰν 1—4 καὶ σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ 4.

. . . .

. . . .

9. Ἀριθμητικαὶ πράξεις εἰς τὴν σειρὰν 1—10 καὶ σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ 10, ἡ δὲ διάταξις τῆς ὕλης εἰς τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ 9 ἀνωτέρω τμήματα πρέπει νὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς:

Πρώτη σειρὰ ἀσκήσεων.

Α. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις.

1. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 1.
2. Ἡ ἀνιοῦσα καὶ ἡ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις.
3. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 2.
4. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 3 κ. οὕτ. κ.

Δεύτερη σειρὰ ἀσκήσεων.

Β. Ὁ πολλαπλασιασμός.

1. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ τὸν 2.
2. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ τὸν 3.
3. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ τὸν 4.
4. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ τὸν 5.
5. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ τὸν 1.

Τρίτη σειρὰ ἀσκήσεων.

Γ. Ἡ διαίρεσις.

1. Ἡ διαίρεσις μὲ διαιρέτην ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον.
2. Ἡ διαίρεσις μὲ διαιρέτην μικρότερον ἀπὸ τὸν διαιρετέον.
3. Ἡ διαίρεσις μὲ τὸν 1 (δυναμένη καὶ νὰ παραλείπεται).

Τέταρτη σειρὰ ἀσκήσεων.

Δ. Ἡ ἀνάλυσις.

Ἀνάλυσις τοῦ μεγίστου ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς εἰς 2 (ἢ καὶ 3) προσθετέους.

Πέμπτη σειρὰ ἀσκήσεων.

Ε. Ἀσκήσεις μὲ ἀνάμικτα προβλήματα πρὸς στερέωσιν τοῦ νέου καὶ ἐπανάληψιν τῶν προδιδαχθέντων.

Ἐφαρμόζοντες τὸ ἀνωτέρω σχέδιον εἰς τὴν μερικὴν σειρὰν 1—6 θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς διάταξιν τῆς ὕλης της, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ νέαι ἀσκήσεις παριστάνονται μὲ μεγαλυτέρους ἀριθμούς:

Α. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις.

1α	1+1=	1β	**6—1=**	2α	1, 2, 3, 4, 5, 6.
	2+1=		5—1=	2β	6, 5, 4, 3, 2, 1.
	3+1=		4—1=		
	4+1=		κ.τ.λ.		
	5+1=				
3α	1+2=	3β	**6—2=**		
	2+2=		5—2=		
	3+2=		4—2=		
	4+2=		κ.τ.λ.		

4α	1+3=	4β	**6—3=**
	2+3=		5—3=
	3+3=		4—3=
			3—3=

5α	1+4=	5β	**6—4=**	6α	**1+5=**	6β	**6—5=**
	2+4=		5—4=				5—5=
			4—4=				
		7β	**6—6=**				

Β. Ὁ πολλαπλασιασμός.

1. 2×2=	2. **2×3=**	3. 2×1=
3×2=		3×1=
		4×1=
		5×1=
		6×1=

Γ. Ἡ διαίρεσις.

1. **6 : 6=** 2α **6 : 3=** 2β **6 : 2=** 3. **6 : 1=**

Δ. Ἡ ἀνάλυσις.

6=5+	6=2+
6=4+	6=3+ κ.τ.λ.
6=1+	

Ε. Ἀσκήσεις ἐπὶ ἀναμίκτων προβλημάτων.

1.	2.	3.	4.	5.
3+2=	6—2=	2+2+1=	2×2=	2=1+
2+3=	6—4=	1+3+1=	2×3=	4=2+
4+2=	6—1=	2+2+2=	3×1=	6=3+
2+4=	6—3=	3+2+1=	3×2=	5=4+
5+1=	6—5=	6—1—1=	5×1=	6=4+
1+5=	6—6=	6—2—2=	6×1=	6=5+
1+3=	5—3=	6—3—3=	6 : 3=	3=1+1+
3+1=	4—2=	6—4—2=	6 : 6=	6=2+2+
			6 : 2=	
			4 : 2=	

Καὶ ἐπιπολαία ἀκόμη παρατήρησις τῆς προκειμένης διατάξεως δεικνύει καθαρά, ὅτι μὲ αὐτὴν οἱ μαθηταὶ δὲν προχωροῦν εἰς τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς νέου ἀριθμοῦ, πρὶν μάθουν ὅλα τὰ γνωρίσματα τῶν προηγουμένων του. Ἐπειδὴ δὲ τὰ γνωρίσματα τοῦ κάθε ἀριθμοῦ ἐξάγονται ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ γίνουν εἰς τὴν σειράν, ἡ ὁποία φθάνει ἕως τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, μὲ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ ἀσκοῦνται μαζὶ οἱ μαθηταὶ καὶ εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Ἐκτελοῦνται δὲ ὅλαι αἱ σχετικαὶ μὲ τὰς πράξεις αὐτὰς ἀσκήσεις ἀπὸ τοὺς μαθητὰς μὲ κατανόησιν καὶ αὐτενέργειαν, διότι ὡς ἐκ τῆς διατάξεώς των ἔχουν οἱ μαθηταὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ τὰς ἐκτελέσουν ἔτσι. Διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς ἡ προκειμένη διάταξις εἶναι ἀξία κάθε συστάσεως καὶ πρέπει νὰ προτιμᾶται ἀπὸ κάθε ἄλλην.

Θὰ ἠμποροῦσε ἴσως νὰ παρατηρήσῃ κανείς, ὅτι μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν ὑποχρεώνονται οἱ μαθηταὶ νὰ ἐπαναλαμβάνουν εἰς κάθε μερικὴν σειρὰν γνωστὰς πλέον ἀπὸ τὴν προηγουμένην διδασκαλίαν ἀσκήσεις. Ἀλλὰ ἡ ἐπανάληψις αὐτή, ἐκτὸς τοῦ ὅτι προπαρασκευάζει τὴν κατανόησιν τῶν νέων ἀσκήσεων, συντελεῖ καὶ εἰς τὴν στερεωτέραν ἐντύπωσιν τῶν γνωστῶν. Ἐφόσον δὲ θὰ παρεμβάλλεται—μὲ κατάλληλον μάλιστα διατύπωσιν τοῦ σκοποῦ τῆς διδασκαλίας—ὡς ἀπαραίτητον συστατικὸν τῆς εὑρέσεως τοῦ νέου, θὰ γίνεται δὲ καὶ μὲ γοργὸν ῥυθμόν, περιοριζομένη μάλιστα καὶ εἰς ἐκείνας μόνον ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἀσκήσεις, ὅσαι εἶναι περισσότερον ἀναγκαῖαι διὰ τὴν κατανόησιν τῆς νέας ἀσκήσεως (π. χ. εἰς μόνην τὴν ἄσκησιν $2+2=4$ πρὸ τῆς νέας $4+2=6$), θὰ ἀποφεύγεται καὶ ἡ μονοτονία, ἡ ὁποία συνοδεύει συνήθως τὰς ἐπαναλήψεις.

Οἱ Rein, Pickel καὶ Scheller (ὅπ. ἀν., σ. 369 κ. ἀκ.), οἱ ὁποῖοι συνιστοῦν καὶ τὸ προκείμενον εἶδος τῆς διατάξεως, διὰ νὰ ἀποφύγουν τὴν ἐπανάληψιν τῶν γνωστῶν ἀσκήσεων, διατάσσουν τὰ πράγματα ὡς ἑξῆς: Ἂν πρόκειται π. χ. νὰ διδαχθῇ ὁ ἀριθμὸς 9, ἤτοι ἡ σειρὰ 1 - 9, προκαλοῦν κατ' ἀρχὰς τοὺς μαθητὰς νὰ ἀνέλθουν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν ἕως τὸν 9 διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ 1 καὶ νὰ φθάσουν ἔτσι εἰς τὴν πρόσθεσιν $8+1=9$. Κατόπιν προκαλοῦν τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν ἀφαίρεσιν $9-1=8$. Ἔπειτα, ἀφοῦ τοὺς προκαλέσουν νὰ ἀνασχηματίσουν τὸν ἀριθμὸν 9 ἀπὸ τὸ $8+1$, τοὺς ζητοῦν πρῶτα νὰ κάμουν τὴν

ἀφαίρεσιν $9-2=7$ καὶ ἔπειτα τὴν πρόσθεσιν $7+2=9$. Εὑρισκόμενοι ἔτσι μὲ τὴν πρόσθεσιν αὐτὴν εἰς τὸν ἀριθμὸν 9 προκαλοῦν πάλιν τοὺς παῖδας νὰ κάμουν πρῶτα τὴν ἀφαίρεσιν $9-3=6$ καὶ ἔπειτα τὴν πρόσθεσιν $6+3=9$ κ. οὕτ. καθ. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν κάμνουν οἱ μαθηταὶ τὴν νέαν πρόσθεσιν $7+2=9$, χωρὶς νὰ εἶναι ἀναγκασμένοι νὰ κάμουν προηγουμένως τὰς γνωστὰς προσθέσεις $1+2$, $2+2$, $3+2$, $4+2$, $5+2$, $6+2$, κάμνουν ἐπίσης τὴν νέαν πρόσθεσιν $6+3=9$, χωρὶς νὰ κάμουν τὰς γνωστὰς προσθέσεις $1+3$, $2+3$ . . . καὶ $5+3$ κ. οὕτ. καθ. Ἐν τούτοις ἡ διάταξις αὐτὴ τῶν ἀσκήσεων δὲν ἠμπορεῖ νὰ τύχῃ τῆς ἐπιδοκιμασίας μας, διότι μὲ αὐτὴν **ὅλαι αἱ νέαι ἀφαιρέσεις (ἐκτὸς τῆς ἀφαιρέσεως τῆς μονάδος) προηγοῦνται τῶν ἀντιστοίχων νέων προσθέσεων** καὶ ἔτσι, ἀντὶ νὰ χρησιμοποιῆται ἡ πρόσθεσις διὰ τὴν διασάφησιν τῆς ἀντιστοίχου ἀφαιρέσεως, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὀρθότερον, γίνεται τὸ ἐναντίον. Ὁ θέλων νὰ ἀποφύγῃ μὲ κάθε τρόπον τὴν ἐπανάληψιν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρων γνωστῶν ἀσκήσεων—πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον, ὅπως εἴπαμεν, δὲν εἶναι ὀρθὸν—ἠμπορεῖ, ἀντὶ νὰ κάμῃ, ὅ,τι κάμνουν οἱ ἀνωτέρω Μεθοδικοί, νὰ κάμῃ τὸ ἀκόλουθον. Ἀφοῦ οἱ μαθηταὶ κάμουν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν $9-1$ καὶ εὑρεθοῦν ἔτσι εἰς τὸν ἀριθμὸν 8, προκαλεῖ αὐτοὺς νὰ κατέλθουν ἀπὸ τὸν 8 ἄλλην μίαν βαθμίδα, ἤτοι νὰ κάμουν τὴν γνωστὴν ἀφαίρεσιν $8-1$, νὰ φθάσουν δὲ ἔτσι εἰς τὸν ἀριθμὸν 7. Κατόπιν προκαλεῖ τοὺς μαθητὰς κατὰ πρῶτον μὲν νὰ ἀνέλθουν ἀπὸ τὸν 7 δύο βαθμίδας καὶ νὰ κάμουν ἔτσι τὴν νέαν πρόσθεσιν $7+2=9$, ἔπειτα δὲ νὰ κάμουν τὴν ἀντίστοιχήν της νέαν ἀφαίρεσιν $9-2=7$. Ἔπειτα προκαλεῖ τοὺς παῖδας νὰ κατέλθουν ἀπὸ τὸν 7 ἄλλην μίαν βαθμίδα, ἤτοι νὰ κάμουν τὴν γνωστὴν ἀφαίρεσιν $7-1=6$, κατόπιν δὲ πρῶτα μὲν νὰ κάμουν τὴν νέαν πρόσθεσιν $6+3=9$ καὶ ἔπειτα τὴν ἀντίστοιχην νέαν ἀφαίρεσιν $9-3=6$ κ. οὕτ. καθ.

Β. Ὡς πρὸς δὲ τὴν διάταξιν τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς τὴν σειρὰν 11—20 (1—20) ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἀκόλουθα.

Ὅ,τι πρῶτον ἔχομεν νὰ ἐξετάσωμεν ὡς πρὸς αὐτήν, εἶναι τὸ ἑξῆς. Εἰς τὴν σειρὰν 1 - 10, καθὼς εἴδαμεν, ἠμποροῦν νὰ ἐφαρμοσθοῦν μὲ ἐπιτυχίαν δύο κύρια εἴδη διατάξεων, ἕνα μέν, εἰς τὸ ὁποῖον προηγεῖται ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν

1—10 καὶ ἐπακολουθεῖ ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, καὶ ἄλλο, εἰς τὸ ὁποῖον οἱ μαθηταὶ δὲν προχωροῦν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῆς ἐννοίας ἑνὸς νέου ἀριθμοῦ, πρὶν σχηματίσουν ἐντελῶς σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τῶν προηγουμένων του. Μολονότι δὲ καὶ αἱ δύο αὐταὶ διατάξεις ἠμποροῦν νὰ ἐφαρμοσθοῦν μὲ ἐπιτυχίαν, ἐν τούτοις ἐθεωρήσαμεν, δι' ὅσους λόγους εἴπαμεν, περισσότερον ἐπιτυχῆ τὴν δεύτερην. Ἀληθεύει ἄράγε τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὴν σειρὰν 11—20 καὶ ἐν γένει διὰ τὴν σειρὰν 11—100, τῆς ὁποίας ἐκείνη ἀποτελεῖ ἕνα μέλος; Εἶναι προτιμότερον καὶ εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν νὰ διατάξωμεν τὴν ὕλην ὡς ἑξῆς: 1. Ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς τὴν σειρὰν 1—11 καὶ σχηματισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ 11. 2. Ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς τὴν σειρὰν 1—12 καὶ σχηματισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ 12 κ. οὕτ. καθ.; Ὁ Grube ἐξακολουθεῖ νὰ ἐξετάζῃ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς αὐτῆς μονογραφικῶς, χωρὶς δηλαδὴ νὰ προχωρῇ εἰς τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς νέου ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς πρὸ τοῦ τελείου σχηματισμοῦ τῶν προηγουμένων του. Οἱ ἀκόλουθοι ἐν τούτοις λόγοι πείθουν χωρὶς κανένα ἐνδοιασμόν, ὅτι δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν διάταξιν αὐτὴν καὶ εἰς τὴν σειρὰν 11—20 καὶ ἐν γένει εἰς τὴν σειρὰν 11—100.

1) Ἂν εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 1—10 δὲν ἀποχωρίζωμεν τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ἀπὸ τὴν ἐπ' αὐτῶν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητ. πράξεων, ἀλλ' ἐκτελοῦμεν τὰς ἐργασίας αὐτὰς μαζί, κάμνομεν τὸν συνδυασμὸν αὐτόν, διότι μόνον μὲ αὐτὸν κατορθώνομεν, ὥστε οἱ μαθηταὶ σχηματίζοντες τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς νὰ ἠμποροῦν νὰ τὸν παριστάνουν μὲ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα γνωρίσματά του. Εἰς τὴν σειρὰν ὅμως 11—100 ὁ συνδυασμὸς αὐτὸς εἶναι περιττός, διότι μὲ μόνην τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς αὐτῆς καὶ χωρὶς τὴν ἐκτέλεσιν ἄλλων ἀριθμ. πράξεων ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ παριστάνουν τὸν καθένα ἀπὸ αὐτοὺς μὲ περισσότερα τοῦ ἑνὸς θεμελιώδη γνωρίσματα. Ὁ δὲ λόγος τοῦ πράγματος εἶναι ὁ ἑξῆς: Ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ 1—10 εἶναι σχετικῶς ἁπλοῖ καὶ αὐτοτελεῖς, οἱ ἀριθμοὶ 11—100 εἶναι σύνθετοι καὶ ἐξηρτημένοι ἀπὸ τοὺς 10 ἁπλοῦς, διότι ἔχουν σχηματισθῆ σύμφωνα μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα καὶ δι' αὐτὸ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὴν δεκάδα ἢ ἐπανάληψίν

της καὶ τοὺς κάτω τοῦ 10 ἀριθμούς. Ὁ δεκαδικὸς αὐτὸς σχηματισμός των ὑποβοηθεῖ τοὺς μαθητάς, ὅπως κατ' αὐτὴν ἀκόμη τὴν εἰσαγωγήν των εἰς τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς παριστάνουν τὸν καθένα των μὲ περισσότερα ἀπὸ ἕνα θεμελιώδη γνωρίσματα. Ἂν ὁ ἀριθμὸς 8, σχηματισθεὶς ἀπὸ τοὺς μαθητὰς μόνον διὰ τῆς προσθέσεως 7+1, δὲν ἔχῃ δι' αὐτοὺς ἄλλο γνώρισμα παρὰ μόνον τὸ 7+1, διὰ νὰ μάθουν δὲ τὰ ἄλλα γνωρίσματά του, πρέπει νὰ κάμουν τὰς μέχρι τοῦ 8 δυνατὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ὁ ἀριθμὸς 28, σχηματισθεὶς ἀπὸ τοὺς μαθητὰς διὰ τῆς προσθέσεως 20+8 σύμφωνα μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, θὰ τοὺς λέγῃ ἀμέσως ἀπὸ τὸν σχηματισμὸν αὐτὸν καὶ χωρὶς τὴν ἐκτέλεσιν καμιᾶς ἄλλης ἀριθμητικῆς πράξεως ὄχι μόνον ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 20+8, ἀλλὰ καὶ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 10+10+8 ἢ ἀπὸ 2×10+8 ἤτοι ἀπὸ συστατικά, τὰ ὁποῖα εἶναι τελείως γνωστὰ εἰς τοὺς παῖδας, διότι εὑρίσκονται εἰς τὴν σειρὰν 1—10. Ἐφόσον λοιπὸν ἡ εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὸν δεκαδικὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν 11—100 τοὺς ὑποβοηθεῖ εἰς τὸ νὰ μανθάνουν διὰ τὸν καθένα των περισσότερα ἀπὸ ἕνα θεμελιώδη γνωρίσματα, τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ ἀρκετά, διὰ νὰ τοὺς παριστάνουν μὲ τὴν ἀναγκαίαν σαφήνειαν καὶ νὰ ἠμποροῦν κατόπιν νὰ ἐκτελοῦν μὲ αὐτοὺς ὅλας τὰς δυνατὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, δὲν εἶναι βέβαια **ἀναγκαῖον** νὰ διακόπτουν μὲν διαρκῶς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν τῆς ὅλης σειρᾶς καὶ νὰ σταματοῦν εἰς τὸν καθένα, διὰ νὰ ἐκτελέσουν ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ γίνουν εἰς τὴν μέχρι αὐτοῦ διήκουσαν ἀριθμητικὴν σειράν, καὶ νὰ γνωρίσουν ἔτσι ὅλα τὰ γνωρίσματά του, μόνον δὲ κατόπιν ἀπὸ ἕνα τέτοιον σχηματισμὸν τοῦ κάθε ἀριθμοῦ νὰ προχωροῦν εἰς τὸν παρόμοιον σχηματισμὸν τῶν ἀκολούθων. Μία τέτοια διάταξις τῆς ὕλης αὐτῆς θὰ ἐσήμαινε τελείαν παραγνώρισιν τῆς φύσεως καὶ τῆς δυνάμεως τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν (πρβλ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 89).

2) Ἀλλ' ἂν δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ σταματοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 11—100, διὰ νὰ εὑρίσκουν ὅλα τὰ γνωρίσματά του, ἤτοι ὅλας τὰς σχέσεις του μὲ τοὺς μικροτέρους του ἀριθμούς, δὲν εἶναι αὐτὸ οὔτε **σκόπιμον** διὰ τὸν ἁπλούστατον λόγον, ὅτι αἱ σχέσεις αὐταὶ εἶναι τόσον πολλαὶ καὶ

γίνονται εἰς κάθε μεγαλύτερον ἀριθμὸν τόσον περισσότεραι, ὥστε τὸ μεγαλύτερόν των μέρος νὰ μὴν ἠμπορῇ νὰ ἐντυπωθῇ εἰς τὴν συνείδησιν τῶν παίδων. Ἂν ζητοῦμεν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς νὰ ἔχουν εἰς τὸν νοῦν των εἰς ὁποιανδήποτε στιγμὴν τὰ γνωρίσματα τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10, τὸ κάμνομεν αὐτό, διότι τὰ γνωρίσματα αὐτὰ εἶναι σχετικῶς ὀλίγα καὶ ἠμποροῦν δι' αὐτὸ νὰ ἐντυπωθοῦν εἰς τὴν ψυχήν των. Ἔτσι π. χ. ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ εἰς κάθε στιγμὴν νὰ ἐνθυμοῦνται, ὅτι ὁ 8 εἶναι 7+1, 6+2, 5+3., 4×2, 2×4 κ.τ.λ. Δὲν ἠμποροῦμεν ὅμως νὰ ζητήσωμεν τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς μεγαλυτέρους ἀπὸ τὸν 10 ἀριθμούς, δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἀξιώσωμεν π. χ. ἀπὸ τοὺς μαθητὰς νὰ ἐνθυμοῦνται εἰς κάθε στιγμὴν ὅλα τὰ γνωρίσματα τῶν ἀριθμῶν 27, 33, 69 κ.τ.λ., διότι εἶναι πάρα πολλὰ καὶ δι' αὐτὸ δὲν ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ συγκρατήσουν παρὰ ἐλάχιστον μόνον μέρος των εἰς τὴν συνείδησίν των. Ἡ ἀπαίτησις λοιπὸν νὰ ἐκτελοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 11—100 ὅλας τὰς σχετικὰς ἀριθμητικὰς πράξεις δὲν συντελεῖ εἰς τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ σκοποῦ, τὸν ὁποῖον ἐπιδιώκει, νὰ μάθουν δηλαδὴ οἱ μαθηταὶ ὅλα τὰ γνωρίσματα τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ὅσον περισσότερον ἀνερχόμεθα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 10, τόσον ὀλιγώτερον ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν εἰς τὴν συνείδησίν μας τελείως σαφεῖς καὶ εὐκρινεῖς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν. Ἔχομεν μόνον ἐπαρκῶς σαφεῖς παραστάσεις των, καὶ μάλιστα διὰ μόνον τὸν λόγον, ὅτι ὑποβοηθούμεθα εἰς αὐτὸ ἀπὸ τὸν δεκαδικὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μάθωμεν ὅλας τὰς ποικιλωτάτας σχέσεις ὁποιουδήποτε ἀπὸ αὐτοὺς μὲ τοὺς προηγουμένους του, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν τὸν τρόπον τῆς εὑρίσεώς των. Ἐπειδὴ δὲ ἀκριβῶς ὁ τρόπος αὐτὸς εἶναι ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, δι' αὐτὸ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν μαθητῶν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 11—20 καὶ 11—100, τοὺς διδάσκομεν ἰδιαιτέρως τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς. Μανθάνοντες οἱ μαθηταὶ νὰ ἐκτελοῦν τὰς ἀριθμητικὰς αὐτὰς πράξεις μανθάνουν μαζὶ καὶ τὸν τρόπον τῆς ἐξευρέσεως τῶν ποικίλων σχέσεων τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς μὲ τοὺς προηγουμένους του, ἤτοι τὸν τρόπον τῆς ἐξευρέσεως τῶν διαφόρων γνωρισμάτων του (πρβ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν. σ. 90).

3) Ἀκριβῶς διότι δὲν εἶναι ἀντικειμενικὰ ἀναγκαία καὶ σκόπιμη ἡ συνεχὴς διακοπὴ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν 11—100 καὶ ἡ παραμονὴ εἰς τὸν καθένα των μὲ τὸν σκοπὸν νὰ προσκτηθοῦν ὅλα τὰ γνωρίσματά του, ***δὲν θὰ θεωρῆται καὶ ἀπὸ τοὺς παῖδας ὡς ἀναγκαία καὶ σκόπιμη***. Ὁ παῖς ἂν μάθῃ νὰ ἀπαριθμῇ ἕως τὸ 5, δὲν θὰ ἠμπορῇ δι' αὐτὸ νὰ ἀπαριθμῇ καὶ ἕως τὸ 7 ἢ τὸ 9. Ἂν μάθῃ ὅμως ἕως τὸ 34, θὰ ἠμπορῇ νὰ ἀπαριθμῇ καὶ ἕως τὸ 44, τὸ 58 κ. τ. λ., ἀρκεῖ μόνον νὰ γνωρίσῃ τὸ ὄνομα τῆς τετάρτης, τῆς πέμπτης κ.τ.λ. δεκάδος. Ἀφοῦ κατανοήσῃ μίαν φορὰν τὸν νόμον τοῦ δεκαδικοῦ σχηματισμοῦ τῶν μεγαλυτέρων ἀπὸ τὸν 10 ἀριθμῶν, αἰσθάνεται τὴν δύναμιν, ἀλλὰ μαζὶ καὶ τὴν ἀνάγκην νὰ προχωρήσῃ εἰς τὸν σχηματισμὸν αὐτόν, ἕως ὅτου φθάσῃ εἰς ἕνα τέρμα, ὁποῖον εἶναι π.χ. ὁ ἀριθμὸς 100, κάθε δὲ διακοπὴν εἰς τὸ ἔργον του αὐτὸ θὰ τὴν θεωρήσῃ ὡς ματαίαν καὶ ἄσκοπον πίεσιν (ἴδ. καὶ Räther ὅπ. ἀν.). Ἂν ἐμεῖς ἐν τούτοις κάμνωμεν ἕνα προσωρινὸν σταθμὸν εἰς τὸν 20, τὸ κάμνομεν δι' ἕνα σπουδαιότατον μεθοδικὸν λόγον, διὰ τὸν ὁποῖον ὡμιλήσαμεν προηγουμένως (ἴδ. ἀν., σ. 401 κ. ἀκ.).

4) Ὁ σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 11—100 διὰ τῆς ἐκτελέσεως ὅλων τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων θὰ ἔχῃ ὡς ἐπακολούθημα ***τὴν διαρκῆ ἐπανάληψιν εὐκολωτάτων ἀσκήσεων***, ἡ ὁποία θὰ προκαλῇ τὴν ἀνίαν τῶν μαθητῶν, ***τὴν διαρκῆ συσσώρευσιν ἀφθονωτάτης ὕλης***, τῆς ὁποίας ἡ ἐπεξεργασία θὰ καταναλίσκῃ χωρὶς λόγον πολύτιμον χρόνον, τέλος δὲ ***τὴν διαρκῆ ἀνάμιξιν εὐκολωτάτων μὲ δυσκολωτάτας ἀσκήσεις***, ἡ ὁποία θὰ ἐμποδίζῃ τὴν συνεχῆ πρόοδον τῶν παίδων (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν.).

Ἀπὸ ὅλα τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι ἡ διάταξις τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς τὴν σειρὰν 1 (11)—20 πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικωτάτας γραμμάς της ὡς ἑξῆς:

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 11—20.
2. Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις καὶ ἡ ἀνάλυσις εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 1—20.
3. Γενικὴ ἐπανάληψις τῆς διδαχθείσης ὕλης.

Ὅσον ἀφορᾷ τώρα εἰδικώτερα ***τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 11—20***, ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς:

Μὲ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 11—20 νοοῦνται φυσικὰ τρία πράγματα: α) ὁ σχηματισμὸς τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 11—20, β) ἡ ἄσκησις εἰς τὴν σειράν των, εἰς τὴν διαδοχήν των καὶ γ) ἡ ἄσκησις εἰς τὴν γραφήν των.

Ὁ σχηματισμὸς τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 11, 12 κ.τ.λ., ἐφόσον εἶναι ἀπαραίτητον νὰ κατανοήσουν οἱ μαθηταὶ τὴν κατασκευὴν τῶν ἀνωτέρων ἀπὸ τὸν 10 ἀριθμῶν μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, πρέπει νὰ εἶναι **ὁ δεκαδικός**, νὰ γίνῃ δηλ. μὲ τὴν εἰς τὴν δεκάδα πρόσθεσιν τοῦ 1, τοῦ 2, τοῦ 3 καὶ οὕτ. καθ. (10+1=11, 10+2=12, 10+3=13 κ. τ. λ.) καὶ ὄχι μὲ τὴν εἰς κάθε προηγούμενον ἀριθμὸν πρόσθεσιν τοῦ 1 (10+1=11, 11+1=12, 12+1=13 κ.τ.λ.), μὲ τὴν ὁποίαν ἔγινε ὁ πρῶτος σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν 2—10.

Ἀφοῦ σχηματισθοῦν ἔτσι οἱ ἀριθμοὶ 11—20, θὰ ἐπακολουθήσῃ ἡ ἄσκησις εἰς τὴν σειράν των, μὲ τὴν ὁποίαν οἱ μαθηταὶ θὰ κατανοοῦν, ὅτι καὶ εἰς τοὺς νέους ἀριθμοὺς δὲν παύει νὰ ἰσχύῃ ὁ γενικὸς νόμος, ὁ ὁποῖος διέπει ὁλόκληρον τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν καὶ σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον ὁ κάθε ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του +1. Διὰ νὰ γίνῃ δὲ ἡ ἄσκησις αὐτὴ μὲ ἐπιτυχίαν, πρέπει νὰ προηγηθῇ μὲν φυσικὰ ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος εἰς τὴν σειρὰν 1—20, νὰ ἐπακολουθήσῃ δὲ ἀμέσως κατόπιν ἀπ᾿ αὐτὰς ἡ ἀνιοῦσα καὶ ἡ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις εἰς τὴν ἴδιαν σειράν. Εἰς τὰς ἐργασίας αὐτὰς ἠμποροῦν νὰ ἐπακολουθοῦν μερικαὶ ἀσκήσεις προσθέσεως, ἀφαιρέσεως καὶ ἀναλύσεως, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀμέσως ἀπὸ τὸν μὲ τὸν ἀνωτέρω τρόπον γενόμενον σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν. Τέλος θὰ γίνῃ ἡ διδασκαλία τῆς γραφῆς τῶν νέων ἀριθμῶν, ἡ ὁποία θὰ διευκολυνθῇ πολύ, ἂν προταχθοῦν ἡ διδασκαλία τῶν ἐννοιῶν τῆς μονάδος καὶ τῆς δεκάδος, καθὼς καὶ ἀσκήσεις συνθέσεως τῶν νέων ἀριθμῶν ἀπὸ τὴν δεκάδα καὶ ὡρισμένας μονάδας καὶ ἀναλύσεώς των εἰς τὴν δεκάδα καὶ τὰς μονάδας αὐτάς. [1]

[1] Ἀρκετοὶ Μεθοδικοὶ διδάσκουν τὰς ἐννοίας τῆς μονάδος καὶ τῆς δεκάδος καὶ τὰς συναφεῖς ἀσκήσεις κατὰ πρῶτον εἰς τὴν σειρὰν 1—100, εἰς δὲ τὴν σειρὰν 1 (11)—20 τονίζουν μόνον, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 11—20 γίνονται

Σύμφωνα μὲ αὐτὰ ἡ διάταξις τῆς ὕλης εἰς τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 11(1)—20 πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰ ἐπὶ μέρους ὡς ἑξῆς:

α) Δεκαδικὸς σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν 11—20.

β) Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τοῦ 1 εἰς τὴν σειρὰν 1—20.

γ) Ἀνιοῦσα καὶ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις εἰς τὴν ἴδιαν σειράν. Ποικίλαι ἀσκήσεις ἀπαριθμήσεως.

δ) Προσθέσεις, ἀφαιρέσεις καὶ ἀναλύσεις προκύπτουσαι ἀμέσως ἀπὸ τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν, ὁποῖαι π.χ. εἶναι αἱ ἑξῆς:

10+3=	10+1=	11—1=	11=10+
10+5=	1+10=	13—3=	13=10+
10+7=	10+5=	15—5=	15=10+ κ.τ.λ.
	5+10=	17—7=	

ε) Ἀσκήσεις προπαρασκευαστικαὶ τῆς γραφῆς:

Κάθε σφαῖρα (τοῦ ἀριθμητηρίου) εἶναι μία μονάς.

10 σφαῖραι κάμνουν μίαν δεκάδα.

1 λοιπὸν δεκὰς εἶναι 10 σφαῖραι.

1 δεκ. + 1 μον. = 11 μον.
1 » + 2 μον. = 12 »
1 » + 3 μον. = 13 »
κ. τ. λ.

11 μον. = 1 δεκ. + 1 μον.
12 μον. = 1 δεκ. + 2 μον.
13 μον. = 1 δεκ. + 3 μον.
κ. τ. λ.

ς) Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν 11—20.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς τὴν σειρὰν 1—20 ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν πρῶτα ὡς πρὸς τὴν ***πρόσθεσιν*** καὶ ***τὴν ἀφαίρεσιν*** τὰ ἑξῆς. Ἀπὸ τὰς νέας προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἄλλαι μὲν γίνονται χωρὶς ὑπερπή-

ἀπὸ τὸν 10 καὶ τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς 1—10 καὶ ὅτι, διὰ νὰ γράψωμεν τοὺς νέους ἀριθμούς, γράφομεν πρῶτα (ἀριστερά) τὸ 1, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὸν 10, δεξιά του δὲ, ἀντὶ τοῦ μηδενικοῦ τὸν γνωστὸν ἀριθμὸν 1, 2, 3 κ.τ.λ., ὁ ὁποῖος προσθετόμενος εἰς τὸν 10 κάμνει τὸν νέον ἀριθμόν.

δησιν, ἄλλαι δὲ μὲ ὑπερπήδησιν τοῦ 10. Τὸ νέον, τὸ ὁποῖον παρουσιάζουν αἱ πρῶται ἀπὸ αὐτάς, εἶναι ὅτι ὁ πρῶτος προσθετέος εἰς τὰς προσθέσεις καὶ ὁ μειωτέος εἰς τὰς ἀφαιρέσεις εἶναι διψήφιος ἀριθμός, ἀποτελεῖται ἀπὸ δεκάδας καὶ μονάδας. Τὸ νέον ὅμως αὐτὸ δὲν δημιουργεῖ καμίαν σπουδαίαν δυσκολίαν διὰ τοὺς μαθητάς, διότι αἱ πράξεις ἐξακολουθοῦν νὰ γίνωνται καὶ τώρα, ὅπως ἐγίνοντο καὶ μὲ τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς. Δι' αὐτὸ δὲ ἀκριβῶς καὶ αἱ πράξεις αὐταὶ δὲν τοὺς κάμνουν σχεδὸν τὴν ἐντύπωσιν τοῦ νέου. Σπουδαίας ἀπεναντίας δυσκολίας παρουσιάζουν εἰς τοὺς μαθητὰς αἱ προσθέσεις καὶ αἱ ἀφαιρέσεις αἱ γινόμεναι μὲ ὑπερπήδησιν τοῦ 10, αἱ ὁποῖαι δι' αὐτὸ καὶ τοὺς κάμνουν τὴν ἐντύπωσιν ἐντελῶς νέου πράγματος. Διὰ νὰ συντελέσῃ τώρα καὶ ἡ διάταξις εἰς τὴν εὐκολωτέραν κατανόησιν καὶ ὅλων μὲν τῶν νέων προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων, ἰδιαιτέρως ὅμως τῶν γινομένων μὲ ὑπερπήδησιν τοῦ 10, σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ἡ ὅλη ὕλη τῶν δύο αὐτῶν πράξεων εἰς 2 τμήματα, ἕνα, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ διδαχθοῦν αἱ προσθέσεις καὶ αἱ ἀφαιρέσεις οἱ γινόμεναι χωρὶς ὑπερπήδησιν τοῦ 10, καὶ δεύτερον, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ διδαχθοῦν αἱ προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις αἱ γινόμεναι μὲ ὑπερπήδησιν τοῦ 10, αἱ ὁποῖαι ὡς ἐντελῶς νέαι καὶ δυσχερεῖς διὰ τοὺς μαθητὰς θὰ παρουσιάζωνται ἔτσι ἐντελῶς ἰδιαιτέρως εἰς αὐτούς. Εἰς τὸ πρῶτον τώρα τμῆμα λόγῳ τῆς σχετικῆς εὐκολίας τῶν προσθέσεων καὶ τῶν ἀφαιρέσεων δὲν θὰ εἶναι βέβαια ἀνάγκη μετὰ κάθε πρόσθεσιν δύο ἀριθμῶν νὰ ἐπακολουθῇ ἡ ἀντίστοιχή της ἀφαίρεσις, ὅπως ἐγίνετο εἰς τὴν σειρὰν 1—10, εἰς τὴν ὁποίαν π.χ. τὴν πρόσθεσιν 4+2=6 ἀκολουθοῦσε ἀμέσως ἡ ἀφαίρεσις 6—2=4 κ.τ.λ. Πάντως ὅμως, ἐφόσον διὰ τοὺς μικροὺς μαθητὰς ἡ ἀφαίρεσις συμπληρώνει τὸ ἔργον τῆς προσθέσεως, δὲν θὰ πρέπῃ νὰ γίνῃ καὶ τέλειος ἀποχωρισμὸς τῶν δύο αὐτῶν πράξεων, δὲν θὰ πρέπῃ δηλαδὴ αἱ ἀσκήσεις τῆς ἀφαιρέσεως νὰ παρουσιασθοῦν μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν ὅλων τῶν ἀσκήσεων τῆς προσθέσεως. Τὸ ὀρθὸν ἀπεναντίας θὰ εἶναι, ὅπως μετὰ κάθε σειρὰν ἀσκήσεων προσθέσεως ἐπακολουθῇ ἡ σειρὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀσκήσεων τῆς ἀφαιρέσεως. Εἰς τὸ δεύτερον τώρα τμῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον περιλαμβάνονται αἱ δυσκολώταται διὰ τοὺς μαθητὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις μὲ ὑπερπήδησιν τοῦ 10, δὲν θὰ ἀρκῇ προφανῶς τὸ

μέτρον αὐτό. Εἰς τὸ τμῆμα αὐτὸ εἶναι προφανῶς ἀναγκαῖον, ὅπως εἰς κάθε πρόσθεσιν μιᾶς σειρᾶς ἐπακολουθῇ ἡ ἀντίστοιχη ἀφαίρεσις τῆς ἀντιστοίχου σειρᾶς. Μόνον ἔτσι θὰ ἠμπορῇ πραγματικὰ ἡ ἀφαίρεσις νὰ συμπληρώνῃ, νὰ διασαφῇ καὶ νὰ ἐξελέγχῃ τὸ ἔργον τῆς προσθέσεως.

Ἀπὸ ὅλα τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι ἡ ὕλη τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὴν σειρὰν 1—20 σκόπιμον εἶναι νὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

1. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις χωρὶς τὴν ὑπερπήδησιν τοῦ 10.

Α. Ἡ πρόσθεσις τοῦ 1 (10+1, 11+1, 12+1 κ.τ.λ.) καὶ μετ' αὐτὴν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 1 (20—1, 19—1, 18—1 κ.τ.λ.)—ἢ κυρίως εἰπεῖν ἐπαναλήψεις των, διότι ἔγιναν καὶ εἰς τὴν εἰσαγωγήν.

Β. Ἡ πρόσθεσις τοῦ 2 (10+2, 11+2, 12+2 κ.τ.λ.) καὶ μετ' αὐτὴν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 2 (20—2, 19—2, 17—2 κ.τ.λ.).

Γ. Ἡ πρόσθεσις τοῦ 3 (10+3, 11+3, 12+3 κ.τ.λ.) καὶ μετ' αὐτὴν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 3 (20—3, 19—3, 18—3 κ. τ. λ.) καὶ οὕτω καθ.

Δ. Ὁ σχηματισμὸς σειρῶν προσθέσεως ἕως τὸ 20 (π. χ. α) 2+2=4, 4+2=6 . . 10+2=12, 12+2=14 . . . 18+2=20, β) 1+3=4, 4+3=7 . . 10+3=13 . . . 16+3=19, γ) 2+4=6, 6+4=10, 10+4=14, 14+4=18, δ) 5+5=10, 10+5=15, 15+5=20 κ. οὕτ. καθ.) καὶ σειρῶν ἀφαιρέσεως ἕως τὸ 0 (π.χ. α) 20—2=18 . . . 12—2=10, 10—2=8 κ.τ.λ., β) 19—3=16 . . 13—3=10, 10—3=7 κ. τ. λ., γ) 18—4=14, 14—4=10, 10—4=6 κ.τ.λ., δ) 20—5=15, 15—5=10, 10—5=5 κ.τ.λ.).

2. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις μὲ ὑπερπήδησιν τοῦ 10.

Α. Ὁ σχηματισμὸς τοῦ 11 ἀπὸ τὰς προσθέσεις 9+2, 8+3, 7+4 . . . 1+10 καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸν 11 τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 . . . 10 οὕτως, ὥστε μετὰ κάθε πρόσθεσιν νὰ ἐπακολουθῇ ἀμέσως ἡ ἀντίστοιχη ἀφαίρεσις (π.χ. μετὰ τὴν πρόσθεσιν 9+2=11 ἡ ἀφαίρεσις 11—2=9, μετὰ τὴν 8+3=11 ἡ 11—3=8 καὶ οὕτ. καθ.).

Β. Ὁ σχηματισμὸς τοῦ 12 ἀπὸ τὰς προσθέσεις 9+3, 8+4, 7+5 κ.τ.λ. καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸν 12 τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5 κ.τ.λ. μὲ τὸν ἴδιον τρόπον.

Γ. Ὁ σχηματισμὸς τοῦ 13 ἀπὸ τὰς προσθέσεις 9+4, 8+5, 7+6 κ.τ.λ. καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸν 13 τῶν ἀριθμῶν 4, 5, 6 κ.τ.λ. καὶ οὕτω καθεξῆς.

Δ. Ὁ σχηματισμὸς σχετικῶν σειρῶν προσθέσεως (π. χ. α) 1+2=3, 3+2=5 . . 9+2=11 . . . 17+2=19, β) 3+3=6, 6+3=9, 9+3=12 . . . 15+3=18 κ.τ.λ) καὶ ἀφαιρέσεως (π.χ. α) 19—2=17, 17—2=15 . . . 11—2=9 κ.τ.λ. β) 20—3=17, 17—3=14 . . 11—3=8 κ. τ. λ., γ) 19—4=15, 15—4=11, 11—4=7 κ.τ.λ.).

Πολλοὶ τώρα Μεθοδικοὶ διατάσσουν μὲν τὴν προκειμένην ὕλην εἰς δύο τμήματα, τὸ τμῆμα τῶν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων χωρὶς τὴν ὑπερπήδησιν τοῦ 10 καὶ τὸ τμῆμα τῶν ἰδίων πράξεων μὲ τὴν ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος, εἰς τὸ καθὲν ὅμως ἀπὸ τὰ τμήματα αὐτὰ ἐπιτάσσουν τὰς ἀφαιρέσεις εἰς τὰς προσθέσεις.

Τοιουτοτρόπως π. χ. ὁ Räther (ὅπ, ἀν., σ. 80 κ. ἀκ.) ἔχει τὴν ἑξῆς διάταξιν :

1. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις χωρὶς τὴν ὑπερπήδησιν τοῦ 10.

Α. Ἡ πρόσθεσις.

α) Ἡ πρόσθεσις τοῦ 1, β) ἡ πρόσθεσις τοῦ 2, γ) ἡ πρόσθεσις τοῦ 3 κ. οὕτ. καθ., δ) ὁ σχηματισμὸς σειρῶν προσθέσεως ἕως τὸ 20.

Β. Ἡ ἀφαίρεσις.

α) Ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 1, β) ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 2, γ) ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 3 κ. οὕτ. καθ., δ) ὁ σχηματισμὸς σειρῶν ἀφαιρέσεως ἕως τὸ 0.

2. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις μὲ ὑπερπήδησιν τοῦ 10.

Α. Ἡ πρόσθεσις.

α) ἡ πρόσθεσις εἰς τὸν 9 (9+2, 9+3 . . . 9+10),

β) ἡ πρόσθεσις εἰς τὸν 8 (8+3, 8+4 . . 8+10),

γ) ἡ πρόσθεσις εἰς τὸν 7 (7+4, 7+5 . . . 7+10) κ.οὕτ.καθ.

δ) ὁ σχηματισμὸς σχετικῶν σειρῶν προσθέσεως.

Β. Ἡ ἀφαίρεσις.

α) ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸν 11 (11—2, 11—3, . . . 11—10),

β) ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸν 12 (12—3, 12—4, . . . 12—10),

γ) ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸν 13 (13—4, 13—5, . . . 13—10) καὶ οὕτ. καθ.

δ) ὁ σχηματισμὸς σχετικῶν σειρῶν ἀφαιρέσεως.

Ἀνάλογον διάταξιν τῆς προκειμένης ὕλης παρουσιάζει καὶ ὁ Büttner (ὅπ. ἀνωτ., σελ. 91 κ. ἀκ.) καὶ πολλοὶ ἄλλοι Μεθοδικοί.

Εἶναι προφανές, ὅτι ἡ διάταξις αὐτή, ἂν δὲν παρουσιάζῃ τέλειον ἀποχωρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν, ὅμως συνδέει τὰς δύο αὐτὰς πράξεις ἔτσι, ὥστε ἡ σύνδεσις νὰ μὴν ἀπέχῃ καὶ πολὺ ἀπὸ τὸν ἀποχωρισμόν. Ἐφόσον καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας συνδέει τὰς προσθέσεις καὶ τὰς ἀφαιρέσεις, τάσσει τὰς ἀφαιρέσεις μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν ὅλων τῶν προσθέσεων, δὲν κατορθώνει, ὥστε αἱ ἀφαιρέσεις νὰ ἠμποροῦν νὰ συμπληρώνουν, νὰ διασαφοῦν καὶ νὰ ἐξελέγχουν εἰς μεγαλύτερον ἢ εἰς μικρότερον βαθμὸν τὸ ἔργον τῶν προσθέσεων. Διὰ τὸν λόγον δὲ ἀκριβῶς αὐτὸν νομίζομεν, ὅτι εἶναι πολὺ προτιμότερη ἡ προηγούμενη διάταξις, ἡ ὁποία δὲν παρουσιάζει τὸ μειονέκτημα αὐτό.

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τώρα τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ***ἐπαναλαμβάνωνται*** ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ὁ μερισμὸς εἰς τὴν σειρὰν 1—10.

Ἡ ὕλη ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*** εἰς τὴν σειρὰν 1—20 καλὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ μὲ τὸν ἀκόλουθον τρόπον (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 83 κ. ἀκ.) :

α) Πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀριθμῶν 1—10 μὲ τὸν ἴδιον πολλαπλασιαστήν, καὶ ὡρισμένως πρῶτα μὲ τὸν 2, ἔπειτα μὲ τὸν 3 κ. οὕτ. καθ. (π. χ. α) 1×2 . . . 6×2, 7×2, 8×2, 9×2, 10×2, β) 1×3, 2×3, . . . 4×3, 5×3, 6×3 καὶ οὕτω καθ.).

β) Πολλαπλασιασμὸς τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 μὲ διαφόρους πολλαπλασιαστάς, καὶ ὡρισμένως πρῶτα μὲ τὸν 2, ἔπειτα μὲ τὸν 3 καὶ οὕτ. καθεξ. (π. χ. α) 2×1, 2×2, 2×3. . . 2×10—3×1, 3×2, 3×4 . . . 3×6 κ.τ.λ.).

γ) Ἐναλλαγὴ τῶν παραγόντων (π.χ. 2×4=8, 4×2=8).

δ) Ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς 2 παράγοντας (π.χ. 8=2× ; 8= ; ×2), γινομένη, διὰ νὰ προπαρασκευάσῃ τὴν διαίρεσιν.

Ἡ δὲ ὕλη ***τῆς διαιρέσεως***, ἡ ὁποία πλέον θὰ παρουσιάζεται καὶ μὲ τὴν μορφὴν ***τῆς μετρήσεως*** καὶ μὲ τὴν μορφὴν ***τοῦ μερισμοῦ***, σκόπιμον εἶναι νὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

1. Ἡ μέτρησις.

α. Ἡ μέτρησις μὲ τὸν διαιρέτην 1 (τὸ 1 εἰς τὸ 2, εἰς τὸ 3, εἰς τὸ 4 κ.τ.λ.).

β. Ἡ μέτρησις μὲ τὸν διαιρέτην 2 (τὸ 2 εἰς τὸ 2, εἰς τὸ 4, εἰς τὸ 6, . . . εἰς τὸ 20).

γ. Ἡ μέτρησις μὲ τὸν διαιρέτην 3 κ. οὕτ. καθ.

2. Ὁ μερισμός.

α. Ὁ μερισμὸς μὲ τὸν διαιρέτην 2 (12 : 2, κ.τ.λ.).

β. Ὁ μερισμὸς μὲ τὸν διαιρέτην 3 κ. οὕτ. καθ.

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνωνται ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἰς τὴν σειρὰν 1—20.

Ὡς πρὸς ***τὴν ἀνάλυσιν*** τώρα πρέπει νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι ἡ εἰς παράγοντας ἔχει περιληφθῇ εἰς τὴν διάταξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὑπολείπεται ἀκόμη ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀνωτέρων ἀπὸ τὸν 10 ἀριθμῶν εἰς ὅλους τοὺς δυνατοὺς προσθετέους, τῆς ὁποίας ἡ ὕλη ἠμπορεῖ νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

α. Ἀνάλυσις τοῦ 11 εἰς τοὺς δυνατοὺς προσθετέους.

β. Ὁμοία ἀνάλυσις τοῦ 12, 13, 14 κ.τ.λ.

γ. Ἀνάμικται ἀσκήσεις ἀναλύσεως.

Περιττὸν τέλος εἶναι νὰ σημειωθῇ, ὅτι σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπακολουθήσῃ μακρὰ καὶ συστηματικὴ ***ἐπανάληψις*** ὅλης τῆς κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ διδαχθείσης ἀριθμητικῆς ὕλης.

β) Ἡ διάταξις τῆς ὕλης τοῦ δευτέρου σχολικοῦ ἔτους.

Ὕλη τοῦ ἔτους αὐτοῦ, καθὼς ἐνθυμούμεθα, εἶναι : 1) ὁ σχηματισμὸς σαφῶν καὶ εὐκρινῶν ἐννοιῶν τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς 21—100 καὶ 2) ἡ ἀρίθμησις ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς σειρᾶς αὐτῆς.

Ἡ διάταξις τῆς ὕλης αὐτῆς πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικωτάτας της γραμμὰς ἀκριβῶς, ὅπως ἔχει ἡ διάταξις τῆς ὕλης τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς 11—20, φυσικὰ δὲ διὰ τοὺς ἴδιους λόγους (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 451 καὶ ἀκ.). Θὰ ἔχῃ ἐπομένως ὡς ἑξῆς : 1) Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν 21—100, ἤτοι σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν 21—100 καὶ 2) Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις καὶ ἡ ἀνάλυσις εἰς τὴν σειρὰν 1(21)—100.

Πρέπει ἐν τούτοις νὰ σημειωθῇ, ὅτι μερικοὶ Μεθοδικοὶ φρονοῦν, ὅτι δὲν πρέπει νὰ δοθοῦν διὰ μιᾶς 80 νέοι ἀριθμοὶ εἰς τοὺς μαθητάς, διότι δὲν θὰ ἠμποροῦν νὰ συγκρατηθοῦν ἀπὸ αὐτούς, ὅπως ἐπίσης δὲν πρέπει νὰ ἀσκηθοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν ἀρίθμησιν μὲ τόσον πολλοὺς ἀριθμοὺς συγχρόνως, διότι τὸ πρᾶγμα θὰ τοὺς εἶναι ὑπερβολικὰ δύσκολον. Διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς ὁ Kaselitz διατάσσει τὴν σειρὰν 21—100 εἰς 8 μερικὰς σειρὰς (1—30, 1—40 . . . 1—100), διδάσκει δὲ τὰς σειρὰς αὐτὰς τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην χωριστά, ἀσκῶν καὶ εἰς καθεμίαν χωριστὰ τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν 4 ἀριθμητικῶν πράξεων. Ὁ δὲ Steuer διατάσσει τὴν ἴδιαν σειρὰν εἰς 2 μερικὰς σειράς, τὴν 1—50 καὶ τὴν 1—100, διδάσκει δὲ καὶ εἰς τὴν καθεμίαν χωριστὰ τὰς 4 ἀριθμητικὰς πράξεις. Εἶναι ὅμως προφανές, ὅτι, δι᾽ ὅσους λόγους δὲν ἔγινε δεκτὴ ἡ γνώμη τοῦ Grube, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν πρέπει ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 11—100 νὰ διδάσκεται μονογραφικῶς (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 452 κ. ἀκ.), διὰ τοὺς ἴδιους λόγους δὲν πρέπει νὰ γίνουν δεκταὶ καὶ αἱ διατάξεις τῶν Kaselitz καὶ Steuer. Ἂν ἐμεῖς εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς σειρᾶς 11—100 ἐθεωρήσαμεν καλὸν νὰ κάμωμεν ἕνα σταθμὸν εἰς τὸν ἀριθμὸν 20, τὸ ἐκάμαμεν, ὅπως εἴδαμεν (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 401 κ. ἀκ.), διὰ σπουδαιότατον μεθοδικὸν λόγον. Κανεὶς ὅμως τέτοιος λόγος δὲν συντρέχει, διὰ νὰ κάμωμεν σταθμοὺς καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 30, 40 κ.τ.λ. ἢ εἰς τὸν ἀριθμὸν 50. Οἱ δὲ φερόμενοι ἀπὸ τοὺς Μεθοδικοὺς αὐτοὺς λόγοι δὲν εἶναι ἰσχυροί, διότι οὔτε οἱ προσφερόμενοι εἰς τοὺς μαθητὰς 80 νέοι ἀριθμοὶ εἶναι πολλοί, ἀφοῦ ὅλοι σχηματίζονται σύμφωνα μὲ τὸν ἴδιον νόμον, οὔτε τὸ ποσὸν τῶν νέων ἀριθμῶν ἐπαυξάνει τὰς δυσκολίας τῆς ἀριθμήσεώς των, ἡ ὁποία γίνεται εἰς ὅλους μὲ τὸν ἴδιον τρόπον (πρβλ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 89 κ. ἀκ.).

Ἡ ***εἰσαγωγὴ*** τώρα τῶν μαθητῶν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 21—100 ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ μὲ δύο τρόπους.

Σύμφωνα μὲ τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς τρόπους αὐτούς, τὸν ὁποῖον ἐφαρμόζουν οἱ Böhme, Büttner, Hentschel, Hartmann, Rein κ.τ.λ., Wilk καὶ ἄλλοι, διδάσκονται κατ᾽ ἀρχὰς οἱ μαθηταὶ μόνον τοὺς ἀριθμοὺς τῶν καθαρῶν δεκάδων (10, 20, 30, 40 . . . 100), μετὰ δὲ τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς διδασκαλίας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν εἰσάγονται καὶ εἰς τοὺς μεταξύ των κειμένους ἀριθμούς, ἤτοι τοὺς ἀποτελουμένους ἀπὸ δεκάδας καὶ μονάδας. Ὁ τρόπος αὐτὸς ἔχει εἰς τὰς λεπτομερείας του ὡς ἑξῆς περίπου:

1. Ἐπανάληψις τῆς ἐννοίας τῆς μονάδος καὶ τῆς δεκάδος. Αἰσθητοποίησις τῶν ἀριθμῶν 20, 30, 40 . . . 100 διὰ τῶν δεκάδων (π.χ. εἰς τὸ Ῥωσσικὸν ἀριθμητήριον: αἱ 2 δεκάδες εἶναι 20 σφαῖραι (μονάδες), αἱ 3 δεκάδες εἶναι 30 κ.τ.λ.).

2. Ἄσκησις εἰς τὴν σειρὰν 10, 20, 30 . . . 100 διὰ τῶν 4 ἀριθμητικῶν πράξεων:

α) 10+10=20, 20+10=30, 30+10=40... 90+10=100.

β) 100—10=90, 90—10=80, 80—10=70 . . . 10—10=0.

γ) ἀνιοῦσα καὶ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις εἰς τὴν σειράν.

δ) 10×1=10, 10×2=20, 10×3=30 . . . 10×10=100.

ε) τὸ 10 εἰς τὸ 20=2, τὸ 10 εἰς τὸ 30=3 . . . τὸ 10 εἰς τὸ 100=10 κ.τ.λ.

3. Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν τῶν καθαρῶν δεκάδων.

4. Σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς 21—100, τῶν ἀποτελουμένων ἀπὸ δεκάδας καὶ μονάδας:

α) σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς 21—30 (1) δεκαδικὸς σχηματισμὸς τοῦ καθενός, π. χ. 20+1=21, 20+2=22, 20+3=23... 20+10=30, 2) ἄσκησις εἰς τὴν σειράν, 3) γραφὴ τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς).

β) ὅμοιος σχηματισμὸς τῶν ὑπολοίπων σειρῶν 31—40, 41—50... 91—100.

Μὲ τὸν δεύτερον τώρα τρόπον, ὁ ὁποῖος ἐφαρμόζεται ἀπὸ τοὺς Grube, Kaselitz καὶ Steuer, προσέτι δὲ ἀπὸ τοὺς Menzel, Tanck, Räther κ. ἄλλ., ἡ γνωστὴ ἀριθμητικὴ σειρὰ 1—20 ἐπεκτείνεται ἕως τὸν 100 κατὰ μονάδας, ἀλλὰ ἔτσι, ὥστε α) ἡ ἐπέκτασις αὐτὴ νὰ προχωρῇ τμηματικὰ ἀπὸ τὴν μίαν δεκάδα εἰς τὴν ἄλλην, διὰ νὰ ἐξαίρωνται ἔτσι αἱ δεκάδες καὶ νὰ φαίνωνται καθαρά, ὅτι ἀποτελοῦν σταθμοὺς εἰς τὴν σειράν, καὶ β) μετὰ τὸν τερματισμὸν τῆς ἐπεκτάσεως νὰ γίνεται ἀνασκόπησις τῆς σειρᾶς μὲ νέαν ἔξαρσιν τῶν ἀριθμῶν τῶν καθαρῶν δεκάδων.

Ὁ Räther (ὅπ. ἀν. σελ. 100) παριστάνει εἰκονικὰ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς τρόπους ὡς ἑξῆς. Ὁ ἐργαζόμενος μὲ τὸν πρῶτον ὁμοιάζει μὲ τὸν ἄνθρωπον ἐκεῖνον, ποὺ κατασκευάζει

ἕνα φράκτην καὶ κατ' ἀρχὰς μὲν στερεώνει εἰς τὸ ἔδαφος τὰ ὄρθια ξύλα τοῦ φράκτου, τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ τὰ θεμελιώδη του στηρίγματα, ἔπειτα δὲ γεμίζει τοὺς μεταξύ των χώρους μὲ ἐγκάρσια ξύλα. Ὁ ἐργαζόμενος μὲ τὸν δεύτερον ὁμοιάζει μὲ τὸν ὁδοιπόρον, ὁ ὁποῖος προχωρεῖ εἰς τὸν δρόμον του, ἀπὸ καιροῦ δὲ εἰς καιρὸν κάμνει καταλλήλους σταθμοὺς καὶ ἀνασκοπεῖ τὴν ὁδόν, τὴν ὁποίαν ἐπέρασε.

Ὁ πρῶτος τρόπος, ἐπειδὴ τάσσει εἰς τὴν ἀρχὴν τὴν ἐπισκόπησιν τῆς ὅλης σειρᾶς, εἶναι περισσότερον συστηματικός, ἐνῷ ὁ δεύτερος, ἐπειδὴ δημιουργεῖ τρόπον τινὰ ἐμπρὸς εἰς τὰ ὄμματα τῶν μαθητῶν τὴν σειρὰν καὶ ἐπιτρέπει τὴν ἐπισκόπησίν της καὶ εἰς τὸν χρόνον τῆς κατασκευῆς της καὶ κατόπιν, εἶναι περισσότερον ἐμπειρικός. Διὰ τοὺς ἴδιους δὲ λόγους ὁ δεύτερος τρόπος εἶναι περισσότερον ἀπὸ τὸν πρῶτον ἀνάλογος μὲ τὰς πνευματικὰς δυνάμεις τῶν παίδων, οἱ ὁποῖοι, ἀφοῦ ἐπροχώρησαν ἕως τὸ 20 κατὰ μονάδας, θὰ περιμένουν νὰ προχωρήσουν μὲ τὸν ἴδιον τρόπον καὶ παρακάτω. Ἐξ ἄλλου, ἐνῷ μὲ τὸν πρῶτον τρόπον τὰ κύρια χαρακτηριστικὰ τοῦ συστήματος δίδονται κατ' ἀνάγκην ἕτοιμα εἰς τοὺς μαθητάς, μὲ τὸν δεύτερον θὰ ἠμποροῦν νὰ εὑρίσκωνται ἀπὸ τοὺς ἴδιους τοὺς μαθητὰς τόσον ὅταν θὰ κατασκευάζεται ἡ σειρά, ὅσον ἰδίως, ὅταν μετὰ τὴν κατασκευήν της θὰ ἐπακολουθῇ ἡ γενικὴ ἐπισκόπησίς της (πρβλ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν.) Δι' ὅλους αὐτοὺς τοὺς λόγους εἶναι προτιμότερον νὰ εἰσαχθοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν σειρὰν 21—100 μὲ τὸν δεύτερον τρόπον, ὁ ὁποῖος θὰ ἔχῃ εἰς τὰς λεπτομερείας του ὡς ἑξῆς (πρβλ. Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 101):

1. Ἐπανάληψις τῶν ἀριθμῶν 1—20.

2. Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 21—30:

Α. Δεκαδικὸς σχηματισμός των:

α. 20+1=21	β. 21=20+
20+2=22	22=20+
20+3=23	23=20+
κ.τ.λ.	κ.τ.λ.

Β. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τοῦ 1 εἰς τὴν σειρὰν 21—30.

Γ. Ἀνιοῦσα καὶ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις εἰς τὴν σειράν.

Δ. Ἀσκήσεις προπαρασκευαστικαὶ τῆς γραφῆς:

α. 2 δεκ.+1 μον.=21 μον.	β. 21 μον.=2 δεκ.+1 μον.
2 δεκ.+2 μον.=22 μον.	22 μον.=2 δεκ.+2 μον.
2 δεκ.+3 μον.=23 μον.	23 μον.=2 δεκ.+3 μον.
κ.τ.λ.	κ.τ.λ.

Ε. Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν 21—30.

3. Ὁμοία εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 31—40, 41—50... 91—100.

4. Ἄνοδος καὶ κάθοδος εἰς τὴν σειρὰν 1—100 κατὰ μονάδας (α. 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4 ... 99+1=100, β. 100—1=99, 99—1=98, 98—1=97 . . . 1—1=0).

5. Ἄνοδος καὶ κάθοδος εἰς τὴν σειρὰν 1—100 κατὰ δεκάδας (α. 10+10=20, 20+10=30 . . . 90+10=100, β. 100—10=90, 90—10=80 . . . 10—10=0, γ. (ἀπὸ ὁποιανδήποτε δεκάδα τῆς σειρᾶς) 40+10=50 κ. ἀκ., 70—10=60 κτλ.).

6. Ἄλλαι (προφορικαὶ καὶ γραπταὶ) ἀσκήσεις πρὸς στερέωσιν τῆς σειρᾶς:

α. Ἀνάλυσις ἀριθμῶν διαφορετικῶν, ἀλλὰ γραφομένων μὲ τὰ ἴδια ψηφία (π.χ. τῶν 16 καὶ 61, 42 καὶ 24 κ.τ.λ.).

β. Ποῖος ἀριθμὸς ἔρχεται κατόπιν ἀπὸ τὸν 52, 25 κ.τ.λ.;

γ. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι ἐμπρὸς ἀπὸ τὸν 52, 25 κ.τ.λ.;

δ. Ποῖος ἀριθμὸς ἔρχεται κατόπιν ἀπὸ τὸν 49, 69, 39, 89 κτλ.;

ε. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι ἐμπρὸς ἀπὸ τὸν 30, 60, 50, 90 κ.τ.λ. ἢ ἀπὸ τὸν 61, 31, 51, 91 κ.τ.λ.;

5. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι μεταξὺ τῶν 42 καὶ 44, 56 καὶ 58, 93 καὶ 95 κ.τ.λ. ἢ μεταξὺ ποίων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 33, ὁ 47, ὁ 68 κ. τ. λ.;

Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν 4 θεμελιωδῶν πράξεων*** εἰς τὴν σειρὰν 1(21)—100.

Σχετικὰ πρῶτα μὲ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως*** ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς. Αἱ ἐντελῶς νέαι διὰ τοὺς μαθητὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν εἶναι αἱ προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις τῶν διψηφίων ἀριθμῶν, αἱ ὁποῖαι δι᾽ αὐτὸ θὰ πρέπη νὰ παρουσιασθοῦν ἰδιαιτέρως εἰς τοὺς μαθητάς. Ὅθεν ἡ ὅλη ὕλη τῶν δύο προκειμένων

πράξεων θὰ διατάσσεται εἰς δύο μεγάλα τμήματα, ἕνα, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ταχθοῦν αἱ προσθέσεις διψηφίων καὶ μονοψηφίων καὶ αἱ ἀφαιρέσεις μονοψηφίων ἀπὸ διψηφίους, ἤτοι συντομώτερα ***αἱ προσθέσεις καὶ αἱ ἀφαιρέσεις τῶν ἀριθμῶν 1 — 10,*** καὶ δεύτερον, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ταχθοῦν ***αἱ προσθέσεις καὶ αἱ ἀφαιρέσεις διψηφίων.*** Τὸ πρῶτον πάλιν ἀπὸ τὰ τμήματα αὐτὰ θὰ διακριθῇ εἰς δύο μικρότερα τμήματα, ἕνα, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ταχθοῦν αἱ προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις αἱ γινόμεναι χωρὶς ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος, καὶ δεύτερον, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ταχθοῦν αἱ γινόμεναι μὲ ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος. Ἀλλὰ καὶ τὸ δεύτερον τμῆμα θὰ πρέπη νὰ χωρισθῇ εἰς δύο μικρότερα, ἕνα, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ προσθέσεις καὶ αἱ ἀφαιρέσεις τῶν μονάδων τῶν διψηφίων ἀριθμῶν θὰ γίνωνται χωρὶς ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος, καὶ δεύτερον, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ γίνωνται μὲ ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος. Εἰς κανὲν τώρα ἀπὸ τὰ μικρότερα αὐτὰ τμήματα δὲν θὰ πρέπη αἱ ἀσκήσεις τῆς ἀφαιρέσεως νὰ ἀποχωρίζωνται ὅλως διόλου ἀπὸ τὰς ἀσκήσεις τῆς προσθέσεως, νὰ τάσσωνται δηλαδὴ κατόπιν ἀπ᾽ αὐτάς, διότι μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν δὲν θὰ ἠμποροῦν νὰ συμπληρώνουν τὸ ἔργον τῶν ἀσκήσεων τῆς προσθέσεως. Ἀπεναντίας καὶ ἀκριβῶς διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ὁ σκοπὸς αὐτὸς θὰ πρέπῃ μετὰ κάθε σειρὰν ἀσκήσεων προσθέσεως νὰ τάσσεται ἀμέσως ἡ ἀντίστοιχή της σειρὰ τῶν ἀσκήσεων τῆς ἀφαιρέσεως. Ἀπὸ ὅλα αὐτὰ ἐξάγεται, ὅτι ἡ διάταξις τῆς ὕλης τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὴν προκειμένην σειρὰν πρέπει νὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς:

1. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀριθμῶν 1—10.

Α) Χωρὶς ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος:

α) Πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν 1—10 εἰς ἀριθμοὺς ἔχοντας καθαρὰς δεκάδας (π.χ. 20+1, 20+2, 20+3, κ.τ.λ., 30+1, 30+2, 30+3 κ.τ.λ. κ. οὕτ. καθ.), ἀμέσως δὲ μετ᾽ αὐτὴν ἡ ἀντίστοιχη ἀφαίρεσις ἀπὸ ἀριθμὸν ἔχοντα δεκάδας καὶ μονάδας μονοψηφίου ἴσου μὲ τὰς μονάδας του (π.χ. 29—9, 28—8, 27—7 κ. τ. λ., 39—9, 38—8, 37—7 κ.τ.λ. κ. οὕτ. καθ.).

β) Πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 κ.τ.λ. εἰς ἀριθμοὺς ἔχοντας δεκάδας καὶ μονάδας (π.χ. 21+1, 21+2, 21+3 κ.τ.λ.) καὶ μετ᾽ αὐτὴν ἡ ἀντίστοιχη ἀφαίρεσις ἀπὸ ἀριθμὸν ἔχοντα δεκάδας καὶ μονάδας μονοψηφίου μικροτέρου ἀπὸ τὰς μονάδας του, καὶ ὡρισμένως 1) τοῦ 1, 2) τοῦ 2, 3) τοῦ 3 κτλ. (π.χ. 29—1, 29—2... 29—8 κ.τ.λ.).

γ) Πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 κ.τ.λ. δίδουσα ὡς ἄθροισμα ἀριθμοὺς ἔχοντας καθαρὰς δεκάδας (π.χ. 29+1=30, 28+2, 27+3 . . . 21+9) καὶ μετ' αὐτὴν ἡ ἀντίστοιχη ἀφαίρεσις ἀπὸ ἀριθμὸν ἔχοντα καθαρὰς δεκάδας τῶν ἀριθμῶν 1—10 (π.χ. 30—1, 30—2, 30—3 . . . 30—9 κ.τ.λ.)[1].

δ) Διάφοροι ἀσκήσεις, καθὼς π.χ. αἱ ἑξῆς:

1) συμπλήρωσις ἀριθμῶν ἀποτελουμένων ἀπὸ δεκάδας καὶ μονάδας πρὸς σχηματισμὸν ἀριθμῶν ἀποτελουμένων ἀπὸ καθαρὰς δεκάδας (π.χ. 23+ ; =30 κ.τ.λ.) καὶ ἀφαίρεσις ἀπὸ ἀριθμοὺς ἔχοντας καθαρὰς δεκάδας πρὸς σχηματισμὸν ἀριθμῶν ἀποτελουμένων ἀπὸ δεκάδας καὶ μονάδας (π.χ. 30— ; =23).

2) σύνθεται προσθέσεις (21+3+5 κ.τ.λ.), σύνθεται ἀφαιρέσεις (29—5—3), προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις (24+5—3), ἀφαιρέσεις καὶ προσθέσεις (24—3+5).

3) σχηματισμὸς τῶν σειρῶν α) 2+2=4, 4+2=6 . . . 98+2=100, β) 100—2=98, 98—2=96 . . . 2—2=0, γ) 5+5=10, 10+5=15 . . . 95+5=100, δ) 100—5=95, 95—5=90 . . . 5—5=0.

Β) Μὲ ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος:

α) Σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν 21, 31, 41 κ.τ.λ. ἀπὸ τὰς προσθέσεις τῶν διψηφίων τῆς ἀμέσως κατωτέρας δεκάδος+2, 3, 4 κ.τ.λ. (π.χ. τοῦ 31 ἀπὸ τὰς προσθέσεις 29+2, 28+3, 27+4 κ.τ.λ.) καὶ μετ' αὐτὸν ἀφαίρεσις ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 21, 31, 41 κ.τ.λ. τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 κ.τ.λ. (π.χ. 31—2, 31—3, 31—4 κ. τ. λ.).

β) Σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν 22, 32, 42 κ.τ.λ. ἀπὸ τὰς προσθέσεις τῶν διψηφίων τῆς ἀμέσως κατωτέρας δεκάδος+3, 4, 5 κ.τ.λ. καὶ μετ' αὐτὸν ἀφαίρεσις ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 22, 32, 42 κ.τ.λ. τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5 κ.τ.λ.

γ) Σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν 23, 33, 43 κ.τ.λ. ἀπὸ τὰς προσθέσεις τῶν διψηφίων τῆς ἀμέσως κατωτέρας δεκάδος+4, 5, 6 κ.τ.λ. καὶ μετ' αὐτὸν ἀφαίρεσις ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 23, 33, 43 κ.τ.λ. τῶν ἀριθμῶν 4, 5, 6 κ.τ.λ. καὶ οὕτω καθεξῆς.

[1] Αἱ ἀσκήσεις αὐταὶ δὲν εἶναι παρὰ μία περίπτωσις τῶν ὑπὸ στοιχ. β) ἀσκήσεων καὶ χρησιμεύουν πρὸς προπαρασκευὴν τῶν ὑπὸ στοιχ. δ) 1 ἀσκήσεων.

δ) Διάφοροι ἀσκήσεις, καθὼς π.χ. αἱ ἑξῆς:

1) σύνθεται προσθέσεις (π.χ. 27+5+9), σύνθεται ἀφαιρέσεις (π. χ. 43—8—6), προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις (π. χ. 43+8—6), ἀφαιρέσεις καὶ προσθέσεις (43—6+8).

2) σχηματισμὸς σειρῶν (π. χ. α) 3+3=6, 6+3=9 . . . μέχρι τοῦ 99, β) 99—3=96, 96—3=93 κ.τ.λ., γ) 4+4=8, 8+4=12 κ.τ.λ. μέχρι τοῦ 100, δ) 100—4=96, 96—4=92 μέχρι τοῦ 0, ε) 6+6=12 . . . μέχρι τοῦ 96, ς) 96—6=90. . . μέχρι τοῦ 0 κ. οὕτ. καθ., ζ) 2+3=5, 5+3=8. . . μέχρι τοῦ 98, η) 98—3=95 . . . μέχρι τοῦ 0, θ) 3+4=7, 7+4=11 ... μέχρι τοῦ 99, ι) 99—4=95, 95—4=91. . . μέχρι τοῦ 0 ἢ σειρῶν, εἰς τὰς ὁποίας ἐναλλάσσονται δύο προσθετέοι ἢ δύο ἀφαιρετέοι κτλ.).

2. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν διψηφίων.

Α) Μὲ πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν μονάδων χωρὶς ὑπερπήδησιν τῆς δεκάδος:

α) Πρόσθεσις ἀριθμῶν ἐχόντων καθαρὰς δεκάδας (π.χ. 20+20, 20+30 κ.τ.λ.) καὶ μετ' αὐτὴν ἀφαίρεσις ὁμοίων ἀριθμῶν (π. χ. 40—20, 50—30 κ.τ.λ.).

β) Πρόσθεσις ἀριθμῶν ἐχόντων δεκάδας καὶ μονάδας εἰς ἀριθμοὺς ἔχοντας καθαρὰς δεκάδας (π. χ. 20+25 κ. τ. λ.) καὶ μετ' αὐτὴν ἀφαίρεσις ἀπὸ ἀριθμοὺς ἔχοντας δεκάδας καὶ μονάδας ἀριθμῶν μὲ δεκάδας καὶ ἴσας μονάδας (π.χ. 45—25 κ.τ.λ.).

γ) Πρόσθεσις ἀριθμῶν ἐχόντων καθαρὰς δεκάδας εἰς ἀριθμοὺς ἔχοντας δεκάδας καὶ μονάδας (π.χ. 25+20 κ.τ.λ.) καὶ μετ' αὐτὴν ἀφαίρεσις ἀπὸ ἀριθμοὺς ἔχοντας δεκάδας καὶ μονάδας ἀριθμῶν μὲ καθαρὰς δεκάδας (π.χ. 45—20 κ.τ.λ.).

δ) Πρόσθεσις ἀριθμῶν ἐχόντων δεκάδας καὶ μονάδας (π. χ. 25+22 κ.τ.λ.) καὶ μετ' αὐτὴν ἀφαίρεσις ὁμοίων ἀριθμῶν (π. χ. 47—22 κ.τ.λ.).

Β) Μὲ πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν μονάδων, εἰς τὴν ὁποίαν γίνεται ὑπερπήδησις τῆς δεκάδος:

α) Ἁπλαῖ προσθέσεις (π. χ. 25+27 κ. τ. λ.) καὶ ἀφαιρέσεις (π. χ. 52—27 κ.τ.λ.).

β) Σύνθεται προσθέσεις (π. χ. 27+18+16 κ.τ.λ.), σύνθεται ἀφαιρέσεις (π. χ. 44—26—9 κ. τ. λ.), προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις (π.χ. 44—8+10 κ.τ.λ.).

γ) Σχηματισμὸς σειρῶν (π. χ. 1) 11+11=22, 22+11=33 κ.τ.λ. 2) 99—11=88, 88—11=77 κ. τ. λ. 3) 12+12=24, 24+12=36 κ.τ.λ. 4) 96—12=84, 84—12=72 κ.τ.λ.

Εἶναι εὐνόητον, ὅτι οἱ Μεθοδικοὶ ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἀκόμη εἰς τὴν σειρὰν 1—20 ἐπιτάσσουν εἰς κάθε μεγαλύτερον τμῆμα ἀσκήσεων τὰς ἀφαιρέσεις εἰς τὰς προσθέσεις (ἴδ. ἀν. σ. 460 κ. ἀκ.), κάμνουν τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν σειρὰν 1—100. Περιττὸν δὲ εἶναι νὰ παραθέσωμεν ἐδῶ τὸν τύπον τῆς διατάξεως αὐτῆς, διότι ἐξάγεται εὔκολα ἀπὸ τὴν διάταξιν, τὴν ὁποίαν ἐχαράξαμεν ἀμέσως ἀνωτέρω, ἀρκεῖ εἰς κάθε μεγαλύτερον τμῆμα νὰ χωρισθοῦν αἱ ἀφαιρέσεις ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους προσθέσεις καὶ νὰ ταχθοῦν κατόπιν ἀπὸ αὐτάς.

Ὅ,τι ἔχομεν ἀκόμη νὰ παρατηρήσωμεν, εἶναι, ὅτι σκόπιμον εἶναι κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὴν σειρὰν 1—100 νὰ ἐπαναλαμβάνεται ὁ πολλαπλασιασμός, ἡ διαίρεσις καὶ ἡ ἀνάλυσις εἰς τὴν σειρὰν 1—20.

Ἡ ὕλη τώρα ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*** καὶ ***τῆς διαιρέσεως*** ὀρθὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ εἰς δύο τμήματα, ἕνα μέν, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ τάσσωνται οἱ πολλαπλασιασμοὶ τῶν μονοψηφίων μὲ τοὺς μονοψηφίους—μὲ τοὺς ὁποίους σχηματίζεται ὁ μικρὸς πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν σειρὰν 1—100, ὁ συνήθως λεγόμενος Πυθαγόρειος—, καὶ αἱ διαιρέσεις, αἱ δίδουσαι ὡς πηλίκον μονοψήφιον ἀριθμόν, καὶ δεύτερον, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ διδάσκωνται οἱ πολλαπλασιασμοὶ διψηφίου ἀριθμοῦ μὲ μονοψήφιον—μὲ τοὺς ὁποίους σχηματίζεται ὁ λεγόμενος μεγάλος πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν σειρὰν 1—100—, ἢ καὶ οἱ ἀντίθετοι, καθὼς καὶ αἱ διαιρέσεις αἱ δίδουσαι ὡς πηλίκον διψήφιον ἀριθμόν. Τὸ δεύτερον τμῆμα, ἐπειδὴ εἶναι σημαντικὰ δυσκολώτερον ἀπὸ τὸ πρῶτον, ὀρθὸν εἶναι νὰ διδάσκεται μόνον εἰς τάξεις, αἱ ὁποῖαι λειτουργοῦν μὲ εὐνοϊκὰς συνθήκας (ἴδ. καὶ ἀνωτ., σελ. 411 κ. ἀκ.).

Σύμφωνα μὲ τὰ ἀνωτέρω ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις εἰς τὴν σειρὰν 1—100 πρέπει νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

1. Α. Οἱ πολλαπλασιασμοὶ μονοψηφίων μὲ μονοψηφίους.

Β. Αἱ διαιρέσεις, αἱ δίδουσαι πηλίκον μονοψήφιον.

2. Α. Οἱ πολλαπλασιασμοὶ διψηφίων μὲ μονοψηφίους καὶ μονοψηφίων μὲ διψηφίους.

Β. Αἱ διαιρέσεις, αἱ δίδουσαι πηλίκον διψήφιον.

Σχετικῶς τώρα μὲ ***τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τῶν μονοψηφίων μὲ τοὺς μονοψηφίους*** ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἀκόλουθα. Ἕνα μέρος ἀπὸ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς αὐτοὺς ἐδιδάχθηκε εἰς τὴν σειρὰν 1—20. Τώρα πρόκειται νὰ ἐπαναληφθοῦν οἱ γνωστοὶ πολλαπλασιασμοὶ καὶ νὰ ἐπεκταθοῦν εἰς τὴν μέχρι τοῦ 100 σειράν. Τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος ὡς βάσιν τῆς διατάξεως τῶν πολλαπλασιασμῶν ἐλαμβάναμεν ***τοὺς πολλαπλασιαστάς***, διατάσσοντες εἰς μὲν τὴν σειρὰν 1—10 ὅλους τοὺς πολλαπλασιασμούς, εἰς δὲ τὴν σειρὰν 1—20 τὴν πρώτην σειράν των ἔτσι, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3 κ. τ. λ. νὰ πολλαπλασιάζωνται μὲ τὸν ἴδιον πολλαπλασιαστήν, πρῶτα τὸν 2, ἔπειτα τὸν 3, κατόπιν τὸν 4 κ. οὕτ. καθ. (1×2, 2×2, 3×2 . . . 10×2—1×3, 2×3, 3×3 . . . 6×3 κ. οὕτ. καθ.). Τὸ ἐκάμναμεν δὲ αὐτό, διότι εἰς τὰς σειρὰς 1—10 καὶ 1—20 δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ ληφθῇ ὡς βάσις τῆς διατάξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁ πολλαπλασιαστέος, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 1—10 ὡς πολλαπλασιαστέοι δὲν ἠμποροῦσαν νὰ πολλαπλασιασθοῦν μὲ ὅλους τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς ὡς πολλαπλασιαστάς, χωρὶς νὰ γίνῃ ἔξοδος ἀπὸ τὰ ὅρια τῶν δύο αὐτῶν σειρῶν. Κατὰ τὸ δεύτερον ὅμως σχολικὸν ἔτος, εἰς τὸ ὁποῖον ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ 1—10 ἠμποροῦν νὰ πολλαπλασιασθοῦν ὡς πολλαπλασιαστέοι μὲ ὅλους τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς ὡς πολλαπλασιαστάς, χωρὶς νὰ ὑπερπηδηθῇ τὸ τελευταῖον μέλος τῆς σειρᾶς 1—100, ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ ὡς βάσις τῆς διατάξεως τῶν πολλαπλασιασμῶν ***ὁ πολλαπλασιαστέος***. Σύμφωνα μὲ τὴν διάταξιν αὐτήν, ἡ ὁποία εἶναι περισσότερον προσιτὴ εἰς τὴν ἀντίληψιν τῶν μαθητῶν καὶ ἡ ὁποία ἄλλωστε ἔχει προπαρασκευασθῇ μὲ ἀναλόγους ἀσκήσεις κατὰ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος (ἴδ. ἀνωτ. τὸν πολλαπλ. εἰς τὴν σειρὰν 1—20, σελ. 461), ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2—10 θὰ ἀποτελῇ ἰδιαιτέραν ***πολλαπλασιαστικὴν σειράν***, εἰς τὴν ὁποίαν ὡς πολλαπλασιαστέος θὰ πολλαπλασιάζεται κατὰ σειρὰν μὲ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς μονοψηφίους πολλαπλασιαστὰς 1, 2, 3 . . . 10 (π. χ. σειρὰ τοῦ 2: 2×1, 2×2, 2×3, 2×4. . . 2×10. Σειρὰ τοῦ 3: 3×1, 3×2, 3×3, 3×4. . . 3×10. Σειρὰ τοῦ 9: 9×1, 9×2, 9×3. . . 9×10). Ἐν τούτοις πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι μερικοὶ Μεθοδικοὶ ἐξακολουθοῦν καὶ κατὰ τὸ δεύτερον σχολικὸν ἔτος νὰ λαμβάνουν ὡς βάσιν τῆς διατάξεως τῶν πολλαπλασιασμῶν τὸν πολλαπλασιαστήν, διατάσσοντες τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἔτσι, ὥστε οἱ διάφοροι πολλαπλασιαστέοι 1—10 νὰ πολλαπλασιάζωνται κατὰ σειρὰν μὲ τὸν ἴδιον πολλαπλασιαστήν, πρῶτα τὸν 2, ἔπειτα τὸν 3, κατόπιν τὸν 4 κ. οὕτ. καθ. (π.χ. 1×2, 2×2, 3×2. . . 10×2—1×3, 2×3, 3×3, 4×3. . . 9×3, 10×3—1×4, 2×4, 3×4, 4×4. . . 9×4, 10+4 κ. οὕτ. καθ.).

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῶν 9 πολλαπλασιαστικῶν σειρῶν ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι αἱ σειραὶ αὐταὶ ἠμποροῦν νὰ ταχθοῦν κατὰ δύο τρόπους, ἤτοι 1) σύμφωνα μὲ τὴν φυσικὴν διαδοχὴν τῶν πολλαπλασιαστέων καὶ 2) σύμφωνα μὲ τὴν ἄποψιν τῆς εὐκολωτέρας κατανοήσεώς των ἐκ μέρους τῶν μαθητῶν. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν τὴν διάταξιν: 1. Σειρὰ τοῦ 2, 2. Σειρὰ τοῦ 3, 3. Σειρὰ τοῦ 4 κ. οὕτ. καθ. Ἡ διάταξις αὐτὴ ἔχει τὸ πλεονέκτημα, ὅτι εἰς τοὺς πρώτους, τοὺς καὶ μικροτέρους, πολλαπλασιαστέους, τὸν 2, τὸν 3 καὶ τὸν 4 ἀκόμη εἶναι εὐκολώτερη ἡ ἐποπτεία ἕνεκα τῆς σμικρότητος τῶν γινομένων (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 114). Εἰς τὴν δεύτερην περίπτωσιν θὰ ἀρχίσωμεν μὲ τὴν σειρὰν τοῦ 10, ἡ ὁποία εἶναι ἡ εὐκολώτερη ἀπὸ ὅλας, διότι αἱ προτάσεις τῶν πολλαπλασιασμῶν τοῦ 10 (10×2=20, 10×3=30, 10×4=40 κ.τ.λ.) συμπίπτουν μὲ τὰς προτάσεις τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν 20 (10+10=10×2), 30 (10+10+10= 10×3) κ.τ.λ., δι' αὐτὸ δὲ στηρίζονται εἰς τὴν κατανόησιν καὶ ἐντυπώνονται ἀμέσως εἰς τὴν συνείδησιν τῶν παίδων, χωρὶς νὰ ἀπαιτῆται ἀπὸ αὐτοὺς καὶ ἡ μηχανικὴ ἀπομνημόνευσίς των (Räther, αὐτ.). Τὴν σειρὰν τοῦ 10 θὰ ἀκολουθοῦν αἱ σχετικῶς εὐκολώτεραι σειραὶ τῶν συγγενῶν μὲ αὐτὸν πολλαπλασιαστέων, ἤτοι τοῦ 5 (ἡμίσεος τοῦ 10), τοῦ 2 (πέμπτου τοῦ 10), τοῦ 4 (διπλασίου τοῦ 2) καὶ τοῦ 8 (διπλασίου τοῦ 4), κατόπιν θὰ ἔρχωνται αἱ σειραὶ τοῦ 3, τοῦ 6 (διπλασίου

τοῦ 3) καὶ τοῦ 9 (τριπλασίου τοῦ 3), τελευταία δὲ θὰ διδάσκεται ἡ σχετικῶς δυσκολώτερη σειρὰ τοῦ ἀσχέτου μὲ ὅλους τοὺς ἄλλους ἀριθμοῦ 7.

Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς διατάξεις ὁ Büttner (ὅπ. ἀν. σελ. 106) προκρίνει τὴν δεύτερην ὄχι μόνον διότι ὁδηγεῖ ἀπὸ τὰ εὐκολώτερα, εἰς τὰ δυσκολώτερα, ἀλλὰ καὶ διὰ τὸν ἑξῆς ἀκόμη λόγον. Κάθε πολλαπλασιαστικὴ σειρὰ δίδει εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος προφανῶς ἀπὸ μίαν ***νέαν διάρθρωσιν***. Εἰς τὴν σειρὰν π.χ. τοῦ 8 ***αἱ ἀρθρώσεις*** εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 8, 16, 24 κ.τ.λ. Φανερὸν τώρα εἶναι, ὅτι κατὰ πρῶτον πρέπει νὰ σχηματισθοῦν αἱ σειραὶ ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων αἱ ἀρθρώσεις προκύπτουν ἀμέσως ἀπὸ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ἤτοι αἱ σειραὶ τοῦ 10 καὶ τοῦ 5. Κατόπιν ἀπὸ αὐτὰς πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ ἡ σειρὰ τοῦ 2, τῆς ὁποίας αἱ ἀρθρώσεις εἶναι οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ τοῦ συστήματος, ἡ σειρὰ τοῦ 4, τῆς ὁποίας τὰ μέλη προκύπτουν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς προηγουμένης συνενωνόμενα ἀπὸ δύο, καὶ ἡ σειρὰ τοῦ 8, ἡ ὁποία προκύπτει μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἀπὸ τὴν σειρὰν τοῦ 4. Μὲ ὅμοιον τρόπον προκύπτουν ἀπὸ τὴν σειρὰν τοῦ 3 αἱ σειραὶ τοῦ 6 καὶ τοῦ 9. Τελευταία θὰ ἔρχεται ἡ σειρὰ τοῦ ἀνεξαρτήτου ἀριθμοῦ 7.

Τὸ ἀληθὲς εἶναι, ὅτι τὰ πλεονεκτήματα τῶν δύο διατάξεων ἰσοφαρίζουν ἀναμεταξύ των. Ἐν τούτοις ἐπειδὴ μὲ τὴν δεύτερην οἱ πολλαπλασιασμοὶ στηρίζονται κάπως περισσότερον εἰς τὴν κατανόησιν, δίκαιον εἶναι νὰ προτιμηθῇ αὐτή. Μὲ τὴν ἐφαρμογήν της ἡ ὕλη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μονοψηφίων μὲ μονοψηφίους θὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς: 1. Ἡ πολλαπλασιαστικὴ σειρὰ τοῦ 10, 2. Ἡ π. σειρὰ τοῦ 5, 3. Ἡ π. σειρὰ τοῦ 2, 4. Ἡ π. σειρὰ τοῦ 4, 5. Ἡ π. σειρὰ τοῦ 8, 6. Ἡ π. σειρὰ τοῦ 3, 7. Ἡ π. σειρὰ τοῦ 6, 8. Ἡ π. σειρὰ τοῦ 9 καὶ 9. Ἡ π. σειρὰ τοῦ 7.

Ἡ δὲ ὕλη ***τῶν διαιρέσεων τῶν διδουσῶν πηλίκον μονοψήφιον*** ἠμπορεῖ νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. ***Ἡ μέτρησις.***

Α. Ἡ μέτρησις μὲ διαιρέτην τὸν 1

Β. Ἡ μέτρησις μὲ διαιρέτην τὸν 2:

α) χωρὶς ὑπόλοιπον (τὸ 2 εἰς τὸ 2, εἰς τὸ 4, εἰς τὸ 6 . . . εἰς τὸ 20),

β) μὲ ὑπόλοιπον (τὸ 2 εἰς τὸ 5, εἰς τὸ 7 κ.τ.λ.).

Γ. Ἡ μέτρησις μὲ διαιρέτην τὸν 3:

α) χωρὶς ὑπόλοιπον (τὸ 3 εἰς τὸ 3, εἰς τὸ 6 ... εἰς τὸ 30).

β) μὲ ὑπόλοιπον (τὸ 3 εἰς τὸ 4, εἰς τὸ 5, εἰς τὸ 7 κ.τ.λ.).

Δ. Ἡ μέτρησις μὲ διαιρέτην τὸν 4 ὅμοια καὶ οὕτω καθ.

2. Ὁ μερισμός.

Α. Ὁ μερισμὸς εἰς 2 ἴσα μέρη, ἤτοι μὲ διαιρέτην τὸν 2:

α) χωρὶς ὑπόλοιπον (2 : 2, 4 : 2, 6 : 2, . . . 0 : 2).

β) μὲ ὑπόλοιπον (3 : 2, 5 : 2, 7 : 2 κ.τ.λ.).

Β. Ὁ μερισμὸς εἰς 3 ἴσα μέρη, ἤτοι μὲ διαιρέτην τὸν 3:

α) χωρὶς ὑπόλοιπον (3 : 3, 6 : 3, 9 : 3, . . . 30 : 3).

β) μὲ ὑπόλοιπον (4 : 3, 5 : 3, 7 : 3 κ.τ.λ.).

Γ. Ὁ μερισμὸς εἰς 4, 5, 6. . . 10 ἴσα μέρη μὲ τὸν ἴδιον τρόπον.

Δ. Ὁ μερισμὸς τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ μὲ πολλοὺς διαιρέτας (π.χ. 40 : 4, 5, 8, 10 κ.τ.λ.).

Σημειωτέον, ὅτι εἰς τοὺς διαιρέτας 2, 3 καὶ 4 ὁ μερισμὸς θὰ ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὸ ὑπόλοιπον, θὰ παριστάνεται δὲ ἡ διαίρεσις αὐτὴ τοῦ ὑπολοίπου μὲ κλασματικὴν μορφὴν (τῶν δευτέρων, τρίτων καὶ τετάρτων).

Ἀρκετοὶ τώρα Μεθοδικοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ Räther (ὅπ. ἀνωτ. σ. 123 κ. ἀκ.) καὶ ὁ Büttner (ὅπ. ἀν. σ. 105), λαμβάνοντες ὑπ᾿ ὄψιν των, ὅτι εἰς τὰ προβλήματα τῆς πολλαπλασιαστικῆς σειρᾶς τοῦ κάθε ἀριθμοῦ (π. χ. εἰς τὰ προβλήματα $5 \times 2 = 10$, $5 \times 3 = 15$, $5 \times 4 = 20$ κ.τ.λ. τῆς σειρᾶς τοῦ 5) ἀντιστοιχοῦν ἰσάριθμα διδακτικῶς χρήσιμα προβλήματα μετρήσεως μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ὡς διαιρέτην (τὸ 5 εἰς τὸ 10=2 φοράς, τὸ 5 εἰς τὸ 15=3, τὸ 5 εἰς τὸ 20=5 κ.τ.λ.), ὄχι ὅμως καὶ προβλήματα μερισμοῦ, διότι ὅλα τὰ ἀντίστοιχα προβλήματα τοῦ μερισμοῦ ἔχουν τὸ ἴδιον πηλίκον (10 : 2=5, 15 : 3=5, 20 : 4=5 κ.τ.λ.). ἐπιτάσσουν εἰς τὴν πολλαπλασιαστικὴν σειρὰν τοῦ κάθε ἀριθμοῦ τὴν μέτρησιν μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, τὸν δὲ μερισμὸν διδάσκουν ἰδιαιτέρως μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν ὅλων τῶν σειρῶν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς μετρήσεως. Δι᾿ ὅλην ἑπομένως τὴν ὕλην τῶν πολλαπλασιασμῶν τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν καὶ τῶν διαιρέσεων τῶν διδουσῶν πηλίκον μονοψήφιον οἱ Μεθοδικοὶ αὐτοὶ ἐφαρμόζουν τὴν ἑξῆς διάταξιν:

1. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ μέτρησις.

Α. Ἡ σειρὰ τοῦ 10:

α) ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 10,

β) ἡ μέτρησις μὲ τὸν 10 α) χωρὶς ὑπόλοιπον καὶ β) μὲ ὑπόλοιπον.

Β. Ἡ σειρὰ τοῦ 5:

α) ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 5,

β) ἡ μέτρησις μὲ τὸν 5 α) χωρὶς ὑπόλοιπον καὶ β) μὲ ὑπόλοιπον.

Γ. Ἡ σειρὰ τοῦ 2, τοῦ 4 κ.τ.λ. μὲ τὸν ἴδιον τρόπον.

2. Ὁ μερισμὸς (ὅπως εἰς τὴν προηγούμενην διάταξιν).

Σημειωτέον, ὅτι ὁ Büttner παρεκκλίνει ἀπὸ τὴν διάταξιν αὐτὴν μόνον εἰς τοῦτο, ὅτι εἰς τὴν πολλαπλασιαστικὴν σειρὰν τοῦ κάθε ἀριθμοῦ ἐπιτάσσει μόνον τὰς ***χωρὶς ὑπόλοιπον*** μετρήσεις μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ἐνῷ τὰς μὲ ὑπόλοιπον ἀφήνει ἀδιδάκτους.

Ὁ Hartmann (ὅπ. ἀν., σ. 310 κ. ἀκ.) προχωρεῖ ἀκόμη περισσότερον. Δὲν συνδέει μόνον μὲ τὰς ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν σειρῶν τὰς ἀντιστοίχους ἀσκήσεις τῆς μετρήσεως, ἀλλὰ καὶ ἐπιτάσσει εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς ἀσκήσεις ἰδιαιτέρας ἀσκήσεις πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν 1—10 μὲ τὸν ἴδιον πολλαπλασιαστὴν (πρῶτα τὸν 2 (π.χ. 1×2, 2×2, 3×2, 4×2 κ.τ.λ.), ἔπειτα τὸν 3, κατόπιν τὸν 4 κ.τ.λ.), τὰς ἀσκήσεις τοῦ διπλασίου, τοῦ τριπλασίου κ.τ.λ., ὅπως τὰς ὀνομάζει, καὶ μὲ αὐτὰς συνδέει τὰς ἀντιστοίχους ἀσκήσεις των τοῦ μερισμοῦ εἰς 2, 3, 4 κ.τ.λ. ἴσα μέρη. Ἔτσι ὁ Hartmann συνδέει εἰς τὴν σειρὰν 1—100 καὶ τὴν μέτρησιν καὶ τὸν μερισμὸν μὲ τὸν πολλαπλασιασμόν. Δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐγκρίνωμεν καμίαν ἀπὸ τὰς διατάξεις αὐτάς, διότι, ἂν εἰς κάθε ἄσκησιν πολλαπλασιασμοῦ ἀντιστοιχῇ καὶ μία ἄσκησις μετρήσεως ἢ μερισμοῦ, δὲν ἀντιστοιχεῖ ὅμως καὶ εἰς κάθε ἄσκησιν μετρήσεως ἢ μερισμοῦ καὶ ἀπὸ μία ἄσκησις πολλαπλασιασμοῦ. Ἔτσι αἱ μὲ ὑπόλοιπον μετρήσεις καὶ οἱ μὲ ὑπόλοιπον μερισμοί—καὶ αἱ ἀσκήσεις αὐταὶ τῆς διαιρέσεως εἶναι αἱ περισσότεραι—δὲν ἔχουν ἀντιστοίχους των πολλαπλασιασμούς. Ἡ ὕπαρξις τῶν ἀσκήσεων αὐτῶν ἀπαιτεῖ τὸν χωρισμὸν ὅλων τῶν ἀσκήσεων τῆς μετρήσεως καὶ τοῦ μερισμοῦ ἀπὸ τὰς ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τὴν ἰδιαίτερην διδασκαλίαν των.

Ἡ ὕλη τώρα ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ***

Γ. Ἡ μέτρησις μὲ διαιρέτην τὸν 3 :

α) χωρὶς ὑπόλοιπον (τὸ 3 εἰς τὸ 3, εἰς τὸ 6 ... εἰς τὸ 30),

β) μὲ ὑπόλοιπον (τὸ 3 εἰς τὸ 4, εἰς τὸ 5, εἰς τὸ 7 κ.τ.λ.).

Δ. Ἡ μέτρησις μὲ διαιρέτην τὸν 4 ὅμοια καὶ οὕτω καθ.

2. Ὁ μερισμός.

Α. Ὁ μερισμὸς εἰς 2 ἴσα μέρη, ἤτοι μὲ διαιρέτην τὸν 2 :

α) χωρὶς ὑπόλοιπον (2 : 2, 4 : 2, 6 : 2, . . . 20 : 2),

β) μὲ ὑπόλοιπον (3 : 2, 5 : 2, 7 : 2 κ.τ.λ.).

Β. Ὁ μερισμὸς εἰς 3 ἴσα μέρη, ἤτοι μὲ διαιρέτην τὸν 3 :

α) χωρὶς ὑπόλοιπον (3 : 3, 6 : 3, 9 : 3, . . . 30 : 3),

β) μὲ ὑπόλοιπον (4 : 3, 5 : 3, 7 : 3 κ.τ.λ.).

Γ. Ὁ μερισμὸς εἰς 4, 5, 6. . . 10 ἴσα μέρη μὲ τὸν ἴδιον τρόπον.

Δ. Ὁ μερισμὸς τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ μὲ πολλοὺς διαιρέτας (π.χ. 40 : 4, 5, 8, 10 κ.τ.λ.).

Σημειωτέον, ὅτι εἰς τοὺς διαιρέτας 2, 3 καὶ 4 ὁ μερισμὸς θὰ ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὸ ὑπόλοιπον, θὰ παριστάνεται δὲ ἡ διαίρεσις αὐτὴ τοῦ ὑπολοίπου μὲ κλασματικὴν μορφὴν (τῶν δευτέρων, τρίτων καὶ τετάρτων).

Ἀρκετοὶ τώρα Μεθοδικοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ Räther (ὅπ. ἀνωτ. σ. 123 κ. ἀκ.) καὶ ὁ Büttner (ὅπ. ἀν. σ. 105), λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν των, ὅτι εἰς τὰ προβλήματα τῆς πολλαπλασιαστικῆς σειρᾶς τοῦ κάθε ἀριθμοῦ (π. χ. εἰς τὰ προβλήματα 5×2=10, 5×3=15, 5×4=20 κ.τ.λ. τῆς σειρᾶς τοῦ 5) ἀντιστοιχοῦν ἰσάριθμα διδακτικῶς χρήσιμα προβλήματα μετρήσεως μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ὡς διαιρέτην (τὸ 5 εἰς τὸ 10=2 φοράς, τὸ 5 εἰς τὸ 15=3, τὸ 5 εἰς τὸ 20=5 κ.τ.λ.), ὄχι ὅμως καὶ προβλήματα μερισμοῦ, διότι ὅλα τὰ ἀντίστοιχα προβλήματα τοῦ μερισμοῦ ἔχουν τὸ ἴδιον πηλίκον (10 : 2=5, 15 : 3=5, 20 : 4=5 κ.τ.λ.), ἐπιτάσσουν εἰς τὴν πολλαπλασιαστικὴν σειρὰν τοῦ κάθε ἀριθμοῦ τὴν μέτρησιν μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, τὸν δὲ μερισμὸν διδάσκουν ἰδιαιτέρως μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν ὅλων τῶν σειρῶν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς μετρήσεως. Δι' ὅλην ἑπομένως τὴν ὕλην τῶν πολλαπλασιασμῶν τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν καὶ τῶν διαιρέσεων τῶν διδουσῶν πηλίκον μονοψήφιον οἱ Μεθοδικοὶ αὐτοὶ ἐφαρμόζουν τὴν ἑξῆς διάταξιν :

1. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ μέτρησις.

Α. Ἡ σειρὰ τοῦ 10 :

α) ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 10,

β) ἡ μέτρησις μὲ τὸν 10 α) χωρὶς ὑπόλοιπον καὶ β μ ὑπόλοιπον.

Β. Ἡ σειρὰ τοῦ 5 :

α) ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 5,

β) ἡ μέτρησις μὲ τὸν 5 α) χωρὶς ὑπόλοιπον καὶ β) μὲ ὑπόλοιπον.

Γ. Ἡ σειρὰ τοῦ 2, τοῦ 4 κ.τ.λ. μὲ τὸν ἴδιον τρόπον.

2. Ὁ μερισμὸς (ὅπως εἰς τὴν προηγούμενην διάταξιν).

Σημειωτέον, ὅτι ὁ Büttner παρεκκλίνει ἀπὸ τὴν διάταξιν αὐτὴν μόνον εἰς τοῦτο, ὅτι εἰς τὴν πολλαπλασιαστικὴν σειρὰν τοῦ κάθε ἀριθμοῦ ἐπιτάσσει μόνον τὰς ***χωρὶς ὑπόλοιπον*** μετρήσεις μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ἐνῷ τὰς μὲ ὑπόλοιπον ἀφήνει ἀδιδάκτους.

Ὁ Hartmann (ὅπ. ἀν., σ. 310 κ. ἀκ.) προχωρεῖ ἀκόμη περισσότερον. Δὲν συνδέει μόνον μὲ τὰς ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν σειρῶν τὰς ἀντιστοίχους ἀσκήσεις τῆς μετρήσεως, ἀλλὰ καὶ ἐπιτάσσει εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς ἀσκήσεις ἰδιαιτέρας ἀσκήσεις πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν 1—10 μὲ τὸν ἴδιον πολλαπλασιαστὴν (πρῶτα τὸν 2 (π.χ. 1×2, 2×2, 3×2, 4×2 κ.τ.λ.), ἔπειτα τὸν 3, κατόπιν τὸν 4 κ.τ.λ.), τὰς ἀσκήσεις τοῦ διπλασίου, τοῦ τριπλασίου κ.τ.λ., ὅπως τὰς ὀνομάζει, καὶ μὲ αὐτὰς συνδέει τὰς ἀντιστοίχους ἀσκήσεις των τοῦ μερισμοῦ εἰς 2, 3, 4 κ.τ.λ. ἴσα μέρη. Ἔτσι ὁ Hartmann συνδέει εἰς τὴν σειρὰν 1—100 καὶ τὴν μέτρησιν καὶ τὸν μερισμὸν μὲ τὸν πολλαπλασιασμόν. Δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐγκρίνωμεν καμίαν ἀπὸ τὰς διατάξεις αὐτάς, διότι, ἂν εἰς κάθε ἄσκησιν πολλαπλασιασμοῦ ἀντιστοιχῇ καὶ μία ἄσκησις μετρήσεως ἢ μερισμοῦ, δὲν ἀντιστοιχεῖ ὅμως καὶ εἰς κάθε ἄσκησιν μετρήσεως ἢ μερισμοῦ καὶ ἀπὸ μία ἄσκησις πολλαπλασιασμοῦ. Ἔτσι αἱ μὲ ὑπόλοιπον μετρήσεις καὶ οἱ μὲ ὑπόλοιπον μερισμοὶ—καὶ αἱ ἀσκήσεις αὐταὶ τῆς διαιρέσεως εἶναι αἱ περισσότεραι—δὲν ἔχουν ἀντιστοίχους των πολλαπλασιασμούς. Ἡ ὕπαρξις τῶν ἀσκήσεων αὐτῶν ἀπαιτεῖ τὸν χωρισμὸν ὅλων τῶν ἀσκήσεων τῆς μετρήσεως καὶ τοῦ μερισμοῦ ἀπὸ τὰς ἀσκήσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τὴν ἰδιαίτερην διδασκαλίαν των.

Ἡ ὕλη τώρα ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ***

μὲ μονοψήφιον καὶ μονοψηφίου μὲ διψήφιον σκόπιμον εἶναι νὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

1. Πολλαπλασιασμὸς διψηφίου ἔχοντος καθαρὰς δεκάδας μὲ μονοψήφιον (π.χ. 20×2, 20×3 κ.τ.λ.).
2. Πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 15 μὲ μονοψήφιον.
3. Πολλαπλασιασμὸς διψηφίων ἐν γένει ἀριθμῶν, ἐχόντων δεκάδας καὶ μονάδας, μὲ μονοψήφιον (11, 13, 14. 16 κ.τ.λ. 21, 22, 23 κ.τ.λ. × 2, 3, 4 κ.τ.λ.).
4. Οἱ ἀντίστοιχοι κατὰ σειρὰν πολλαπλασιασμοὶ μονοψηφίων μὲ διψηφίους.

Ἡ δὲ ὕλη τῶν διαιρέσεων (μετρήσεων καὶ μερισμῶν) τῶν διδουσῶν πηλίκον διψήφιον ὀρθὸν εἶναι (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν., σ. 127 καὶ ἀκ.) νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

1. Ἡ μέτρησις καὶ ὁ μερισμὸς χωρὶς ὑπόλοιπον.

Α. Διαίρεσις μὲ τὸν 2 :

α) ὁ διαιρετέος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 20 καὶ καθαρὸν πολλαπλάσιόν του (π.χ. 40, 60, 80, 100),

β) ὁ διαιρετέος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 20 καὶ ἔχων δεκάδας καὶ μονάδας (π.χ. 28, 46 κ.τ.λ.).

Β. Διαίρεσις μὲ τὸν 3 :

α) ὁ διαιρετέος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 30 καὶ καθαρὸν πολλαπλάσιόν του (π.χ. 60, 90),

β) ὁ διαιρετέος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 30 καὶ ἔχων δεκάδας καὶ μονάδας (π.χ. 36, 69 κ.τ.λ.).

Γ. Διαίρεσις μὲ τὸν 4, 5 κ. οὕτ. καθ.

Δ. Κλασματικὴ διατύπωσις διαφόρων πηλίκων (π.χ. 100 λεπτὰ (ἢ 1 δραχμή) : 2=50 λεπτὰ (ἢ $\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς) κ.τ.λ.).

2. Ἡ μέτρησις καὶ ὁ μερισμὸς μὲ ὑπόλοιπον.

Ἡ δὲ ὕλη ***τῆς ἀναλύσεως*** καλὸν εἶναι νὰ διατάσσεται ἔτσι, ὥστε ὅλοι οἱ ***μὴ πρῶτοι*** ἀριθμοὶ τῆς σειρᾶς 1—100 νὰ ἀναλύωνται κατὰ σειρὰν εἰς ὅλους τοὺς δυνατοὺς παράγοντάς των. Κατάλληλοι διὰ ποικίλας ἀναλύσεις εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοί: 24 (3×8, 8×3, 4×6, 6×4, 12×2, 2×12), 30, 36, 40, 48, 60, 70, 72, 80, 84, 90, 96, 100 (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀνωτ., σελ. 128).

Σημειωτέον τέλος, ὅτι κατὰ μὲν τὴν διδασκαλίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μονοψηφίων σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν 1—10 εἰς τὴν σειρὰν 1—100, κατὰ δὲ τὴν διδασκαλίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διψηφίου μὲ μονοψήφιον ἡ πρόσθεσις διψηφίων, κατὰ δὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν διαιρέσεων τῶν διδουσῶν πηλίκον μονοψήφιον ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀριθμῶν 1—10 εἰς τὴν σειρὰν 1—100 καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου μὲ μονοψήφιον, κατὰ δὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν διαιρέσεων τῶν διδουσῶν πηλίκον διψήφιον ἡ ἀφαίρεσις διψηφίων καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς διψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

γ) Ἡ διάταξις τῆς ὕλης τοῦ τρίτου σχολικοῦ ἔτους.

Τὴν ὕλην τοῦ ἔτους αὐτοῦ ἀποτελοῦν, ὅπως γνωρίζομεν, 1) ἡ εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὴν μέχρι τῶν ἑκατομμυρίων σειρὰν καὶ 2) ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις εἰς τὴν σειρὰν αὐτήν.

Μερικοὶ Μεθοδικοί, καθὼς ὁ Stubba, εἰσάγουν τοὺς μαθητὰς εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς διὰ μιᾶς, κατόπιν δὲ τοὺς ἀσκοῦν εἰς τὴν ἀρίθμησίν των.

Οἱ περισσότεροι ὅμως Μεθοδικοὶ διατάσσουν τὴν σειρὰν αὐτὴν εἰς δύο διαδοχικὰ διδασκόμενα τμήματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ μὲν πρῶτον περιλαμβάνει τὴν σειρὰν 1—1000 καὶ τὰς σχετικὰς μὲ αὐτὴν ἀριθμητικὰς πράξεις, τὸ δὲ δεύτερον περιλαμβάνει τὴν σειρὰν (1001) μέχρι τῶν ἑκατομμυρίων καὶ τὰς ἴδιας πράξεις. Ὅτι ἡ διάταξις αὐτὴ πλεονεκτεῖ πολὺ ἀπὸ τὴν προηγουμένην, ἐννοοῦμεν εὐθύς, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅσα ὀρθὰ παρατηρεῖ ὡς πρὸς τὸ ζήτημα αὐτὸ ὁ Räther (ὅπ. ἀνωτ., μέρ. 2, σελ. 4 κ. ἀκ.), ἤτοι : 1) ὅτι αὐτὴ ἡ φύσις τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ἤτοι τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, ἐπιβάλλει εἰς τὴν διδασκαλίαν νὰ κάμῃ ἕνα σταθμὸν εἰς τὸν ἀριθμὸν 1000, διότι ἡ χιλιὰς εἶναι ἡ ἀμέσως μετὰ τὴν ἑκατοντάδα ἀνωτέρα μονὰς τοῦ συστήματος αὐτοῦ, 2) ὅτι αἱ δυνάμεις τῶν διδασκομένων παίδων ἐπιβάλλουν εἰς τὴν διδασκαλίαν νὰ μὴ μεταδώσῃ μαζὶ τόσον πολλοὺς ἀριθμούς, ἤτοι

999,900, διότι οὔτε καθαρὰ καὶ ἀσύγχυτα θὰ ἠμποροῦν νὰ τοὺς διακρίνουν τὸν ἕνα ἀπὸ τὸν ἄλλον, οὔτε εὔκολα θὰ ἀσκηθοῦν νὰ ἐκτελοῦν ἐπάνω εἰς αὐτοὺς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ὅτι δέ, ἂν ἡ διδασκαλία, ἀποβλέπουσα εἰς τὰς δυνάμεις τῶν μαθητῶν, ἔκρινε καλὸν νὰ μεταδώσῃ εἰς αὐτοὺς τὸ μὲν πρῶτον σχολικὸν ἔτος 20 ἀριθμούς, τὸ δὲ δεύτερον 80, εἰς τὰς ἴδιας δυνάμεις ἀποβλέπουσα ὀρθὸν εἶναι εἰς τὰς ἀρχὰς τοῦ τρίτου σχολικοῦ ἔτους νὰ μὴ μεταδώσῃ εἰς αὐτοὺς διὰ μιᾶς περισσοτέρους ἀπὸ 900 ἀριθμοὺς καὶ 3) ὅτι, ἐνῷ εἰς τὴν σειρὰν 1001—τῶν ἑκατομμυρίων ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις ὑποχωρεῖ σημαντικώτατα εἰς τὴν γραπτήν, εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 κατέχει ἀκόμη πολὺ σπουδαίαν θέσιν, διότι ἀρκετὸν μέρος ἀπὸ τὰ εἰς τὸν καθημερινὸν βίον ἀπὸ μνήμης λυόμενα ἀριθμητικὰ προβλήματα ἀναφέρονται εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς αὐτῆς.

Σχετικῶς τώρα ***μὲ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης τῆς σειρᾶς 1—1000*** ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς. Ὅπως ἡ σειρὰ 21—100, ἔτσι καὶ ἡ σειρὰ 101—1000 ἀποτελεῖ καὶ ἀπὸ τὴν πραγματικὴν καὶ ἀπὸ τὴν μεθοδικὴν ἄποψιν ἕνα ἑνιαῖον ὅλον. Ἑπομένως ἡ διάταξις τῆς ὕλης της πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικάς της γραμμάς, ὅπως ἡ διάταξις τῆς ὕλης τῆς σειρᾶς 21—100, ἤτοι ὡς ἑξῆς: 1) Εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς ὅλην τὴν σειρὰν 101—1000 κατὰ τμήματα, ἤτοι σχηματισμὸς ὅλων τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς κατὰ τμήματα καὶ 2) αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς ὅλην τὴν σειράν.

Ἡ διάταξις ***τῆς εἰσαγωγῆς*** θὰ εἶναι ἡ ἴδια περίπου μὲ τὴν διάταξιν τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὴν σειρὰν 21—100. Καὶ ἐδῶ θὰ ἐπεκταθῇ ἡ γνωστὴ σειρὰ 1—100 ἕως τὸν 1000 κατὰ μονάδας καὶ δεκάδας· καὶ ἐδῶ θὰ ἐξαίρωνται ἰδιαιτέρως εἰς τὴν ἐπέκτασιν αἱ ἑκατοντάδες· καὶ ἐδῶ θὰ ἐπακολουθήσῃ εἰς τὸ τέλος γενικὴ ἐπισκόπησις ὅλης τῆς σειρᾶς κατὰ ἑκατοντάδας, διὰ νὰ ἀποβῇ ἡ σειρὰ εὐσύνοπτη εἰς τοὺς μαθητάς. Αἱ μόναι παρεκκλίσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι σκόπιμον νὰ γίνουν εἰς τὴν διάταξιν τῆς προκειμένης εἰσαγωγῆς, εἶναι αἱ ἑξῆς: Κύριος σταθμὸς εἰς τὴν ἐπέκτασιν τῆς σειρᾶς 1—100 ἀρκεῖ νὰ γίνῃ μόνον εἰς τὴν δευτέρην ἑκατοντάδα, εἰς τὸν ἀριθμὸν 200, κατόπιν ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ προχωρήσουν εὔκολα ἕως τὸν 1000, μὲ σχετικὴν φυσικὰ πάντοτε ἔξαρσιν τῶν ἑκατοντάδων. Ἐξ ἄλλου ὁ σχηματισμὸς τῶν

νέων ἀριθμῶν πρῶτα ἕως τὸν 200 καὶ ἔπειτα ἕως τὸν 1000 δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ μὲ τὸν δεκαδικὸν τρόπον (100+1, 100+2, 100+3, ... 110+1, 110+2, 110+3 κ.τ.λ.), ὅπως ἐπίσης οὔτε μὲ τὴν καθαυτὸ πρόσθεσιν τῆς μονάδος (100 + 1 = 101, 101+1=102, 102+1=103 κ.τ.λ.), ἀλλὰ ἀμέσως μὲ τὴν συντομευμένην πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῆς μονάδος, ἤτοι μὲ τὴν ἀνιοῦσαν καὶ κατιοῦσαν ἀπαρίθμησιν, ἡ ὁποία, ὅσον προχωρεῖ, ἠμπορεῖ νὰ γίνεται ὁλονὲν μὲ μεγαλύτερα βήματα, π.χ. κατὰ πεντάδας, δεκάδας κ.τ.λ. (πρβ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σελ. 114 κ. ἀκ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σελ. 32 κ. ἀκ.). Ἑπομένως ἡ διάταξις τῆς ὕλης τῆς προκειμένης εἰσαγωγῆς πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰς λεπτομερείας της ὡς ἑξῆς:

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 101—200.

Α. Ἀνιοῦσα καὶ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις εἰς τὴν σειρὰν 101—200.

Β. Ἀνιοῦσα καὶ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις εἰς τὴν ἴδιαν σειρὰν κατὰ πεντάδας, δεκάδας, εἰκοσάδας καὶ ἐν γένει μὲ ὑπερπηδήσεις ἀριθμῶν.

Γ. Ἀσκήσεις προπαρασκευαστικαὶ τῆς γραφῆς:

1 ἑκατ. 0 δεκ. 1 μον.=101 μον.	101 μον.=1 ἑκ. 0 δεκ. 1 μον.
1 ἑκατ. 0 δεκ. 2 μον.=102 μον.	102 μον.=1 ἑκ. 0 δεκ. 2 μον.
1 ἑκατ. 1 δεκ. 0 μον.=110 μον.	110 μον.=1 ἑκ. 1 δεκ. 0 μον.
1 ἑκατ. 1 δεκ. 1 μον.=111 μον.	111 μον.=1 ἑκ. 1 δεκ. 1 μον.

Δ. Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν 101—200.

Ε. Ἐφαρμογὴ τῶν ἀριθμῶν 101—200 ἐπάνω εἰς ἀντικείμενα τοῦ καθημερινοῦ βίου καὶ ἰδίως εἰς νομίσματα.

2. Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 201—1000 μὲ τὸν ἴδιον τρόπον—μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι ἡ ἀνιοῦσα καὶ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις θὰ γίνεται ὁλονὲν μὲ μεγαλύτερα βήματα.

3. Ἄνοδος καὶ κάθοδος εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 κατὰ ἑκατοντάδας μὲ σύγχρονην ἐφαρμογὴν εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν καὶ τῶν 4 ἀριθμητικῶν πράξεων, π.χ.

ὅπως ἐπίσης παραλείπομεν, ὅτι μὲ τὴν ἴδιαν διάταξιν δὲν θὰ ἠμποροῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐπισκοποῦν τὸ γρηγορώτερον ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς, διότι ὁ σχηματισμός των δὲν θὰ γίνεται ἐν συνεχείᾳ, ἀλλὰ θὰ διακόπτεται μὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπάνω εἰς τὰς ὁμάδας τῶν ἑκάστοτε σχηματιζομένων.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν 4 ἀριθμητικῶν πράξεων*** εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν πρῶτον μέν, ὅτι ἡ καθεμία των θὰ παρουσιάζεται χωριστά, διότι δὲν συντρέχει κανεὶς μεθοδικὸς λόγος, ὥστε μερικαὶ ἀπὸ αὐτὰς συνολικῶς ἢ κατὰ τμήματα νὰ συνδέωνται στενώτερα ἢ χαλαρώτερα ἀναμεταξύ των, ὅπως συνέβαινε εἰς τὰς προηγουμένας ἀριθμητικὰς σειράς, καὶ δεύτερον ὅτι εἰς κάθε ἀριθμητικὴν πρᾶξιν θὰ ἐπικρατῇ σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμεν προηγουμένως (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 415) ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις τῆς γραπτῆς. Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι, ἐνῷ ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις θὰ περιστρέφεται εἰς τὰς εὐκολωτέρας περιπτώσεις τῆς κάθε πράξεως, ἡ γραπτὴ θὰ γίνεται κυρίως εἰς τὰς δυσκολωτέρας, προσέτι δὲ ὅτι ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις θὰ προηγῆται μὲν εἰς κάθε πρᾶξιν τῆς γραπτῆς, ἀλλὰ καὶ θὰ συνοδεύῃ αὐτὴν καθ' ὅλην τὴν διάρκειάν της.

Εἰς τὰς λεπτομερείας της τώρα ἡ διάταξις τῆς ὕλης τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς 4 ἀριθμητικὰς πράξεις θὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., σ. 39 κ. ἀκ., Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 116 κ. ἀκ.):

Ἡ μὲν ὕλη ***τῆς προσθέσεως*** σκόπιμον εἶναι νὰ διατάσσεται μὲ τὸν ἑξῆς τρόπον:

1. ***Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης.***

Α. Πρόσθεσις μονοψηφίων εἰς τριψηφίους:

α) πρόσθεσις μονοψ. εἰς τριψηφ. ἔχοντας καθαρὰς ἑκατοντάδας (100+4),

β) πρόσθεσις μονοψ. εἰς τριψηφίους μὲ ἑκατοντάδας καὶ δεκάδας (150+4),

γ) πρόσθεσις μονοψ. εἰς τριψηφ. μὲ ἑκατον., δεκάδ. καὶ μονάδα; (1) 152+4, 2) 157+4, 3) 196+4, 4) 198+4),

δ) σχηματισμὸς σειρῶν (π.χ. 912+8=920, 920+8=928 κ. οὔτ. καθ. ἕως τὸν 1000).

Β. Πρόσθεσις διψηφίων εἰς τριψηφίους:

α) πρόσθεσις καθαρῶν δεκάδων εἰς καθαρὰς ἑκατοντάδας (100+40),

β) πρόσθεσις καθαρῶν δεκάδων εἰς ἑκατοντ. καὶ δεκάδας (1) 120+40, 2) 160+40, 3) 170+40),

γ) πρόσθεσις δεκάδων καὶ μονάδων εἰς καθαρὰς ἑκατοντάδας (100+45),

δ) πρόσθεσις δεκάδων καὶ μονάδων εἰς ἑκατοντ. καὶ δεκάδας (1) 150+26, 2) 170+46),

ε) πρόσθεσις καθαρῶν δεκάδων εἰς ἑκατοντ., δεκάδ. καὶ μον. (1) 154+20, 2) 154+60),

ϛ) πρόσθεσις δεκάδων καὶ μονάδων εἰς ἑκατ., δεκ. καὶ μον. (154+28, 2) 154+67),

ζ) σχηματισμὸς σειρῶν (π. χ. 1) 70+70=140, 140+70 =210 κ.τ.λ., 2) 46+46=92, 92+46=138 κ.τ.λ.).

Γ. Εὔκολαι προσθέσεις τριψηφίων (α) 200+100, β) 200+130, γ) 230+100, δ) 300+226, ε) 330+240, 330+246, ϛ) 390+240, 390+246, ζ) 155+155).

2. ***Πρόσθεσις γραπτή.***

Α. Πρόσθεσις ἀριθμῶν ἰσοψηφίων:

α) μονοψηφίων, π.χ.

6
3
2
4

β) διψηφίων, π.χ.

α)	β)	γ)	δ)
40	11	12	68
30	22	25	74
50	12	14	45
20	32	33	36

γ) τριψηφίων π.χ.

α.	β.	γ.	δ.
200	240	250	254
100	230	240	246
400	120	140	142

Β. Πρόσθεσις ἀριθμῶν μὴ ἰσοψηφίων π.χ. 135
28
9
75

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς προσθέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις εἰς τὴν σειρὰν 1—100 καὶ νὰ ἐξακολουθοῦν αἱ προασκήσεις τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως (δεύτερα, τέταρτα, ὄγδοα, μερισμὸς τοῦ μέτρου, τοῦ πήχεως κ.τ.λ. καὶ τροπαὶ τῶν μερῶν (τῶν κλασμάτων) εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως, π.χ. $\frac{1}{4}$ μέτρ.=25 ἑκ., $\frac{2}{8}$ τοῦ πήχ.=2 ῥούπ.).

Ἡ δὲ ὕλη ***τῆς ἀφαιρέσεως*** ὀρθὸν εἶναι νὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

1. ***Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης.***

Α. Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ τριψήφιον (α) 207—7, β) 267—7, γ) 260—7, δ) 263—7, ε) 200—7, ϛ) 203—7, ζ) σχηματισμὸς σειρῶν, π. χ. 207—7=200, 200—7=193 κ. τ. λ. μέχρι τοῦ 150).

Β. Ἀφαίρεσις ἀπὸ τριψήφιον διψηφίου:

α) ἔχοντος καθαρὰς δεκάδας (α) 260—60, β) 290—60, γ) 200—60, δ) 230—60, ε) 267—30, στ) 207—30, ζ) σχηματισμὸς σειρῶν, π.χ. 560—60=500, 500—60 κ.τ.λ.).

β) ἔχοντος δεκάδας καὶ μονάδας (α) 200—64, β) 260—37, γ) 230—37, δ) 267—38, ε) 226—58, ϛ) σχηματισμὸς σειρῶν π.χ. 560—37=523, 523—37 κ.τ.λ.).

Γ. Εὔκολαι ἀφαιρέσεις τριψηφίων (α) 500—200, β) 540—200, γ) 500—240, δ) 540—320, ε) 530—360, ζ) 500—326 κτλ.).

2. ***Ἀφαίρεσις γραπτή.***

Α. Ἀφαίρεσις χωρὶς μετατροπὴν μονάδος ἀνωτέρας τάξεως τοῦ μειωτέου εἰς μονάδας κατωτέρας, π.χ. 561
— 341

Β. Ἀφαίρεσις μὲ μετατροπήν:

α) μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἀπὸ τὴν μειουμένην, π. χ.

560 / — 344   563 / — 344   505 / — 343

β) μονάδος τῆς πρώτης ἢ καὶ τῆς δεύτερης τάξεως πρὸ τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, π.χ.

503 / — 344   1003 / — 344

Κατὰ μὲν τὴν διδασκαλίαν τῆς ἀπὸ μνήμης ἀφαιρέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ὁ πολλαπλασιασμός, ἡ διαίρεσις καὶ ἡ πρόσθεσις εἰς τὴν σειρὰν 1—100 καὶ νὰ ἐξακολουθοῦν αἱ προασκήσεις τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως (τρίτα, ἕκτα, δωδέκατα, μερισμὸς τῆς δωδεκάδος, τοῦ ἔτους κ.τ.λ., τροπαὶ κλασμάτων τῆς δωδεκάδος καὶ τοῦ ἔτους εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως, τροπαὶ ἀκεραίων εἰς νόθα κλάσματα καὶ τὸ ἀντίθετον π.χ. 1 ἀκέρ.= δύο δεύτερα, τρία τρίτα κ.τ.λ., τρία τρίτα=1 ἀκέρ. κ.τ.λ.), κατὰ δὲ τὴν διδασκαλίαν τῆς γραπτῆς ἀφαιρέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ ἀπὸ μνήμης πρόσθεσις, καθὼς καὶ ἡ γραπτὴ (πολλῶν καὶ μὴ ἰσοψηφίων προσθετέων) εἰς τὴν σειρὰν 1—1000.

Ἡ ὕλη τώρα ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*** καλὸν εἶναι νὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

1. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης.***

Α) Πολλαπλασιασμὸς × τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 διψηφίων ἀριθμῶν:

α) ἐχόντων καθαρὰς δεκάδας (10, 20, 30 κ.τ.λ.),

β) τῶν ἀριθμῶν 12, 15, 24 καὶ 25,

γ) τῶν ἄλλων διψηφίων ἀριθμῶν ἀπὸ τὸν 11 ἕως τὸν 19,

δ) τῶν ὑπολοίπων διψηφίων ἀριθμῶν ἕως τὸν 99.

Β) Πολλαπλασιασμὸς διψηφίου μὲ διψήφιον:

α) ἔχοντα καθαρὰς δεκάδας,

β) ἔχοντα μονάδας καὶ δεκάδας (ὁ ὁποῖος ἠμπορεῖ καὶ νὰ παραλειφθῇ).

Γ) Εὔκολοι πολλαπλασιασμοὶ τριψηφίων μὲ μονοψηφίους (α 200×3, β) 230×3, γ) 230×4, δ) 215×3 κ.τ.λ.).

2 ***Πολλαπλασιασμὸς γραπτός.***

Α. Πολλαπλασιασμὸς μὲ μονοψήφιον:

α. 143 / × 2   β. 124 / 3

Β. Πολλαπλασιασμὸς μὲ διψήφιον ἔχοντα:

α) καθαρὰς δεκάδας,

β) δεκάδας καὶ μονάδας.

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ πρόσθεσις περισσοτέρων ἀπὸ 2 προσθετέων εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 καὶ νὰ ἐξακολουθοῦν αἱ κλασματικαὶ προασκήσεις (πέμπτα, δέκατα, ἑκατοστά, τροπαὶ κλασμάτων τῆς δραχμῆς εἰς λεπτά).

Ἡ ὕλη τέλος ***τῆς διαιρέσεως*** ὀρθὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. ***Διαίρεσις ἀπὸ μνήμης.***

Α. Τέλειαι διαιρέσεις τριψηφίων μὲ μονοψηφίους, δίδουσαι πηλίκον διψήφιον:

α) διαίρεσις τριψηφίου, ἔχοντος καθαρὰς ἑκατοντάδας ἢ ἑκατοντάδας καὶ δεκάδας, μὲ μονοψήφιον, δίδουσα πηλίκον καθαρὰς δεκάδας (120 : 2),

β) διαίρεσις τριψηφίου μὲ μονοψήφιον, δίδουσα πηλίκον τοὺς ἀριθμοὺς 12, 15, 24, 25 (108 : 9),

γ) διαίρεσις τριψηφίου μὲ μονοψήφιον, δίδουσα πηλίκον ἄλλον διψήφιον ἀριθμὸν (145 : 5).

Β. Τέλειαιδιαιρέσεις τριψηφίων μὲ μονοψηφίους, δίδουσαι πηλίκον τριψήφιον ἀριθμόν, ἔχοντα καθαρὰς ἑκατοντάδας ἢ ἑκατοντάδας καὶ δεκάδας (α) 800 : 2, β) 900 : 2, γ) 920 : 2).

Γ. Διαιρέσεις τριψηφίων μὲ μονοψηφίους, δίδουσαι πηλίκον τριψήφιον ἀριθμόν, ἔχοντα καὶ τὰ 3 ψηφία σημαντικά:

α) χωρὶς ὑπόλοιπον (274 : 2),

β) μὲ ὑπόλοιπον (500 : 3).

Δ. Τέλειαι διαιρέσεις τριψηφίων μὲ εὐκόλους διψηφίους (π.χ. τοὺς 10, 20, 30 κ.τ.λ.) καὶ τριψηφίους (π.χ. τὸν 100).

2. ***Διαίρεσις γραπτή.***

Α. Διαίρεσις τριψηφίου μὲ μονοψήφιον:

α) χωρὶς τροπὴν μονάδων ἀνωτέρας τάξεως τοῦ διαιρετέου εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως (1) 644 : 2, 2) 604 : 2),

β) μὲ τροπὴν (1) 554 : 2, 2) 154 : 2).

Β. Διαιρέσεις τριψηφίου μὲ διψήφιον, ὁ ὁποῖος:

α) ἔχει καθαρὰς δεκάδας (644 : 30),

β) εἶναι μεγαλυτερος ἢ μικρότερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν καθαρῶν δεκάδων κατὰ 1 (644 : 31, 644 : 29),

γ) ἔχει ὁποιασδήποτε δεκάδας καὶ μονάδας.

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς ἀπὸ μνήμης διαιρέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ ἀπὸ μνήμης ἀφαίρεσις καὶ ὁ ἀπὸ μνήμης πολλαπλασιασμὸς εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 καὶ νὰ ἐξακολουθοῦν αἱ κλασματικαὶ προασκήσεις (εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς μικτοὺς ἀριθμούς), κατὰ δὲ τὴν διδασκαλίαν τῆς γραπτῆς διαιρέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ ἀπὸ μνήμης διαίρεσις καὶ ἡ ἀπὸ μνήμης ἀφαίρεσις εἰς τὴν σειρὰν 1—1000.

Σχετικῶς τώρα ***μὲ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης τῆς σειρᾶς 1—τῶν ἑκατομμυρίων*** ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἀκόλουθα. Ἡ διάταξις αὐτὴ σύμφωνα μὲ τὴν γνώμην ὅλων σχεδὸν τῶν Μεθοδικῶν τῆς Ἀριθμητικῆς πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς: 1) Εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς ὅλην τὴν σειρὰν καὶ 2) αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς τὴν σειράν.

Ἡ ***εἰσαγωγὴ*** τῶν μαθητῶν εἰς τὴν σειράν, ἐπειδὴ τὸ ποσὸν τῶν ἀριθμῶν της εἶναι μέγιστον, πρέπει φυσικὰ νὰ γίνῃ τμηματικά. Τὰ τμήματα τὰ δίδουν κατὰ τὴν ὁμόφωνον γνώμην τῶν Μεθοδικῶν οἱ ἀριθμοὶ 10000 καὶ 100000, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ φυσικοὶ σταθμοὶ τῆς σειρᾶς. Δι' αὐτὸ ἡ εἰσαγωγὴ θὰ διδαχθῇ ὡς ἑξῆς: 1) Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1001—10000, ἤτοι τοὺς τετραψηφίους, 2) εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 10001—100000, ἤτοι τοὺς πενταψηφίους καὶ 3) εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 100001—τῶν ἑκατομμυρίων, ἤτοι τοὺς ἑξαψηφίους καὶ ἑπταψηφίους. Εἰς τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ τμήματα αὐτὰ θὰ γίνωνται διαδοχικὰ δύο ἐργασίαι, ἤτοι α) ὁ (προφορικὸς) σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς καὶ β) ἡ γραφή των. Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν τῆς κάθε σειρᾶς δὲν ἠμπορεῖ φυσικὰ νὰ γίνεται πλέον μὲ ἀπαρίθμησιν κατὰ μονάδας, διότι αὐτὸ καὶ ἀναγκαῖον δὲν εἶναι καὶ χρόνον πολὺν θὰ ἀπαιτῇ. Ἡ ἀπαρίθμησις κατὰ μονάδας θὰ γίνεται μόνον εἰς τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς (π. χ. εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1001—1010 τῆς σειρᾶς1—10000), κατόπιν δὲ ἡ ἀπαρίθμησις θὰ προχωρῇ μὲ ὁλονὲν μεγαλύτερα βήματα, ἤτοι θὰ γίνεται κατὰ δεκάδας (π. χ. εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1010—1100), πεντηκοντάδας (1100—2000) καὶ ἑκατοντάδας(2000—10000).

Εἰς τὰς λεπτομερείας της τώρα ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν σειρὰν 1—τῶν ἑκατομμυρίων σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς (ἴδ. ἰδίως Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σ. 105 κ. ἀκ.):

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1001—10000.

Α. Ἀνιοῦσα καὶ κατιοῦσα ἀπαρίθμησις εἰς τὴν σειρὰν μὲ ὁλονὲν μεγαλύτερα βήματα.

Β. Ἄνοδος καὶ κάθοδος εἰς τὴν σειρὰν κατὰ χιλιάδας μὲ σύγχρονην ἐφαρμογὴν εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν καὶ τῶν 4 θεμελιωδῶν πράξεων, π.χ.:

1000+1000=2000	10000−1000=9000	1000×1 =1000	1000 εἰς τὸ 1000=1
2000+1000=3000	9000−1000=8000	1000×2 =2000	1000 εἰς τὸ 2000=2
....	....	....	....
....	....	....	....
9000+1000=10000	1000−1000=0	1000×10=10000	1000 εἰς τὸ 10000=10

Γ. Ἐφαρμογὴ τῶν νέων ἀριθμῶν ἐπάνω εἰς γνωστὰ μέτρα καὶ σταθμὰ (π. χ. 1 χμ.=1000 μ., 2 χμ.=2000 μ., 10 χμ.= 10000 μ.).

Δ. Ἀσκήσεις προπαρασκευαστικαὶ τῆς γραφῆς (π.χ. 1 χιλ.= 10 ἑκατ., 1 χιλ.+1 ἑκ.=11 ἑκατ., 1 χιλ.+2 ἑκ.=12 ἑκατ. . . . 1 χιλ.+10 ἑκατ.=20 ἑκατ. κ.τ.λ.—11 ἑκατ.=1 χιλ.+1 ἑκ., 12 ἑκ.=1 χιλ.+2 ἑκ. κ.τ.λ.).

Ε. Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν 1001—10000:

α) Θέσις καὶ γραφὴ τῆς χιλιάδος, ἐξαγομένη ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων.

β) Ἀνάγνωσις τετραψηφίων ἀριθμῶν.

γ) Ἀνάλυσις τετραψηφίων ἀριθμῶν εἰς χιλ., ἑκατ., δεκ. καὶ μονάδ., ἔπειτα εἰς χιλ. καὶ μονάδ.. εἰς ἑκατοντ. καὶ μονάδ. καὶ τὸ ἀντίθετον σύνθεσις χιλ., ἑκατοντ., δεκάδ. καὶ μονάδ. εἰς μονάδας κ. τ. λ.

δ) Γραφὴ μὲ ὑπαγόρευσιν τετραψηφίων καὶ ὀλιγοψηφίων ἀριθμῶν κατὰ τὴν σειρὰν τῆς εὐκολίας (π.χ. 1) 2000, 2400, 2480, 2080, 2008, 2) 3456, 4356, 3465, 3645, 3546, 3) 5, 50, 500, 5000, 4) 7, 17, 317, 2317 κ.τ.λ.).

2. Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 10001—100000 μὲ τὸν ἴδιον τρόπον.

3. Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 100001—τῶν ἑκατομμ. μὲ τὸν ἴδιον τρόπον.

4. Ἐπισκόπησις ὅλης τῆς σειρᾶς 1—τῶν ἑκατομμυρίων:

Α. Γρήγορη ἀπαγγελία τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεω ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ τὸ ἀντίθετον (π. χ. Μ. Δ. Ἑ. Χ. κ.τ.λ.).

Β. Τροπὴ 10 μονάδων κάθε τάξεως εἰς μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας (10 Μ=1 Δ, 10 Δ=1 Ε, 10 Ε=1 Χ κ.τ.λ.).

Γ. Τροπὴ μονάδος ἀνωτέρας τάξεως εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας (1 Ἑκατομύρ.=10 ΕΧ, 1 ΕΧ=10 ΔΧ κ.τ.λ.).

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν 4 ἀριθμητικῶν πράξεων*** παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὴν καθεμίαν ἀπὸ αὐτὰς θὰ προηγῆται ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις, περιοριζομένη ὅμως εἰς στρογγύλους καὶ εὐμνημονεύτους ἀριθμούς, θὰ ἐπακολουθῇ δὲ ἡ γραπτή. Εἰς τὰς λεπτομερείας τώρα τῆς διατάξεώς των ἀκολουθοῦμεν τὸν Räther (ὅπ. ἀν., σελ. 109 κ. ἀκ.), ὁ ὁποῖος ἔχει διατυπώσει σχετικὰ τὸ περισσότερον ἐπιμελημένον σχέδιον.

Σύμφωνα μὲ τὸ σχέδιον αὐτὸ ἡ μὲν ὕλη ***τῆς προσθέσεως*** σκόπιμον εἶναι νὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

1. ***Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης.***

Α. Προσθέσεις, εἰς τὰς ὁποίας γίνεται μετάβασις ἀπὸ τὴν πρώτην εἰς τὴν δεύτερην χιλιάδα:

α) Πρόσθεσις τριψηφίου καὶ μονοψηφίου (997+8).

β) Πρόσθεσις τριψηφίου, ἔχοντος ἑκατοντάδας καὶ δεκάδας, καὶ διψηφίου (1) 980+60, 2) 980+63).

γ) Πρόσθεσις δύο τριψηφίων:

1) πρόσθεσις τριψηφίων, ἐχόντων καθαρὰς ἑκατοντάδας (800+700),

2) πρόσθεσις τριψηφίων, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ ἕνας ἔχει καθαρὰς ἑκατοντάδας (800+740, 740+800, 745+800),

3) πρόσθεσις τριψηφίων, ἐχόντων ἑκατοντάδας καὶ δεκάδας (740+650, 740+670).

Β. Προσθέσεις μεγαλυτέρων ἀπὸ τὸν 2000 ἀριθμῶν:

α) Πρόσθεσις 2 τετραψηφίων, ἐχόντων καθαρὰς χιλιάδας (5000+6000).

β) Πρόσθεσις 2 τετραψηφίων, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ ἕνας ἔχει καθαρὰς χιλιάδας (8000+4500, 4500+8000).

γ) Πρόσθεσις 2 τετραψηφίων, ἐχόντων χιλιάδας καὶ ἑκατοντάδας (8200+4500, 8200+4900).

δ) Πρόσθεσις τετραψηφίου, ἔχοντος χιλιάδας καὶ ἑκατοντάδας, καὶ τριψηφίου ἔχοντος ἑκατ. καὶ δεκ. ἢ καὶ μονάδας (8600+630, 8600+635).

ε) Πρόσθεσις τετραψηφίου, ἔχοντος ὅλα τὰ ψηφία σημαντικά, καὶ τριψηφίου, ἔχοντος καθαρὰς ἑκατοντάδας (8888+600) κ. οὕτ. καθεξῆς.

ϛ) Σχηματισμὸς σειρῶν (π.χ. 920+9=929, 929+9=938 ... μέχρι τοῦ 1100, 1200+40=1240, 1240+40=1280... μέχρι τοῦ 2000, 1000+600=1600, 1600+600=2200... μέχρι τοῦ 10000, 9000+7000=16000, 16000+7000=23000 . . . μέχρι τοῦ 100.000 κ. οὕτ. καθ.).

2. ***Πρόσθεσις γραπτή.***

Α. Πρόσθεσις ἰσοψηφίων ἀριθμῶν (τριψηφίων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ὑπερβαίνει τὸν 1000, τετραψηφίων κ.τ.λ.).

Β. Πρόσθεσις μὴ ἰσοψηφίων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ὑπερβαίνει τὸν 1000.

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς προσθέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ ἀπὸ μνήμης ἀφαίρεσις καὶ διαίρεσις καὶ ὁ ἀπὸ μνήμης πολλαπλασιασμὸς εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 καὶ νὰ ἐξακολουθοῦν αἱ κλασματικαὶ προασκήσεις (εὔκολαι προσθέσεις ὁμωνύμων κλασμάτων, μικτῶν καὶ κλασμάτων ὁμωνύμων μὲ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ).

Ἡ δὲ διάταξις τῆς ὕλης ***τῆς ἀφαιρέσεως*** ὀρθὸν εἶναι νὰ γίνεται μὲ τὸν ἀκόλουθον τρόπον:

1. ***Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης.***

Α. Ἀφαίρεσις εἰς τὴν σειρὰν 1—2000.

α) Κατάβασις ἀπὸ τὴν δευτέρην χιλιάδα εἰς τὴν πρώτην:

1) Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ τετραψήφιον (1003—7).

2) Ἀφαίρεσις διψηφίου ἀπὸ τετραψήφιον (1010—30).

3) Ἀφαίρεσις τριψηφίου ἀπὸ τετραψήφιον (1200—700).

β) Ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 2000:

1) ἀριθμῶν ἐχόντων καθαρὰς ἑκατοντάδας (2000—400),

2) ἀριθμῶν ἐχόντων ἑκατ. καὶ δεκάδας (2000—460),

3) ἀριθμῶν ἐχόντων καθαρὰς δεκάδας (2000—60),

4) ἀριθμῶν ἐχόντων δεκάδ. καὶ μονάδας (2000—64),

5) ἀριθμῶν ἐχόντων μονάδας (2000—2),

6) ἀριθμῶν ἐχόντων ἑκατ., δεκάδ. καὶ μονάδ. (2000—467).

Β. Ἀφαίρεσις εἰς τὴν σειρὰν 1—10000.

α) Ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 10.000 (1) 10000—5000, 2) 10000—5600, 3) 10000—600, 4) 10000—630, 5) 10000—30, 6) 10000—38, 7) 10000—3.

β) Ἀφαίρεσις ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1) 9000, 8000, ... 3000, 2) 9500 8500, ... 3500 κ. οὕτ. καθ.).

Γ. Ἀφαίρεσις εἰς τὴν σειρὰν μέχρι τῶν ἑκατομμυρίων μὲ τὸν σχηματισμὸν σειρῶν (π.χ. 100000—7000=93000, 93000—7000=86000, ... μέχρι τοῦ 2000—45000— 1500=43500, 43500—1500 42000 κ.τ.λ. μέχρι τοῦ 0).

2. ***Ἀφαίρεσις γραπτή,*** διατασσομένη καθὼς εἰς τὴν σειρὰν 1—1000.

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς ἀφαιρέσεως καλὸν εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ πρόσθεσις εἰς τὴν ἴδιαν σειράν, καθὼς καὶ ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς 1—100 εἰς τοὺς παράγοντάς των, καὶ νὰ ἐξακολουθοῦν αἱ κλασματικαὶ προασκήσεις (εὔκολαι προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις ὁμωνύμων κλασμάτων, καθὼς καὶ ἀφαιρέσεις κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιον).

Ἡ ὕλη τώρα ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*** σκόπιμον εἶναι νὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

1. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης.***

Α. Πολλαπλασιασμὸς μὲ μονοψήφιον πολλαπλασιαστέου:

α) ἔχοντος καθαρὰς ἑκατοντάδας (π.χ. 200×6,7,8,9—300×4, 5, ... 9 κ.τ.λ.),

β) ἔχοντος καθαρὰς χιλιάδας (π.χ. 2000×2,3,... 9—3000×2, 3 ... 9 κ.τ.λ.),

γ) ἔχοντος ἑκατοντάδας καὶ δεκάδας π.χ.(210×6, 220×6 κτλ.),

δ) ἔχοντος χιλιάδας καὶ ἑκατοντάδας (π.χ. 2100×2,3 κ.τ.λ.).

Β. Πολλαπλασιασμὸς μὲ διψήφιον ἔχοντα καθαρὰς δεκάδας πολλαπλασιαστέου:

α) ἔχοντος καθαρὰς δεκάδας (π.χ. 20×60, 70 κ.τ.λ., 30×40, 50 κ. τ. λ.),

β) ἔχοντος καθαρὰς ἑκατοντάδας (π.χ. 200×10, 20, 30 κτλ.), γ) ἔχοντος δεκάδας καὶ μονάδας (21×60, 22×60 κ.τ.λ.).

Γ. Πολλαπλασιασμὸς μὲ τριψήφιον ἔχοντα καθαρὰς ἑκατοντάδας πολλαπλασιαστέου :

α) μονοψηφίου (π.χ. 7×400),

β) ἔχοντος καθαρὰς δεκάδας (π.χ. 70×400),

γ) ἔχοντος δεκάδας καὶ μονάδας (π.χ. 72×400).

Δ. Πολλαπλασιασμὸς μὲ τετραψήφιον ἔχοντα καθαρὰς χιλιάδας πολλαπλασιαστέου :

α) μονοψηφίου (π.χ. 2×4000),

β) ἔχοντος καθαρὰς δεκάδας (π.χ. 20×4000),

γ) ἔχοντος δεκάδας καὶ μονάδας (π.χ. 25×4000).

2. ***Πολλαπλασιασμὸς γραπτός.***

Α. Πολλαπλασιασμὸς τριψηφίου καὶ ἐν γένει πολυψηφίου μὲ μονοψήφιον ἢ διψήφιον.

Β. Πολλαπλασιασμὸς τριψηφίου καὶ ἐν γένει πολυψηφίου μὲ ὑπερδιψήφιον καὶ εἰδικώτερα :

α) πολλαπλασιαστέου ἔχοντος ὅλα τὰ ψηφία σημαντικὰ μὲ πολλαπλασιαστὴν ἔχοντα τὸ πρῶτον σημαντικὸν καὶ 2 ἢ 3 τελικὰ μηδενικὰ (π.χ. 369×400, 369×4000),

β) ὁμοίου πολλαπλασιαστέου μὲ πολλαπλασιαστὴν ἔχοντα 3 σημαντικὰ ψηφία (369×125),

γ) ὁμοίου πολλαπλασιαστέου μὲ πολλαπλασιαστὴν ἔχοντα τὰ 2 πρῶτα ψηφία σημαντικὰ καὶ ἕνα ἢ δύο τελικὰ μηδενικὰ (π. χ. 369×740, 369×7400),

δ) πολλαπλασιαστέου ἔχοντος δύο τελικὰ μηδενικὰ μὲ πολλαπλασιαστὴν ἔχοντα ἕνα ἢ δύο τελικὰ μηδενικὰ (π. χ. 3600×970, 3600×9700),

ε) πολλαπλασιαστέου ἔχοντος μόνον σημαντικὰ ψηφία μὲ πολλαπλασιαστὴν ἔχοντα μεταξὺ σημαντικῶν ψηφίων μηδενικὰ (π. χ. 369×205, 3691×2005).

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ γραπτὴ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις εἰς τὴν ἴδιαν σειράν, καθὼς καὶ ἡ ἀνάλυσις ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς 1—100 εἰς τοὺς παράγοντάς των, καὶ θὰ ἐξακολουθοῦν αἱ κλασματικαὶ προασκήσεις (εὔκολοι πολλαπλασιασμοὶ κλάσματος μὲ ἀκέραιον).

Τέλος ἡ ὕλη ***τῆς διαιρέσεως*** σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

1. ***Διαίρεσις ἀπὸ μνήμης.***

Α. Διαίρεσις πολυψηφίου μὲ μονοψήφιον :

α) διαιροῦντα τελείως τὰς ἑκατοντάδας ἢ χιλιάδας τοῦ διαιρετέου (π.χ. 3200 : 8, 32000 : 8 κ.τ.λ.),

β) μὴ διαιροῦντα τελείως τὰς ἑκατ. ἢ χιλ. τοῦ διαιρετέου (π.χ. 1300 : 4, 13000 : 4 κ.τ.λ.).

Β. Διαίρεσις πολυψηφίου μὲ διψήφιον ἢ πολυψήφιον :

α) τὸν 10, 100, 1000, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τὸν διαιρετέον 1) χωρὶς ὑπόλοιπον (π. χ. 1470 : 10, 4300 : 100 κ. τ. λ.) καὶ 2) μὲ ὑπόλοιπον (1473 : 10, 4310 : 100 κ.τ.λ.),

β) ἔχοντα καθαρὰς δεκάδας (π.χ. 1200 : 40 κ.τ.λ.).

2. ***Διαίρεσις γραπτή.***

Α. Διαίρεσις πολυψηφίου μὲ μονοψήφιον.

Β. Διαίρεσις πολυψηφίου μὲ πολυψήφιον, ἔχοντα τὸ πρῶτον μόνον ψηφίον σημαντικὸν (4670 : 40, 600, 2000).

Γ. Διαίρεσις πολυψηφίου μὲ διψήφιον, ὁ ὁποῖος ἔχει καὶ τὰ δύο του ψηφία σημαντικὰ καὶ α) προσεγγίζει εἰς ἀριθμὸν ἔχοντα καθαρὰς δεκάδας (π. χ. 21, 31, 41 κ.τ.λ., 22, 32, 42 κ.τ.λ., 29, 39, 49 κ.τ.λ., 28, 38, 48 κ. τ. λ.), β) δὲν προσεγγίζει εἰς τέτοιον ἀριθμὸν (π.χ. 24, 25, 26, 27).

Δ. Διαίρεσις πολυψηφίου μὲ τριψήφιον :

α) ἔχοντα δύο σημαντικὰ ψηφία (π.χ. 203, 230),

β) ἔχοντα καὶ τὰ τρία ψηφία σημαντικὰ (π.χ. 243).

Ε. Διαίρεσις πολυψηφίου μὲ τετραψήφιον.

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς διαιρέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται ὁ ἀπὸ μνήμης καὶ ὁ γραπτὸς πολλαπλασιασμὸς εἰς τὴν ἴδιαν σειρὰν καὶ νὰ ἐξακολουθοῦν αἱ κλασματικαὶ προασκήσεις (εὔκολοι πολλαπλασιασμοὶ καὶ διαιρέσεις κλάσματος μὲ ἀκέραιον).

δ. Ἡ διάταξις τῆς ὕλης τοῦ τετάρτου σχολικοῦ ἔτους.

Ἂν ἐνθυμηθοῦμεν, ὅτι τὴν ὕλην τοῦ ἔτους αὐτοῦ ἀποτελοῦν οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ καὶ τὰ σύνθετα προβλήματα (τῆς μέσης τιμῆς καὶ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν), ἀκόμη δὲ ὅτι ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς οἱ μὴ ἔχοντες δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν δὲν παρουσιάζουν ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως τίποτε τὸ οὐσιωδῶς νέον διὰ τοὺς μαθητὰς ἐν συγκρίσει μὲ τοὺς ἁπλοῦς ἀκεραίους, ἐνῷ ἀπεναντίας οἱ ἔχοντες δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν παρουσιάζουν τὸ οὐσιῶδες νέον, ὅτι μὲ αὐτοὺς θὰ εἰσαχθοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὴν ἀρίθμησίν των, ἐννοοῦμεν ἀμέσως, ὅτι ἡ διάταξις τῆς ὕλης τοῦ ἔτους αὐτοῦ πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς :

1. Συμμιγεῖς μὴ ἔχοντες δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν.
2. Συμμιγεῖς μὲ δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.
3. Σύνθετα προβλήματα :
   α) τῆς μέσης τιμῆς,
   β) τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Διὰ τὸ περίεργον μόνον τοῦ πράγματος ἀναφέρομεν, ὅτι ὁ Büttner (ὅπ. ἀν. σελ. 166 κ. ἀκ.), μολονότι ἐπ᾽ εὐκαιρίᾳ τῆς διδασκαλίας τῶν συμμιγῶν μὲ δεκαδ. ὑποδιαίρεσιν διδάσκει καὶ τὴν γραφὴν καὶ ἀπαγγελίαν των ὡς δεκαδικῶν, ἐν τούτοις προτάσσει τὴν διδασκαλίαν τῶν συμμιγῶν αὐτῶν ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῶν πολὺ ἁπλουστέρων των συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν*** παρατηροῦμεν, ὅτι μερικοὶ Μεθοδικοί, λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν δύο πράγματα, 1) ὅτι τὴν βάσιν κάθε διατάξεως πρέπει νὰ ἀποτελοῦν τὰ νέα στοιχεῖα τῆς διατασσομένης ὕλης, τὸ δὲ νέον εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν συμμιγῶν αὐτῶν δὲν ἀποτελοῦν κατὰ τὴν γνώμην των αἱ 4 ἀριθμητικαὶ πράξεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθητάς, ἀλλὰ ἡ ἐφαρμογή των εἰς τὰ διάφορα εἴδη τῶν συμμιγῶν αὐτῶν (ἤτοι εἰς τὰς δωδεκάδας καὶ τὰ κομμάτια, εἰς τοὺς πήχεις καὶ τὰ ῥούπια, τοὺς στατῆρας καὶ τὰς ὀκάδας κ.τ.λ.) καὶ 2) ὅτι, διὰ νὰ γνωρίσουν οἱ μαθηταὶ τὸ κάθε εἶδος τῶν συμμιγῶν αὐτῶν, πρέπει νὰ ἐπιμείνουν εἰς αὐτὸ κάμποσον χρόνον, διατάσσουν τὴν προκειμένην ὕλην σύμφωνα μὲ τὰ εἴδη τῶν συμμιγῶν, ἤτοι εἰς τὴν ἀρχὴν διδάσκουν τὰς τροπὰς εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως καὶ τὰς 4 ἀριθμητικὰς πράξεις μόνον εἰς τὰς δωδεκάδας καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις των, ἔπειτα διδάσκουν τὰ ἴδια πράγματα εἰς τοὺς πήχεις καὶ τὰ ῥούπια κ. οὕτ. καθ. Ἐναντίον τῆς διατάξεως αὐτῆς παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σελ. 162 κ. ἀκ.) ὀρθότατα τὰ ἀκόλουθα. Ἂν τὸ νέον εἰς τὰ προβλήματα τῶν συμμιγῶν αὐτῶν δὲν ἔγκειται πράγματι εἰς τὰς 4 ἀριθμητικὰς πράξεις, θεωρουμένας ξεχωριστά, ἐν τούτοις ἔγκειται εἰς τὴν σύνδεσιν τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ αὐτὰς μὲ τὴν τροπὴν εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως, ἤτοι μὲ μίαν ἄλλην ἀριθμητικὴν πρᾶξιν, ἔγκειται δηλ. εἰς τοῦτο, ὅτι τὰ προβλήματα τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς 4 πράξεις εἶναι σύνθετα. Ἔτσι π.χ. ἡ πρόσθεσις, ἐπειδὴ ἀπαιτεῖ τὴς τροπὴν μονάδων κατωτέρων τάξεων εἰς μονάδας ἀνωτέρων, συνδέεται μὲ τὴν διαίρεσιν καὶ ἡ διαίρεσις, ἐπειδὴ ἀπαιτεῖ τὴν τροπὴν μονάδων ἀνωτέρων τάξεων εἰς μονάδας κατωτέρων, συνδέεται μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν κ.τ.λ. Ὁ τρόπος τώρα, μὲ τὸν ὁποῖον συνδέεται εἰς τὰ προβλήματα μιᾶς πράξεως ἡ πρᾶξις αὐτὴ μὲ μίαν ἄλλην, εἶναι ὁ ἴδιος εἰς ὅλα τὰ εἴδη τῶν προκειμένων συμμιγῶν. Ἔτσι π. χ. ἡ πρόσθεσις εἰς ἕνα εἶδος ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς αὐτοὺς εἶναι ὁμοία μὲ τὴν πρόσθεσιν εἰς τὰ ἄλλα εἴδη, ἐν πάσῃ δὲ περιπτώσει ὑπάρχει μεταξὺ τῶν προσθέσεων αὐτῶν πολὺ μεγαλύτερη ὁμοιότης ἀπὸ τὴν ὑπάρχουσαν μεταξὺ τῆς προσθέσεως εἰς ἕνα εἶδος καὶ τῶν ἄλλων πράξεων εἰς τὸ ἴδιον εἶδος. Ἂν ἐξ ἄλλου εἶναι ἀληθές, ὅτι, διὰ νὰ γνωρίσουν οἱ μαθηταὶ ἕνα εἶδος συμμιγῶν, πρέπει νὰ ἐπιμείνουν εἰς αὐτὸ κάμποσον χρόνον, ἐν τούτοις εἶναι φανερόν, ὅτι δι᾽ αὐτὸ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ διατάσσεται ἡ προκειμένη ὕλη σύμφωνα μὲ τὰ εἴδη τῶν συμμιγῶν, ἀλλὰ ἀρκεῖ καὶ εἰς τὰς τροπὰς εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως καὶ εἰς τὴν καθεμίαν ἀπὸ τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις νὰ μὴ παρουσιάζωνται τὰ προβλήματα τῶν διαφόρων εἰδῶν τῶν συμμιγῶν ἀνακατωμένα, ἀλλὰ διαταγμένα εἰς ὁμάδας, εἰς τρόπον ὥστε εἰς τὴν ὁμάδα τῶν προβλημάτων ἑνὸς εἴδους νὰ ἐπακολουθῇ ἡ ὁμὰς τῶν προβλημάτων ἄλλου εἴδους κ. οὕτ. καθ.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι ἡ διάταξις τῆς ὕλης τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 163 καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 167 κ. ἀκ.):

1. Τροπαὶ εἰς μονάδας ἄλλης (κατωτέρας ἢ ἀνωτέρας) τάξεως:
α) εἰς τὰς δωδεκάδας καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις τῆς δωδεκάδος,
β) εἰς τοὺς πήχεις καὶ τὰ ῥούπια,
γ) εἰς τοὺς στατῆρας καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ στατῆρος καὶ
δ) εἰς τὰ μέτρα τοῦ χρόνου.
2. Ἡ πρόσθεσις εἰς τὰ ἴδια εἴδη τῶν συμμιγῶν.
3. Ἡ ἀφαίρεσις ὁμοίως.
4. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ὁμοίως.
5. Ἡ διαίρεσις ὁμοίως.

Ἡ διάταξις τώρα τῆς ὕλης τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς πράξεις αὐτάς, εἰς τὰς ὁποίας θὰ προηγῆται μὲν ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις, θὰ ἐπακολουθῇ δὲ ἡ γραπτή, σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς (ἴδ. καὶ Büttner, ὅπ. ἀν., σ. 103 κ. ἀκ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., σ. 164 κ. ἀκ.).

Αἱ μὲν **τροπαὶ** εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως ἐπάνω εἰς τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ μνημονευθέντα εἴδη τῶν συμμιγῶν καλὸν εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὰς τροπάς. Ὑπενθύμισις τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ ἐξεταζομένου εἴδους τῶν συμμιγῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι γνωσταὶ ἀπὸ τὴν μέχρι τοῦδε διδασκαλίαν (π. χ. προκειμένου περὶ τῶν μονάδων τῆς ἀπαριθμήσεως ὑπενθύμισις τῆς δωδεκάδος, τοῦ ἐξαριοῦ, τοῦ ζευγαριοῦ καὶ τοῦ κομματιοῦ· 1 δωδ.=2 ἑξάρ., 6 ζευγ., 12 κομμάτια κ.τ.λ.).

2. Τροπαὶ εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως:
Α) μονάδων ἀνωτέρας τάξεως (π.χ. 5 δωδεκ. εἰς κομμάτια): α) ἀπὸ μνήμης καὶ β) ἐγγράφως,
Β) μονάδων ἀνωτέρας τάξεως καὶ μονάδων τῆς προκειμένης κατωτέρας τάξεως (π.χ. 5 δωδεκ. καὶ 4 κομματ. εἰς κομμάτια): α) ἀπὸ μνήμης καὶ β) ἐγγράφως,
Γ) μονάδων ἀνωτέρας τάξεως παρουσιαζομένων μὲ κλασματικὴν μορφὴν (π.χ. τοῦ $\frac{1}{2}$, τοῦ $\frac{1}{4}$ κ. τ. λ. τῆς δωδεκάδος εἰς κομμάτια): α) ἀπὸ μνήμης καὶ β) ἐγγράφως.

3. Τροπαὶ μονάδων κατωτέρας τάξεως εἰς μονάδας ἀνωτέρας:
Α) τέλειαι (π.χ. 36 κομματιῶν εἰς δωδεκάδας): α) ἀπὸ μνήμης καὶ β) ἐγγράφως,
Β) ἀτελεῖς (π. χ. 39 κομματ. εἰς δωδεκ.): α) ἀπὸ μνήμης καὶ β) ἐγγράφως.

Ἡ δὲ ὕλη ***τῆς προσθέσεως*** εἰς τὰ ἴδια εἴδη τῶν συμμιγῶν σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης:
Α) δύο προσθετέων, ἐχόντων μονάδας μιᾶς μόνον καὶ τῆς αὐτῆς τάξεως (ἐκτὸς φυσικὰ τῆς ἀνωτάτης), π χ. 5 κομ.+9 κομμ.,
Β) δύο προσθετέων, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ ἕνας ἔχει μονάδας δύο τάξεων (π.χ. 2 δωδ., 5 κομμ.+8 κομμ.),
Γ) δύο προσθετέων, οἱ ὁποῖοι καὶ οἱ δύο ἔχουν μονάδας δύο τάξεων (π.χ. 2 δωδ., 5 κομμ.+3 δωδ., 8 κομμ.),
Δ) σχηματισμὸς σειρῶν, π.χ. 7 κομμ.+7 κομμ.(=1 δωδ., 2 κομμ.)+7 κομμ.(=1 δωδ., 9 κομμ.)+7 κομμ.(=2 δωδ., 4 κομματ.)+7 κομμ. καὶ οὕτω καθ. ἕως τὰς 7 δωδεκ.

2. Πρόσθεσις γραπτὴ περισσοτέρων ἀπὸ 2 προσθετέων, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ καθένας ἔχει μονάδας εἴτε δύο τάξεων εἴτε καὶ μιᾶς μόνον ἀπ' αὐτάς:
Α) χωρὶς τροπὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν μονάδων τῆς κατωτέρας τάξεως εἰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας, π χ.:

3 δωδ.	3 κομμ.	
— »	4 »	
2 »	— »	
1 »	4 »	

Β) μὲ τροπήν, π. χ.:

3 δωδ.	3 κομμ.	
— »	14 »	
2 »	— »	
1 »	9 »	

Ἡ δὲ ὕλη ***τῆς ἀφαιρέσεως*** ὀρθὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης, εἰς τὴν ὁποίαν:
Α) καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος ἔχουν μονάδας 1 μόνον

τάξεως (π.χ. 6 δωδ.—4 κομμ.),

Β) ὁ ἕνας μόνον ἀπ' αὐτοὺς ἔχει μονάδας 2 τάξεων (π. χ. 6 δωδ.—2 δωδ., 4 κομμ. ἢ 6 δωδ., 2 κομμ.—4 κομμ.),

Γ) καὶ οἱ δύο ἔχουν μονάδας δύο τάξεων (π χ. 6 δωδ., 2 κομμάτ.—2 δωδ., 4 κομμ.).

2. Ἀφαίρεσις γραπτή:

Α) χωρὶς τροπὴν μονάδος ἀνωτέρας τάξεως τοῦ μειωτέου εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως, π.χ.:

	55 δωδ.	6 κομμ.
—	32 »	4 »

Β) μὲ τροπήν, π. χ.:

α)	55 δωδ.	0 κομμ.	β)	55 δωδ.	4 κομμ.
—	32 »	4 »		32 »	6 »

Ἡ ὕλη τώρα ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*** σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης, εἰς τὸν ὁποῖον:

Α) ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχει μονάδας μιᾶς μόνον τάξεως (π.χ. 4 κομμ.×8),

Β) ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχει μονάδας δύο τάξεων (π.χ. 3 δωδ., 4 κομμ.×6).

2. Πολλαπλασιασμὸς γραπτός:

Α) μὲ πολλαπλασιαστέον ἔχοντα μονάδας μιᾶς τάξεως,

Β) μὲ πολλαπλασιαστέον ἔχοντα μονάδας δύο τάξεων καὶ μὲ πολλαπλασιαστήν:

α) μονοψήφιον,

β) διψήφιον, ἀλλὰ δυνάμενον νὰ ἀναλυθῇ εἰς 2 μονοψηφίους παράγοντας (π.χ. 13 δωδ., 9 κομμ.×16(=4×4)),

δ) διψήφιον μὴ δυνάμενον νὰ ἀναλυθῇ εἰς 2 μονοψηφίους παράγοντας (π.χ. 13 δωδ., 9 κομμ.×13).

Τέλος ἡ διάταξις τῆς ὕλης ***τῆς διαιρέσεως*** σκόπιμον εἶναι νὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς:

1. Διαίρεσις ἀπὸ μνήμης.

Α. Μερισμός.

α) Ὁ διαιρετέος ἔχει μονάδας μιᾶς τάξεως (π. χ. 5 δωδ. : 4).

β) Ὁ διαιρετέος ἔχει μονάδας δύο τάξεων (π. χ. 5 δωδεκ., 8 κομμ. : 4).

Β. Μέτρησις.

α) Καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἔχουν μονάδας μιᾶς τάξεως (π.χ. 3 κομμ. εἰς 3 δωδ.).

β) Ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἔχει μονάδας δύο τάξεων (π.χ. 3 κομμ. εἰς 3 δωδ. καὶ 6 κομμ. ἢ 1 δωδ. καὶ 3 κομμ. εἰς 3 δωδ.).

γ) Καὶ οἱ δύο ἔχουν μονάδας δύο τάξεων (π.χ. 2 δωδ. καὶ 4 κομμ. εἰς 6 δωδ. καὶ 8 κομμ.).

2. Διαίρεσις γραπτή, τῆς ὁποίας ἡ ὕλη διατάσσεται ὅπως ἡ ὕλη τῆς ἀπὸ μνήμης.

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τώρα τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδ. ὑποδιαίρεσιν συμμιγῶν σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται μὲν ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις εἰς τὴν σειρὰν 1—100 (πρόσθεσις καὶ ἀφαιρέσις διψηφίων, πολλαπλασιασμὸς διψηφίων μὲ μονοψήφιον, διαιρέσεις δίδουσαι πηλίκον διψήφιον), καθὼς καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις εἰς τὴν ἴδιαν σειράν, νὰ ἐξακολουθοῦν δὲ αἱ κλασματικαὶ προασκήσεις.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν συμμιγῶν τῶν ἐχόντων δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν,*** μὲ τοὺς ὁποίους, καθὼς ηὑρομεν, θὰ εἰσάγωνται μαζὶ οἱ μαθηταὶ καὶ εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Ἡ διάταξις αὐτὴ θὰ ἔχῃ φυσικὰ εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς:

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν δεκαδικὴν παράστασιν τῶν συμμιγῶν τῶν ἐχόντων δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.

2. Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς τοὺς συμμιγεῖς αὐτούς, καθὼς καὶ εἰς τὰ ἀντίστοιχά των δεκαδικὰ κλάσματα.

Καὶ ἡ μὲν ὕλη ***τῆς εἰσαγωγῆς*** σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Οἱ συμμιγεῖς οἱ ἔχοντες δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν (μέτρα μήκους καὶ ἐπιφανείας καὶ νομίσματα) καὶ αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεών των (π. χ. μέτρον, δεκατόμετρον, ἑκατοστόμετρον· 1 μέτρ.=10 δεκατόμ., 100 ἑκατοστόμετρα· 1 δεκατ.=ἕνα δέκατον τοῦ μέτρου, ἕνα ἑκατοστ.=ἕνα ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου). Γραφὴ τῶν μονάδων τῶν κατωτέρων τάξεων, ἤτοι τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν καὶ χιλιοστῶν ὡς κοινῶν κλασμάτων.

2. Τὰ δέκατα ὡς δεκαδικὰ κλάσματα· γραφὴ καὶ ἀνάγνωσίς των ὡς δεκαδικῶν κλασμάτων. Τὰ ἴδια καὶ διὰ τὰ ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστά.

3. Ἡ τροπὴ ἑνὸς δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ περισσότερα ἢ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία.

4. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἑνὸς δεκαδικοῦ κλάσματος μὲ τὸν 10, τὸν 100 καὶ τὸν 1000.

5. Τροπαὶ τῶν συμμιγῶν, τῶν ἐχόντων δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, εἰς δεκαδικὰ κλάσματα. Δεκαδικὴ γραφὴ τῶν νομισμάτων καὶ τῶν μέτρων (τοῦ μήκους καὶ τῆς ἐπιφανείας).

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν 4 θεμελιωδῶν πράξεων*** ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς. Ἡ μὲν ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσίς των, ἡ ὁποία καὶ θὰ προηγῆται τῆς γραπτῆς, θὰ γίνεται ὅπως εἰς τοὺς συμμιγεῖς τοὺς μὴ ἔχοντας δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, διότι καὶ οἱ ἔχοντες δεκαδικὴν τὴν ὑποδιαίρεσιν, ἀφοῦ θὰ ἀπαγγέλλωνται εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν ὡς συμμιγεῖς, δὲν εἶναι δυνατὸν παρὰ καὶ νὰ ἀριθμοῦνται εἰς αὐτὴν ὡς συμμιγεῖς. Διαφορετικὰ ὅμως θὰ ἔχῃ τὸ πρᾶγμα εἰς τὴν ἐπακολουθοῦσαν γραπτὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων μὲ τοὺς προκειμένους ἀριθμούς. Εἰς αὐτὴν θὰ ἀπαγγέλλωνται μὲν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ὡς συμμιγεῖς, θὰ γράφωνται ὅμως ὡς δεκαδικοί, δι' αὐτὸ δὲ καὶ θὰ ἀριθμοῦνται σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμεν ἀλλοῦ (ἴδ. ἀνωτ. σελ. 419) ὡς δεκαδικὰ κλάσματα. Διὰ νὰ ἠμποροῦν ὅμως οἱ μαθηταὶ νὰ προσθέτουν, νὰ ἀφαιροῦν κ.τ.λ. ἐγγράφως ὡς δεκαδικὰ κλάσματα τοὺς συμμιγεῖς τοὺς ἔχοντας δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, πρέπει φυσικὰ προηγουμένως νὰ ἔχουν ἀσκηθῆ εἰς τὴν γραπτὴν πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν κ.τ.λ. ***καθαρῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.*** Δι' αὐτὸ εἰς τὴν γραπτὴν ἐκτέλεσιν τῆς κάθε ἀριθμητικῆς πράξεως εἰς τοὺς προκειμένους συμμιγεῖς λαμβανομένους ὡς δεκαδικὰ κλάσματα πρέπει νὰ προτάσσεται ἡ γραπτὴ ἐκτέλεσις τῆς ἴδιας ἀριθμητικῆς πράξεως ἐπάνω εἰς καθαρὰ δεκαδικὰ κλάσματα μὲ 1—3 δεκαδ. ψηφία. Σκόπιμον ὅμως ἐξ ἄλλου εἶναι, καὶ ἀφοῦ μάθουν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐκτελοῦν ἐγγράφως μίαν πρᾶξιν ἐπάνω εἰς τὰ καθαρὰ δεκαδικὰ κλάσματα, νὰ μὴ τὴν ἐφαρμόζουν ἀμέσως καὶ εἰς τοὺς προκειμένους συμμιγεῖς λαμβανομένους ὡς δεκαδικὰ κλάσματα, ἀλλὰ πρὸ αὐτοῦ νὰ ἐκτελοῦν τὴν πρᾶξιν αὐτὴν ἐγγρά-

φως ἐπάνω εἰς τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς λαμβανομένους ὡς συμμιγεῖς, νὰ τὴν κάμνουν δηλαδὴ ἔτσι, ὅπως τὴν ἔκαμαν εἰς τοὺς ἰδίους ἀριθμοὺς ἀπὸ μνήμης καὶ ὅπως τὴν ἔκαμαν εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν. Πρέπει δὲ νὰ γίνεται αὐτό, ὅπως ὀρθότατα παρατηρεῖ ὁ Räther (ὅπου ἀνωτ., σελ. 195), ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ νὰ συνδέεται ἡ διδασκαλία τῶν συμμιγῶν αὐτῶν μὲ τὴν προηγηθεῖσαν διδασκαλίαν τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, ἀφ' ἑτέρου δὲ καὶ προπάντων διὰ νὰ κατανοοῦν οἱ μαθηταί, ὅτι ἠμποροῦμεν μὲν νὰ λογαριάζωμεν καὶ ἐγγράφως μὲ τοὺς συμμιγεῖς αὐτούς, ὅπως καὶ μὲ τοὺς ἄλλους, ἀλλ' ὅτι ἡ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον χρησιμοποιουμένη δεκαδικὴ γραφή των μᾶς ἐπιβάλλει κατ' ἀνάγκην τὴν δεκαδικὴν ἀρίθμησίν των, ἡ ὁποία ἄλλωστε ἔχει περισσότερα πλεονεκτήματα ἀπὸ τὴν μὴ δεκαδικήν, εἶναι δὲ καὶ γνωστὴ εἰς αὐτοὺς ἀπὸ τὴν ἀμέσως προηγηθεῖσαν ἀρίθμησιν τῶν καθαρῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. Ἀκριβῶς δὲ ἐπειδὴ ἡ δεκαδικὴ ἀρίθμησις τῶν προκειμένων συμμιγῶν ἔχει περισσότερα πλεονεκτήματα ἀπὸ τὴν μὴ δεκαδικήν, πρέπει νὰ ἔχουν ὑπ' ὄψιν των πάντοτε οἱ μαθηταί, ὅτι ἡ μὴ δεκαδικὴ ἀρίθμησις, τὴν ὁποίαν θὰ κάμνουν μὲ τοὺς συμμιγεῖς αὐτούς, θὰ εἶναι δι' αὐτοὺς μεταβατικὴ μόνον μορφὴ τῆς ἀριθμήσεως, περιοριζομένη εἰς ἐλαχίστας μόνον ἀσκήσεις, κυρία δὲ μορφὴ θὰ εἶναι ἡ ἐπακολουθοῦσα δεκαδική.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι ἡ διάταξις τῆς ὕλης τῆς κάθε ἀριθμητικῆς πράξεως εἰς τοὺς συμμιγεῖς τοὺς ἔχοντας δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν θὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 196 κ. ἀκ.):

Ἡ μὲν διάταξις τῆς ὕλης ***τῆς προσθέσεως*** θὰ λαμβάνῃ τὴν ἑξῆς μορφήν:

1. Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης, διατασσομένη ὅπως εἰς τοὺς συμμιγεῖς τοὺς μὴ ἔχοντας δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.

2. Πρόσθεσις γραπτή:

Α) καθαρῶν δεκαδικῶν κλασμάτων μὲ 1—3 δεκαδικὰ ψηφία (α) 15,6+12,9+29,3+65,7, β) 0,6+1,2+10+4,8, γ) 18,15 +5,23+19,08+0,65, δ) 7,240+0, 850+11,050 κ.τ.λ.),

Β) συμμιγῶν ἐχόντων μονάδας δύο τάξεων:

α) ἡ μεταβατικὴ μορφὴ τῆς προσθέσεως (ἤτοι ἡ πρόσθεσις ἡ γινομένη ὅπως εἰς τοὺς συμμιγεῖς τοὺς μὴ ἔχοντας δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν), π.χ. 6 δρ. 35 λεπτ.+7 δρ.+4 δρ. 55 λεπτ.+65 λεπτ.,

β) ἡ νέα, ἤτοι ἡ δεκαδικὴ μορφὴ τῆς προσθέσεως, π.χ. 6,05 δρ.+7,65 δρ.+3,00 δρ.+2,15 δρ.+9,30 δρ.+0,85 δρ.

Ἡ δὲ ὕλη ***τῆς ἀφαιρέσεως*** θὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

1. Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης, διατασσομένη ὅπως εἰς τοὺς συμμιγεῖς τοὺς μὴ ἔχοντας δεκαδ. ὑποδιαίρεσιν.

2. Ἀφαίρεσις γραπτή:

Α) καθαρῶν δεκαδικῶν κλασμάτων μὲ 1—3 δεκαδ. ψηφία:

α) 25,7	β) 26,6	γ) 38,5	δ) 35,4	ε) 40,5	ς) 42,7	ζ) 42
— 13,2	— 12	— 16,7	— 17,6	— 16,7	— 16	— 16,8

Β) συμμιγῶν ἐχόντων μονάδας δύο τάξεων:

α) ἡ μεταβατικὴ μορφὴ τῆς ἀφαιρέσεως,

β) ἡ δεκαδικὴ μορφὴ τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἡ ὕλη τώρα ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*** θὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

1. Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης, διατασσόμενος ὅπως εἰς τοὺς συμμιγεῖς τοὺς μὴ ἔχοντας δεκαδ. ὑποδιαίρεσιν.

2. Πολλαπλασιασμὸς γραπτός:

Α) δεκαδικῶν κλασμάτων μὲ 1—3 δεκαδ. ψηφία × ἀκέραιον:

α) μονοψήφιον (42,5×6),

β) διψήφιον καὶ πολυψήφιον:

1) τὸν 10, 100 καὶ 1000, 2) ἔχοντα περισσοτέρας ἀπὸ μίαν καθαρὰς δεκάδας ἢ ἑκατοντάδας ἢ χιλιάδας (π.χ. 40, 400, 4000), 3) ἔχοντα ὅλα του τὰ ψηφία σημαντικὰ (π.χ. 45, 453, 4536).

Β) συμμιγῶν ἐχόντων μονάδας δύο τάξεων × ἀκέραιον:

α) ἡ μεταβατικὴ μορφὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ,

β) ἡ δεκαδικὴ μορφὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τέλος ἡ ὕλη ***τῆς διαιρέσεως*** θὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

1. Διαίρεσις ἀπὸ μνήμης, διατασσομένη ὅπως εἰς τοὺς συμμιγεῖς τοὺς μὴ ἔχοντας δεκαδ. ὑποδιαίρεσιν.

2. Διαίρεσις γραπτή:

Α) δεκαδικῶν κλασμάτων μὲ 1 — 3 δεκαδικὰ ψηφία διὰ ἀκεραίου:

α) μονοψηφίου:

1) τελεία (α) δίδουσα πηλίκον ἔχον καὶ ἀκέραιον, π.χ. 8,424 : 6,
β) δίδουσα πηλίκον μὴ ἔχον ἀκέραιον, π.χ. 5,424 : 6),

2) μὴ τελειώνουσα μὲ τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον, ἀλλά: α) τελειώνουσα μὲ δεκαδικὸν ψηφίον κατωτέρας τάξεως (π. χ. 159,5 : 2), β) μὴ τελειώνουσα ποτὲ (π.χ. 92,8 : 3),

β) διψηφίου καὶ πολυψηφίου:

1) τοῦ 10, 100, 1000, 2) ἔχοντος περισσοτέρας ἀπὸ μίαν καθαρὰς δεκάδας ἢ ἑκατοντάδας ἢ χιλιάδας, 3) ἔχοντος ὅλα του τὰ ψηφία σημαντικά,

Β) συμμιγῶν ἐχόντων μονάδας δύο τάξεων μὲ ἀκέραιον:

α) Μερισμός:

1) ἡ μεταβατικὴ μορφὴ τοῦ μερισμοῦ,

2) ἡ δεκαδικὴ μορφὴ τοῦ μερισμοῦ,

β) Μέτρησις μὲ τὸν ἴδιον τρόπον.

Κατὰ τὴν διδασκαλίαν τώρα τῶν συμμιγῶν τῆς δεκαδ. ὑποδιαιρέσεως σκόπιμον εἶναι νὰ ἐπαναλαμβάνεται μὲν ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις εἰς τὴν σειρὰν 1—1000 (πρόσθεσις τριψηφίων, ἀφαίρεσις διψηφίων καὶ τριψηφίων ἀπὸ τὸν 1000, πολλαπλασιασμὸς διψηφίων, διαίρεσις τριψηφίων) καὶ εἰς τὴν σειρὰν μέχρι τῶν ἑκατομμυρίων (μὲ εὐκόλους ἀσκήσεις), καθὼς καὶ ἡ γραφὴ δυσκόλων πολυψηφίων ἀριθμῶν καὶ ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις εἰς τὰς ἴδιας σειράς, νὰ ἐξακολουθοῦν δὲ αἱ κλασματικαὶ προασκήσεις.

Ἡ ὕλη τώρα ***τῶν προβλημάτων τῆς μέσης τιμῆς*** σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν., σ. 207):

1. Ἀπὸ μνήμης λύσις προβλημάτων τῆς μέσης τιμῆς, λυομένων

Α) μόνον μὲ διαίρεσιν,

Β) μὲ πρόσθεσιν καὶ διαίρεσιν.

2. Γραπτὴ λύσις παρομοίων προβλημάτων μὲ μεγαλυτέρους καὶ δυσκολωτέρους ἀριθμούς.

Ἡ ὕλη τέλος ***τῶν προβλημάτων τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν*** ὀρθὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 209):

1. Ἀπὸ μνήμης λύσις προβλημάτων,

Α) εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τρίτος ὅρος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ τὰ ὁποῖα λύονται μόνον μὲ πολλαπλασιασμὸν (π.χ. 1000 κεραμίδια στοιχίζουν 1200 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 5000; Ἀπ. 1200 δρ.×5),

Β) εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τρίτος ὅρος εἶναι ποσοστὸν τοῦ πρώτου καὶ τὰ ὁποῖα λύονται μόνον μὲ διαίρεσιν (π.χ. 1000 κ. στοιχίζουν 1200 δρ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 250; Ἀπ. 1200 δρ. : 4),

Γ) εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τρίτος ὅρος δὲν εἶναι οὔτε πολλαπλάσιον οὔτε ποσοστὸν τοῦ πρώτου καὶ τὰ ὁποῖα λύονται μὲ διαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν (π. χ. 1000 κεραμ. κ.τ.λ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 470; Ἀπ. Τὰ 1000 στοιχ. 1200 δρ. Τὸ 1 στοιχ. 1200 δρ.: 1000 =1,20 δρ. Τὰ 470 στοιχ. 1,20 δρ.×470).

2. Γραπτὴ λύσις παρομοίων προβλημάτων μὲ μεγαλυτέρους καὶ δυσκολωτέρους ὅρους (ἀνάλογη πρὸς τὴν ἀπὸ μνήμης).

ε) Ἡ διάταξις τῆς ὕλης τοῦ πέμπτου σχολικοῦ ἔτους.

Τὴν ὕλην τοῦ ἔτους αὐτοῦ ἀποτελοῦν, καθὼς γνωρίζομεν, τὰ κοινὰ κλάσματα, τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, (ἰδίως δέ, ὅ,τι ἀπὸ αὐτὰ δὲν ἐδιδάχθηκε κατὰ τὸ 4ον σχολ. ἔτος) καὶ τὰ σύνθετα προβλήματα.

Ὁ κύριος λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν ὕλην τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων δὲν ἐδιδάχθηκε κατὰ τὸ 4ον σχολικὸν ἔτος, εἶναι, καθὼς ἐνθυμούμεθα, ὅτι ἡ τελεία κατανόησις τοῦ ὑλικοῦ αὐτοῦ προϋποθέτει τὴν συστηματικὴν ἐνασχόλησιν τῶν μαθητῶν μὲ τὰ κοινὰ κλάσματα καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν γνῶσιν τῶν ἰδιαιτέρων νόμων τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως. Ἔτσι π. χ. ὁ σχηματισμὸς καὶ ἡ κατανόησις τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων μὲ περισσότερα ἀπὸ 3 δεκαδ. ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀπεκλείσθησαν ἀπὸ τὸ ὑλικὸν τῶν δεκαδικῶν τοῦ 4 σχολ. ἔτους, ἀποβαίνουν, ὅπως ὀρθότατα παρατηρεῖ ὁ Räther, (ὅπ. ἀν. μέρ. 3, σ. 15 κ. ἀκ.), ὑπερβολικὰ δύσκολα εἰς τοὺς μαθητάς, ἂν δὲν στηρίζωνται ἐπάνω εἰς τὴν τελείαν γνῶσιν τῶν κοινῶν κλασμάτων καὶ τῶν νόμων τῆς ἀριθμήσεώς των. Ἕως τὰ χιλιοστὰ εἶναι δυνατὴ ἀκόμη ἡ ἐποπτεία καὶ μὲ τὴν βοήθειάν της ἠμποροῦν νὰ σχηματίζουν καὶ νὰ παριστάνουν οἱ μαθηταὶ τὰ δέκατα καὶ τὰ ἑκατοστὰ καὶ ὁπωσδήποτε καὶ τὰ χιλιοστά. Ἀλλὰ ἀπὸ τὰ χιλιοστὰ καὶ ἐπάνω δὲν εἶναι πλέον ἡ ἐποπτεία δυνατή. Διὰ νὰ σχηματίζουν καὶ νὰ παριστάνουν οἱ μαθηταὶ τὸ δέκατον μέρος τοῦ 1 χιλιοστοῦ, τοῦ 1 δεκάκις χιλιοστοῦ, τοῦ 1 ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ, θὰ εἶναι ἀναγκασμένοι νὰ καταφεύγουν εἰς ψιλὰς ἀναλογίας. Θὰ φαντάζωνται π. χ., ὅτι, ὅπως εἰς τὴν δεκάδα, τὴν ἑκατοντάδα καὶ τὴν χιλιάδα τῶν ἀκεραίων ἀντιστοιχεῖ τὸ δέκατον, τὸ ἑκατοστόν, τὸ χιλιοστόν, ἔτσι καὶ εἰς τὴν δεκάδα τῶν χιλιάδων, τὴν ἑκατοντάδα τῶν χιλιάδων, τὸ ἑκατομμύριον ἀντιστοιχεῖ τὸ δεκάκις χιλιοστόν, τὸ ἑκατοντάκις χιλιοστόν, τὸ ἑκατομμυριοστόν. Καὶ δὲν ἀποκλείεται μὲν προκειμένου διὰ τὰ δεκαδ. αὐτὰ κλάσματα ἡ χρῆσις τέτοιων ἀναλογιῶν, δὲν ἐπιτρέπεται ὅμως ὁ ἀποκλειστικὸς σχηματισμός των ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν, διότι ἡ ψιλὴ ἀναλογία δὲν εἶναι παρὰ μία μηχανικὴ ἐργασία, μία ἐργασία, ἡ ὁποία δὲν στηρίζεται εἰς τὴν βαθυτέραν κατανόησιν τῶν πραγμάτων, δι' αὐτὸ δὲ καὶ τὰ ἐπὶ τῇ βάσει της σχηματιζόμενα δεκαδ. κλάσματα δὲν θὰ ἔχουν διὰ τοὺς μαθητὰς κανὲν συνειδητὸν περιεχόμενον. Πολὺ ὅμως διαφορετικὰ θὰ ἔχῃ τὸ πρᾶγμα, ἂν οἱ μαθηταὶ γνωρίζουν καλὰ τὰ κοινὰ κλάσματα, (μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὰ $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$ κ.τ.λ.) καὶ τοὺς νόμους τῆς ἀριθμήσεώς των, (μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τοὺς νόμους τῆς διαιρέσεώς των, σύμφωνα μὲ τοὺς ὁποίους $\frac{1}{1000} : 10 = \frac{1}{10000}$, $\frac{1}{10000} : 10 = \frac{1}{100000}$ κ.τ.λ.), στηρίζουν δὲ δι' αὐτὸ τὸν σχηματισμὸν τῶν προκειμένων δεκαδικῶν κλασμάτων ἐπάνω εἰς τὴν γνῶσιν αὐτήν. Εἶναι προφανές, ὅτι εἰς τὴν περίστασιν αὐτὴν καὶ εὐκολώτερα θὰ τὰ σχηματίζουν καὶ σαφέρεστερα θὰ τὰ παριστάνουν. Ἀλλὰ καὶ ἡ κατανόησις ὡρισμένων ἀριθμητικῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἐπίσης ἀπεκλείσθησαν ἀπὸ τὴν ὕλην τῶν δεκαδικῶν τοῦ 4 σχολ. ἔτους, ὅπως π χ. τοῦ πολλαπλασιασμοῦ × δεκαδ. κλάσμα, δὲν ἀποβαίνει δυνατὴ εἰς τοὺς μαθητὰς χωρὶς τὴν γνῶσιν τῶν ἰδιαιτέρων νόμων τῆς ἀριθμήσεως τῶν κοινῶν κλασμάτων, ὅπως ἔχομεν ἀναπτύξει διεξοδικὰ εἰς ἄλλο μέρος τοῦ παρόντος ἔργου (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 187).

Ἀκριβῶς τώρα ὁ λόγος, ὁ ὁποῖος μᾶς ἔπεισε νὰ ἀποκλείσωμεν ὡρισμένας ὕλας ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν τὴν γινομένην κατὰ τὸ 4 σχολ ἔτος, μᾶς ἐπιβάλλει νὰ τάξωμεν κατὰ τὸ 5 σχολ. ἔτος τὴν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν, τῆς ὁποίας τὸ κυριώτερον μέρος ἀποτελεῖ ἡ διδασκαλία τῶν ὑλῶν ἐκείνων, μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν κοινῶν κλασμάτων, ἐπάνω εἰς τὴν ὁποίαν θὰ πρέπη νὰ στηρίζεται ἡ διδασκαλία ἐκείνη. Ὅθεν ἡ διάταξις τῆς ὅλης ὕλης τοῦ 5 σχολ. ἔτους πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικωτάτας της γραμμὰς ὡς ἑξῆς:

1. Κοινὰ κλάσματα.

2. Δεκαδικὰ κλάσματα (καὶ ἰδίως ἡ μὴ διδαχθεῖσα μέχρι τοῦδε ἀπὸ αὐτὰ ὕλη).

3. Σύνθετα προβλήματα: α) τῆς μέσης τιμῆς, β) τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, γ) ἄλλα διάφορα.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν κοινῶν κλασμάτων*** ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἀκόλουθα. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὴν ὕλην αὐτὴν ἀποτελοῦν 3 θεμελιώδη κεφάλαια, ἤτοι 1) ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ κλάσματος καὶ τῶν διαφόρων εἰδῶν τῶν κλασμάτων, 2) αἱ δευτερεύουσαι ἀριθμητικαὶ πράξεις, μὲ τὰς ὁποίας μεταβάλλεται μόνον ἡ μορφὴ τῶν κλασμάτων, (ἤτοι ἡ τροπὴ ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς νόθα κλάσματα καὶ τὸ ἀντίθετον, ἡ τροπὴ ἑνὸς κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους, ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων καὶ ἡ τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα) καὶ 3) αἱ 4 θεμελιώδεις ἀριθμητικαὶ πράξεις εἰς τὴν γνωστὴν σειράν των, μὲ τὰς ὁποίας μεταβάλλεται καὶ ἡ τιμὴ τῶν κλασμάτων, μία αὐστηρῶς λογικὴ διάταξις τῆς ὕλης δὲν θὰ εἶχε νὰ κάμῃ τίποτε ἄλλο παρὰ νὰ τάξῃ τὰ 3 αὐτὰ θεμελιώδη κεφάλαια τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου εἰς τὴν σειρὰν ἀκριβῶς, εἰς τὴν ὁποίαν τὰ παρεθέσαμεν καὶ ἐμεῖς εὐθὺς ἀνωτέρω. Ἀλλὰ αἱ λογικαὶ διατάξεις τῆς ὕλης δὲν εἶναι καὶ αἱ καταλληλότεραι διὰ τὸ δημοτικὸν σχολεῖον, διὰ τὸ ὁποῖον ἁρμόζουν αἱ μεθοδικαί, ἤτοι αἱ λαμβάνουσαι ὑπ' ὄψιν τὰς ἀντιληπτικὰς δυνάμεις τῶν μαθητῶν, αἱ ὁποῖαι ἀκριβῶς διὰ λόγους σχετιζομένους μὲ τὰς δυνάμεις αὐτὰς ἐπιφέρουν συνήθως μεταβολὰς εἰς τὰς λογικὰς διατάξεις. Τοιουτοτρόπως καὶ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν μεθοδικοὶ λόγοι ἐπιβάλλουν, ὅπως ὡρισμέναι δευτερεύουσαι ἀριθμητικαὶ πράξεις ταχθοῦν κατόπιν ἀπὸ ὡρισμένας θεμελιώδεις, ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας στηρίζονται, διότι μόνον ἔτσι θὰ ἠμποροῦν νὰ κατανοηθοῦν εὐκολώτερα ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Μεθοδικοὶ ἐπίσης λόγοι ἐπιβάλλουν, ὅπως ὡρισμέναι θεμελιώδεις πράξεις, τασσόμεναι εἰς τὴν λογικὴν διάταξιν πρὸ ἄλλων ὡρισμένων θεμελιωδῶν, ταχθοῦν κατόπιν ἀπὸ αὐτάς, διότι τὰς προϋποθέτουν, δι' αὐτὸ δὲ μόνον εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν διδασκόμεναι θὰ ἠμποροῦν νὰ κατανοηθοῦν καλύτερα ἀπὸ τοὺς μαθητάς. Μεθοδικοὶ τέλος λόγοι ἐπιβάλλουν, ὅπως ἐν γένει τὰ δυσκολώτερα διδάσκωνται κατόπιν ἀπὸ τὰ εὐκολώτερα, διότι ἔτσι μόνον διδασκόμενα θὰ φανοῦν ὀλιγώτερον δύσκολα εἰς τοὺς μαθητάς. Ἂν ὅμως οἱ μεθοδικοὶ λόγοι ἐπιβάλλουν μεταβολὰς εἰς τὴν μνημονευθεῖσαν λογικὴν διάταξιν τῆς ὕλης τῶν κοινῶν κλασμάτων, πρέπει ἐξ ἄλλου νὰ σημειωθῇ, ὅτι οἱ λόγοι αὐτοὶ ἐκτιμῶνται διαφορετικὰ ἀπὸ τοὺς διαφόρους Μεθοδικούς, δι' αὐτὸ δὲ καὶ ἔχομεν ποικιλίαν μεθοδικῶν διατάξεων τῆς ὕλης αὐτῆς, ἀπὸ τὰς ὁποίας καὶ θὰ ἐξετάσωμεν σύντομα τὰς κυριωτέρας.

Ἕνα εἶδος διατάξεων ἀποτελοῦν ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι τάσσουν τὴν ὅλην ὕλην τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δύο ἀνιόντας κύκλους, οἱ ὁποῖοι διδάσκονται εἰς δύο ἀλλεπάλληλα ἔτη καὶ ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ μὲν πρῶτος περιλαμβάνει τὰ ἁπλούστατα καὶ τὰ ἀναγκαιότατα ἀπὸ τὰ κοινὰ κλάσματα, ὁ δὲ δεύτερος περιλαμβάνει ὅλην τὴν ὕλην τῶν κ. κλασμάτων, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ διδαχθῇ εἰς τὸ δημοτ. σχολεῖον, ἐπιμένει δὲ φυσικὰ εἰς ἐκεῖνα ἰδίως τὰ μέρη της, τὰ ὁποῖα ὡς δυσκολώτερα καὶ ὄχι ἀπολύτως ἀναγκαῖα δὲν ἔχουν τεθῆ εἰς τὸν πρῶτον κύκλον. Τέτοια εἶναι π.χ. ἡ διάταξις τοῦ Steuer (ἴδ. Methodik des Rechenunterrichts, Strehlen, 1883, σελ. 267 κ. ἀκ.), ὁ ὁποῖος παραλείπει ἀπὸ τὸν πρῶτον κύκλον καὶ τάσσει εἰς τὸν δεύτερον τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων, τὴν μέτρησιν κλάσματος μὲ ἄλλο ἑτερώνυμον καὶ τὸν μερισμὸν μὲ κλάσμα. Ἀναλόγους διατάξεις μὲ τὴν διάταξιν τοῦ Steuer ἔχουν καὶ οἱ Hentschel (Lehrbuch des Rechenunterrichts κ.τ.λ., ὑπὸ Hentschel καὶ Költzsch, 16 ἐκδ., Leipzig, 1901, μέρ. 2, τμ. 1) καὶ Böhme (Anleitung κ.τ.λ., Berlin, 1887, σ. 139). Ὅλοι οἱ Μεθοδικοὶ αὐτοὶ ἀκολουθοῦν ἐν γένει καὶ εἰς τοὺς 3 κύκλους τῆς διατάξεώς των τὴν σειρὰν τῆς λογικῆς διατάξεως, προσπαθοῦν δὲ νὰ ἄρουν τὰς μεθοδικὰς ἀνωμαλίας της κυρίως διὰ τῆς τοποθετήσεως τῶν δυσκολωτέρων ὑλῶν τοῦ κάθε κεφαλαίου τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως εἰς τὸν δεύτερον κύκλον. Κρίνομεν περιττὸν νὰ εἰσέλθωμεν εἰς τὰς λεπτομερείας τῶν διατάξεων αὐτῶν, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι δὲν θεωροῦμεν ἀναγκαῖον νὰ κατανεμηθῇ ἡ ὕλη τῶν κ. κλασμάτων ἰς δύο σχολικὰ ἔτη τασσομένων τῶν δυσκολωτέρων της μερῶν εἰς τὸ δεύτερον, καθόσον μὲ μίαν μεθοδικωτέραν διάταξιν ἠμπορεῖ νὰ κατορθωθῇ ἡ καρποφόρος διδασκαλία ὅλης αὐτῆς τῆς ὕλης ἐντὸς ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σχολικοῦ ἔτους, ἀφ᾽ ἑτέρου δέ, διότι ἄλλωστε τὸ δ. σχολεῖον τῶν 6 ἐτῶν δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ διαθέσῃ δύο σχολικὰ ἔτη διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν δύο ἀνιόντων κύκλων τῶν προκειμένων διατάξεων.

Ἄλλο εἶδος διατάξεως ἀποτελεῖ ἡ διάταξις, τὴν ὁποίαν προτείνει ὁ γνωστός μας ἀπὸ τὰς ῥηξικελεύθους ἰδέας του τὰς σχετικὰς μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀκεραίων τῆς σειρᾶς 1—100 Μεθοδικὸς Grube (Leitfaden für das Rechnen κ.τ.λ., 6 ἔκδ., Berlin, 1881, σ. 112 κ. ἀκ.). Καὶ ὁ Grube διατάσσει τὰ κ. κλάσματα εἰς δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι ὅμως ἠμποροῦν νὰ διδαχθοῦν ἐντὸς τοῦ ἴδιου σχολικοῦ ἔτους. Εἰς τὸν πρῶτον κύκλον, τὸν ὁποῖον ὀνομάζει κύκλον τῆς κατὰ νοῦν ἢ ἀπὸ μνήμης ἀριθμήσεως, διατάσσει τὴν ὕλην κατὰ τὰς κλασματικὰς σειράς, παρουσιάζων διαδοχικὰ τὰ δεύτερα, τὰ τρίτα, τὰ τέταρτα, τὰ πέμπτα καὶ τὰ ἕκτα, καὶ διδάσκων ἐπάνω εἰς τὴν καθεμίαν ἀπὸ τὰς σειρὰς αὐτὰς ὅλας τὰς δυνατὰς δευτερευούσας καὶ θεμελιώδεις ἀριθμ. πράξεις. Κατορθώνει δὲ τὴν διδασκαλίαν αὐτήν, καθόσον ἐξετάζει τὴν κάθε σειρὰν ***μονογραφικῶς***, ἐφαρμόζων ἔτσι καὶ εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα τὸν τρόπον τῆς ἐξετάσεως, τὸν ὁποῖον ἐφαρμόζει, καθὼς εἴδαμεν, καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους τῆς σειρᾶς 1—100. Συνίσταται δὲ ἡ μονογρ. ἐξέτασις τῆς κάθε κλασματικῆς σειρᾶς εἰς τοῦτο, ὅτι δηλ., ἀφοῦ εἰσαχθοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τὰ κλάσματα τῆς σειρᾶς καὶ κάμουν ἐπάνω εἰς αὐτὰ ὅλας τὰς δυνατὰς πράξεις, τὰ συγκρίνουν καὶ τὰ συσχετίζουν μὲ τὰ κλάσματα τῶν προδιδαχθεισῶν σειρῶν, ἔτσι δὲ εὑρίσκουν τὴν εὐκαιρίαν νὰ κάμουν καὶ ὅλας τὰς δευτερευούσας καὶ θεμελιώδεις ἀριθμητικὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ γίνουν ἐπάνω εἰς τὰ κλάσματα τῆς ἐξεταζομένης σειρᾶς καὶ τῶν προδιδαχθεισῶν. Κατὰ τὴν διδασκαλίαν π.χ. τῆς κλασματικῆς σειρᾶς τῶν τετάρτων, ἀφοῦ εἰσαχθοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τὰ κλάσματα τῆς σειρᾶς $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right.$ κ.τ.λ.$\left.\right)$ καὶ κάμουν ἐπάνω εἰς αὐτὰ ὅλας τὰς δευτερευούσας καὶ θεμελ. ἀριθμ. πράξεις, συγκρίνουν ἔπειτα καὶ συσχετίζουν τὰ τέταρτα μὲ τὰ

γνωστά των δεύτερα $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)$ καὶ τρίτα $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right)$ καὶ κάμνουν ὅλας τὰς δυνατὰς—δευτερευούσας καὶ θεμελιώδεις—πράξεις ἐπάνω εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ κλάσματα (π. χ. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}+\frac{1}{2}$ κ.τ.λ., $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ κ. τ. λ.). Ἐννοεῖται τώρα, ὅτι μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς ἐξετάσεως ἐξέρχονται οἱ μαθηταὶ ἀπὸ τὴν διδασκομένην καὶ τὰς ἄλλας γνωστὰς σειρὰς εἰς σειρὰς νέας· ἡ πρόσθεσις π. χ. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ τοὺς φέρει ἀπὸ τὴν σειρὰν τῶν τετάρτων εἰς τὴν νέαν σειρὰν τῶν ὀγδόων, ἡ πρόσθεσις $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ εἰς τὴν νέαν σειρὰν τῶν δωδεκάτων κ.τ.λ. Εἰς τὸν δεύτερον τώρα κύκλον, τὸν ὁποῖον ὀνομάζει κύκλον τῆς γραπτῆς ἢ κατὰ κανόνας ἀριθμήσεως, διατάσσει ὁ Grube τὴν ὕλην κατὰ τὰς θεμελιώδεις πράξεις εἰς τὴν συνήθη των σειράν, τὴν καθεμίαν ἀπὸ τὰς ὁποίας διδάσκει ἐπάνω εἰς ὁποιαδήποτε κλάσματα. Ὅπως πολὺ σωστὰ παρατηρεῖ ὁ Räther, τὸ μόνον ὀρθόν, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ διδαχθῇ κανεὶς ἀπὸ τὴν διάταξιν τοῦ Grube εἶναι, ὅτι κατὰ ***τὴν πρώτην εἰσαγωγὴν*** τῶν μαθητῶν εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα πρέπει νὰ ἀρχίσωμεν μὲ τὸν σχηματισμὸν τῶν δευτέρων, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν τὸν ἁπλούστερον μερισμὸν τῆς ἀκεραίας μονάδος, μετὰ τοῦτο δὲ νὰ δείξωμεν τὸν σχηματισμὸν τῶν σχετικῶς ἁπλουστέρων τρίτων, κατόπιν τῶν σχετικῶς ἁπλουστέρων τετάρτων κ. οὕτ. καθ. Αὐτὸ δὲ κάμνομεν καὶ ἐμεῖς, ὅταν εἰσάγωμεν—ἀπὸ τὸ δεύτερον ἀκόμη σχολικὸν ἔτος—τοὺς μαθητὰς εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα· μὲ τὸν μερισμὸν τοῦ ἀκεραίου ὑπολοίπου 1 κατὰ πρῶτον εἰς 2 ἴσα μέρη διδάσκομεν τὰ δεύτερα, μὲ τὸν μερισμόν του κατόπιν εἰς 3 τέτοια μέρη διδάσκομεν τὰ τρίτα κ. οὕτ. καθ. (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 412). Καθ᾽ ὅλα τὰ ἄλλα ἡ διάταξις τοῦ Grube εἶναι ἐντελῶς ἄστοχη. Ἡ διαίρεσις τῆς ἀριθμήσεως τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς ἀρίθμησιν κατὰ νοῦν καὶ κατὰ κανόνας δὲν ἔχει κανένα λόγον, ἀφοῦ καὶ αἱ δύο γίνονται μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, ἀπὸ τὴν ἐκτέλεσιν δὲ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ εἰς αὐτὸ ἀκόμη τὸ περιωρισμένον πεδίον τῶν κλασματικῶν σειρῶν (τοῦ πρώτου κύκλου) θὰ σχηματισθοῦν κατ᾽ ἀνάγκην μόνοι των οἱ σχετικοὶ κανόνες εἰς τὴν ψυχὴν τῶν μαθητῶν, ὅσον καὶ ἂν τὸ ἀποφύγῃ ἡ διδασκαλία, ἡ ὁποία θὰ ἐπιφυλάξῃ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν κανόνων διὰ τὸν δεύτερον κύκλον. Κανένα ἐπίσης λόγον δὲν ἔχει ἡ διάταξις τῆς ὕλης τῶν κ. κλασμάτων κατὰ κλασματικὰς σειρὰς καὶ ἡ σχετικὴ μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν μονογραφικὴ ἐξέτασις τῆς κάθε σειρᾶς. Ἂν διετάξαμεν τοὺς ἀκεραίους 1—10 κατὰ σειρὰς διηκούσας ἕως τὸν καθένα ἀπὸ αὐτοὺς καὶ ἂν ἐξετάσαμεν κάθε τέτοιαν σειρὰν μονογραφικῶς, ἐκεῖ εἶχε τὸ πρᾶγμα τοὺς λόγους του, οἱ ὁποῖοι δὲν ὑπάρχουν προκειμένου διὰ τὰ κοινὰ κλάσματα. Τὰ τέταρτα δὲν εὑρίσκονται εἰς σχέσιν ἐξαρτήσεως μὲ τὰ τρίτα, ὅπως εὑρίσκεται ὁ ἀκέραιος 4 μὲ τὸν 3. Τοῦ 4 δὲν ἠμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν σαφῆ ἔννοιαν, ἂν δὲν ἔχωμεν σχηματίσει προηγουμένως σαφῆ ἔννοιαν τοῦ 3, τοῦ $\frac{1}{4}$ ὅμως ἠμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν ἀρκετὰ σαφῆ ἔννοιαν, καὶ χωρὶς νὰ ἔχωμεν ἀκόμη σχηματίσει σαφῆ ἔννοιαν τοῦ $\frac{1}{3}$. Ἔπειτα διὰ νὰ ἔχωμεν σαφῆ ἔννοιαν τοῦ 4, πρέπει νὰ ἔχωμεν εἰς τὸν νοῦν μας ὅλα τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ γίνουν εἰς τὴν σειρὰν 1—4 ($3+1=4$, $2+2=4$, $1+3=4$, $4-1=3$ κ.τ.λ.), διὰ νὰ ἔχωμεν ὅμως σαφῆ ἔννοιαν τοῦ $\frac{1}{4}$, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν σαφῆ παράστασιν τῆς σχέσεώς του μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, δὲν εἶναι δὲ ἀνάγκη νὰ ἠξεύρωμεν, τί κάμνει $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ κ.τ.λ., πράγματα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ζητηθοῦν καὶ νὰ γνωσθοῦν κατόπιν μὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Δὲν πρέπει τέλος νὰ λησμονηθῇ, ὅτι, ἐνῷ αἱ πράξεις τῆς ἀνιούσης ἀριθμήσεως αἱ γινόμεναι εἰς τὰς σειρὰς τὰς διηκούσας μέχρι τοῦ καθενὸς ἀκεραίου 2—10 ἔχουν ὡς τέρμα τὸν ἀκέραιον αὐτόν, αἱ ἴδιαι πράξεις εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς κλασματικὰς σειρὰς ἔχουν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν εἰσαγωγὴν τῶν μαθητῶν εἰς νέας καὶ ἀγνώστους σειράς, ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον αἴρει αὐτὴν τὴν βάσιν τῆς κατὰ κλασματικὰς σειρὰς διατάξεως, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν οἱ μαθηταὶ δὲν πρέπει νὰ εἰσάγωνται εἰς νέαν σειράν, πρὶν εἰσαχθοῦν εἰς ὅλας τὰς προηγουμένας της. Ὅταν οἱ μαθηταὶ διδασκόμενοι τὴν σειρὰν τῶν τρίτων διὰ τῆς προσθέσεως $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

εἰσέρχωνται εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἕκτων καὶ ἔτσι μανθάνουν τὰ ἕκτα, πρὶν μάθουν τὰ τέταρτα καὶ τὰ πέμπτα, δὲν βλέπομεν, τί ἀπομένει πλέον ἀπὸ τὴν κατὰ κλασματικὰς σειρὰς διάταξιν (ἴδ. καὶ Räther, ὅπ. ἀν., σελ. 47 κ. ἀκ.).

Ὡς ἕνα εἶδος συνδυασμοῦ τῶν μέχρι τοῦδε ἐξετασθέντων δύο εἰδῶν τῆς διατάξεως ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ἡ διάταξις τοῦ Kühnel (Neubau des Rechenunterrichts, Leipzig, 1916), ὁ ὁποῖος διατάσσει τὴν ὕλην τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς 3 ἀνιόντας κύκλους, διδασκομένους εἰς 3 σχολικὰ ἔτη (4ον, 5ον, 6ον). Εἰς τὸν πρῶτον ἀπὸ τοὺς κύκλους αὐτούς, τὸν ὁποῖον καὶ ὀνομάζει θεμελιώδη, ἐξετάζει ὅλας τὰς πράξεις ἐπάνω εἰς τὰ δεύτερα, τὰ τέταρτα καὶ τὰ δέκατα, τὰ κλάσματα δηλ. ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τόσην σπουδαιότητα εἰς τὸν καθημερινὸν βίον, ὥστε ἔχουν κινήσει τὸ διαφέρον καὶ τῶν μαθητῶν. Εἰς τὸν δεύτερον κύκλον, τὸν ὁποῖον ὀνομάζει συμπληρωτικὸν ἢ τῆς ἐπεκτάσεως, ἐξετάζονται ὅλαι αἱ πράξεις καὶ εἰς ἕξι νέας κλασματικὰς σειράς, ἤτοι τὰ ὄγδοα, τὰ πέμπτα, τὰ εἰκοστά, τὰ τρίτα, τὰ ἕκτα καὶ τὰ δωδέκατα. Τέλος εἰς τὸν τρίτον κύκλον, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται κύκλος τῆς ἀφαιρέσεως καὶ ὑπενθυμίζει τὸν κύκλον τῆς κατὰ κανόνας ἀριθμήσεως τοῦ Grube, ἐξετάζονται ὅλαι αἱ πράξεις ἐπάνω καὶ εἰς τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα. Εἶναι τώρα προφανές, ὅτι, ὅ,τι ἐπαρατηρήσαμεν ἐναντίον τῶν προηγουμένως ἐξετασθέντων δύο εἰδῶν τῆς διατάξεως, ἰσχύει καὶ διὰ τὴν διάταξιν αὐτὴν τοῦ Kühnel.

Τρίτον εἶδος διατάξεων ἀποτελοῦν ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν ὡς βάσιν των τὴν μόνην ὀρθὴν βάσιν, ἤτοι τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, θεμελιώδεις καὶ δευτερευούσας.

Εἰς τὸ εἶδος αὐτὸ ἀνήκει ἡ διάταξις τοῦ Kaselitz (Wegweiser κ.τ.λ., Berlin, 1878—80, μέρ. 1, σ. 19 κ. ἀκ.), ὁ ὁποῖος παρεκκλίνει ἀπὸ τὴν λογικὴν διάταξιν τῆς ὕλης τῶν κοινῶν κλασμάτων κατὰ τοῦτο, ὅτι τάσσει εἰς τὸ τέλος τῆς διατάξεως τὴν τροπὴν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα καὶ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν ἑτερωνύμων κλασμάτων, καθόσον θεωρεῖ τὰς πράξεις αὐτὰς ὡς τὰς δυσκολωτέρας ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας. Ὅτι ἡ διάταξις τοῦ Kaselitz δὲν εἶναι ἱκανοποιητική, εἶναι προφανές. Ἐν πρώτοις ἡ μέριμνα τοῦ Κ. περὶ τῆς μεθοδικῆς διαμορφώσεως τῆς διατάξεως δὲν ἐκτείνεται εἰς ὅλην τὴν ὕλην της, ἀλλὰ περιορίζεται μόνον εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων. Ἔπειτα τὸ γεγονός, ὅτι αἱ πράξεις αὐταὶ πρέπει νὰ τοποθετηθοῦν καταλλήλως εἰς τὴν διάταξιν, διὰ νὰ κατανοηθοῦν, μᾶς ἐπιβάλλει μόνον νὰ τὰς τάξωμεν μετὰ τὰς πράξεις ἐκείνας, τὰς ὁποίας προϋποθέτουν, ὁπότε καὶ θὰ κατανοηθοῦν εὔκολα, ὄχι ὅμως καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς ὅλης διατάξεως, ὅπως κάμνει ὁ Kaselitz. Ὁ ὑπ' αὐτοῦ φερόμενος λόγος τῆς ἀπολύτου δυσκολίας τῶν πράξεων αὐτῶν δὲν εἶναι ἀκριβής, διότι ἡ κατανόησις τῆς φύσεως τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεων τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων δὲν παρέχει ἰδιαζούσας δυσκολίας εἰς τοὺς μαθητάς, πάντως δὲ παρουσιάζει πολὺ ὀλιγωτέρας ἀπὸ ὅσας παρουσιάζει ἡ κατανόησις τῆς φύσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως μὲ κλάσμα. Παραλείπομεν ἄλλως, ὅτι μὲ τὴν τοποθέτησιν τῆς προσθ. καὶ ἀφαιρ. τῶν ἑτερων. κλ. εἰς τὸ τέλος δὲν ἀποβαίνει δυνατὴ ἡ διδασκαλία τῆς μετρήσεως ἑτερωνύμων κλασμάτων διὰ τῆς τροπῆς των εἰς ὁμώνυμα.

Πραγματικὴν μεθοδικὴν πρόοδον ἐμφαίνει ἡ διάταξις τοῦ Büttner (ὅπ. ἀν., σελ. 160 κ. ἀκ.), ἡ ὁποία ἔχει εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς :

1. Προεισαγωγικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, χρήσιμαι διὰ τὴν κατανόησιν τῶν κοινῶν κλασμάτων : ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν 1—100 εἰς πρώτους παράγοντας καὶ οἱ κυριώτατοι κανόνες τῆς διαιρετότητος.

2. Εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα. Σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ κ. κλάσματος διὰ τοῦ μερισμοῦ τῆς ἀκεραίας μονάδος. Οἱ ὅροι καὶ ἡ γραφὴ τοῦ κλάσματος. Κλασματικὴ μονάς, κλασματικὸς ἀριθμός, γνήσια καὶ νόθα κλάσματα. Σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος καὶ διὰ τοῦ μερισμοῦ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων.

3. Μικτοὶ ἀριθμοί. Τροπὴ ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς κλάσματα καὶ τὸ ἀντίθετον.

4. Τροπὴ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους καὶ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

5. Πολλαπλασιασμὸς καὶ μερισμὸς κλάσματος ἢ μικτοῦ μὲ ἀκέραιον.

6. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

7. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων (τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα).

8. Αἱ λοιπαὶ περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

9. Αἱ περιπτώσεις τῆς μετρήσεως μὲ κλάσμα.

10. Τροπαὶ κλάσματος μονάδος ἀνωτέρας τάξεως εἰς ἀκεραίας ἢ ἀκεραίας καὶ κλασματικὰς μονάδας κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἀντίθετον. Ἐξαγόμενα κατὰ προσέγγισιν.

Ὅ,τι ἀπὸ μεθοδικῆς ἀπόψεως παρουσιάζεται ὡς πρόοδος εἰς τὴν διάταξιν αὐτήν, εἶναι ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ὁ μερισμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον προτάσσεται τῆς τροπῆς τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα καὶ τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως ἑτερωνύμων κλασμάτων, διότι αἱ τελευταῖαι αὗται πράξεις προϋποθέτουν τὴν τελείαν κατοχὴν ἐκείνων. Καὶ εἶναι μὲν ἀληθές, ὅτι εὔκολοι πολλαπλασιασμοὶ καὶ διαιρέσεις κλάσματος μὲ ἀκέραιον ἔχουν ἤδη διδαχθῆ κατὰ τὰς κλασματικὰς προασκήσεις τοῦ προηγουμένου ἔτους, ἐν τούτοις ὁ Β. ἔχει τὴν ὀρθὴν γνώμην, ὅτι κατὰ τὴν ***συστηματικὴν*** διδασκαλίαν τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως, ἡ ὁποία γίνεται τώρα, πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται ἡ μεθοδικωτάτη ἀρχὴ τῆς διαδοχῆς τῶν πράξεων ἀναλόγως τῆς ἐξαρτήσεως τῆς μιᾶς ἀπὸ τὴν ἄλλην, διότι μόνον μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἀρχῆς αὐτῆς θὰ ἠμπορέσουν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐννοήσουν κατὰ βάθος τὴν ὅλην κλασματικὴν ἀρίθμησιν. Θὰ ἔπρεπε ὅμως ὁ Β. νὰ ἐφαρμόσῃ τὴν ἀρχὴν αὐτὴν γενικὰ καὶ ὄχι νὰ περιορίσῃ τὴν ἐφαρμογήν της μόνον εἰς τὴν ἀνωτέρω μνημονευθεῖσαν περίπτωσιν. Ὅπως ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τοῦ μερισμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον, ἔτσι τὴν προϋποθέτουν καὶ ἡ τροπὴ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους καὶ ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων. Ἡ τροπὴ ἐξ ἄλλου ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς νόθα κλάσματα προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον καὶ τὴν πρόσθεσιν ὁμωνύμων κλασμάτων, ἡ δὲ τροπὴ νόθων κλασμάτων εἰς ἀκέραιον ἢ μικτὸν προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῆς μετρήσεως κλάσματος μὲ ἄλλο ὁμώνυμον. Ὅλαι αὐταὶ αἱ περιπτώσεις, ἀνάλογοι μὲ τὴν περίπτωσιν τῆς τροπῆς τῶν ἑτερωνύμων κλ. εἰς ὁμώνυμα, δὲν ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν ἀπὸ τὸν Büttner. Εἰς ἐπίμετρον ἡ διάταξις του παρουσιάζει καὶ μερικὰ ἄλλα μειονεκτήματα. Ἔτσι ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀκεραίων 1—100 εἰς πρώτους παράγοντας καὶ ἡ διδασκαλία τῶν κανόνων τῆς διαιρετότητος, αἱ ὁποῖαι γίνονται κυρίως διὰ νὰ διευκολύνουν τὴν διδασκαλίαν τῆς ἁπλοποιήσεως τῶν κλασμάτων (καὶ κατόπιν τῆς τροπῆς ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα) δὲν ἔπρεπε νὰ ταχθοῦν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς διατάξεως, ἀλλὰ μαζὶ μὲ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων. Ὁ σχηματισμὸς κατόπιν τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μερισμοῦ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων δὲν πρέπει νὰ διδάσκεται, δι' ὅσους λόγους ἔχομεν ἀναπτύξει εἰς ἄλλο μέρος τοῦ παρόντος ἔργου (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 151 κ. ἀκ.), κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν μαθητῶν εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα, ἀλλὰ ἀργότερα καὶ ὡρισμένως πρὸ τῆς διδασκαλίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τοῦ μερισμοῦ ἀκεραίου μὲ κλάσμα, οἱ ὁποῖοι τὸν προϋποθέτουν. Ἀπὸ τὰς ὑπ' ἀρ. 10 πράξεις αἱ τροπαὶ κλάσματος μονάδος ἀνωτέρας τάξεως εἰς **ἀκεραίας** μονάδας κατωτέρας, ὡς μὴ προϋποθέτουσαι καμίαν πρᾶξιν τῆς κλασματικῆς ἀριθμήσεως, δι' αὐτὸ δὲ διδαχθεῖσαι εἰς τὰ προηγούμενα ἀκόμη ἔτη, καὶ αἱ τροπαὶ ἀκεραίων μονάδων κατωτέρας τάξεως εἰς κλάσματα μονάδος ἀνωτέρας τάξεως, ὡς προϋποθέτουσαι μόνον τὴν γνῶσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ τεθοῦν εἰς τὸ τέλος τῆς διατάξεως.

Ἀρκετὴν μεθοδικὴν πρόοδον ἐν συγκρίσει μὲ τὴν διάταξιν τοῦ Büttner παρουσιάζει ἡ διάταξις τοῦ Hartmann (ὅπ. ἀν., σελ. 155 καὶ 329 κ. ἀκ.), ἔχουσα εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς :

1. Εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα διὰ τῆς διαδοχικῆς διδασκαλίας 1) τῶν δευτέρων, τετάρτων καὶ ὀγδόων, 2) τῶν τρίτων, ἕκτων καὶ δωδεκάτων, 3) τῶν πέμπτων, δεκάτων καὶ εἰκοστῶν, 4) ὁποιωνδήποτε κλασμάτων. Εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς ὁμάδας αὐτὰς διδάσκονται : ὁ σχηματισμὸς τῶν κλασμάτων διὰ τοῦ μερισμοῦ τῆς ἀκεραίας μονάδος, οἱ ὅροι των, ἡ κλασματικὴ μονὰς καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, τὰ γνήσια καὶ τὰ νόθα κλάσματα, οἱ μικτοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἡ τροπὴ τῶν νόθων κλασμάτων εἰς ἀκεραίους ἢ μικτοὺς καὶ τὸ ἀντίθετον.

2. Ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις μαζὶ τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων.

3. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ὁ μερισμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον :

Α) Ὁ πολλαπλασιασμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον.

Β) Ὁ μερισμὸς ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον, ὁ δίδων ὡς πηλίκον κλάσμα (σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μερισμοῦ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων).

Γ) Ὁ μερισμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον.

Δ) Ὁ συνδυασμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τοῦ μερισμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον, ὅπως παρουσιάζεται :

α) εἰς τὴν τροπὴν κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους,

β) εἰς τὴν ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων καὶ

γ) εἰς τὴν τροπὴν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

4. Ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις μαζὶ ἑτερωνύμων κλασμάτων.

5. Αἱ λοιπαὶ περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (α) ἀκέραιος ἐπὶ κλάσμα, β) κλάσμα ἐπὶ κλάσμα).

6. Αἱ περιπτώσεις τῆς μετρήσεως μὲ κλάσμα (α) μέτρησις ἀκεραίου μὲ κλάσμα, β) μέτρησις κλάσματος μὲ κλάσμα).

Ὅπως καταφαίνεται ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω διάγραμμα, ὁ Hartmann, ὀρθότατα ποιῶν, προτάσσει τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὸν μερισμὸν κλάσματος μὲ ἀκέραιον ὄχι μόνον τῆς τροπῆς τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα, ἀλλὰ καὶ τῆς τροπῆς κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους καὶ τῆς ἁπλοποιήσεως. Ὀρθὴ ἐπίσης εἶναι ἡ τάξις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ μερισμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον, ἐφόσον φυσικὰ δὲν ζητεῖται καὶ ἡ ἁπλοποίησις τῶν ἐξαγομένων τῶν πράξεων ἐκείνων. Ἐν τούτοις καὶ ὁ Μεθοδικὸς αὐτὸς δὲν κάμνει γενικὴν ἐφαρμογὴν τῆς ὀρθῆς ἀρχῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαδοχὴ τῶν πράξεων πρέπει νὰ κανονίζεται σύμφωνα μὲ τὰς σχέσεις τῆς ἐξαρτήσεώς των. Παρατηροῦνται δὲ ἐπίσης καὶ μερικὰ ἄλλα μειονεκτήματα εἰς τὴν διάταξίν του. Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὰ κ. κλάσματα διὰ τῆς διαδοχικῆς διδασκαλίας ὁμάδων ἀποτελουμένων ἀπὸ ὡρισμένας συγγενεῖς κλασματικὰς σειρὰς δὲν ἔχει κανένα λόγον. Ὁ μερισμὸς ἀκεραίου μὲ ἀκέραιον, ὁ δίδων ὡς πηλίκον κλάσμα καὶ ὁ ἐπ' αὐτοῦ στηριζόμενος σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μερισμοῦ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων διδάσκονται ἐνωρίτερα ἀφ' ὅτι πρέπει. Ἡ τροπὴ κατόπιν κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους, ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων καὶ ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα, μολονότι γίνονται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τοῦ μερισμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον καὶ δι' αὐτὸ ὀρθότατα τάσσονται μετὰ τὰς πράξεις αὐτάς, δὲν πρέπει ἐν τούτοις νὰ παρουσιάζωνται ὡς ***συνδυασμός*** των, ἀλλ' ὡς αὐτοτελεῖς δευτερεύουσαι πράξεις, διότι ὁ συνδυασμὸς τῶν δύο θεμελιωδῶν αὐτῶν πράξεων εἶναι πάλιν πρᾶξις θεμελιώδης, ἔχουσα ὡς ἀποτέλεσμα τὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς τῶν κλασμάτων $\left(\left(\frac{2}{6} \times 5 \right) : 2 = \frac{5}{6} \right)$, ἐνῷ μὲ τὰς προκειμένας δευτερευούσας πράξεις μόνον ἡ μορφὴ τῶν κλασμάτων μεταβάλλεται. Τέλος ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα δὲν πρέπει νὰ τάσσεται πρὸ τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων, ἀλλὰ μαζὶ μὲ τὰς πράξεις αὐτάς, ἀφοῦ αὐταὶ δίδουν ἀφορμὴν εἰς τὴν τροπὴν ἐκείνην.

Συγγενὴς μὲ τὰς διατάξεις τῶν Büttner καὶ Hartmann, εἰς ἀρκετὰ δὲ σημεῖα ἀρτιωτέρα των εἶναι ἡ διάταξις τοῦ Räther, (ὅπ. ἀν., σελ. 50), ἔχουσα εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς :

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα :

Α) Σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μερισμοῦ τῆς ἀκεραίας μονάδος. Κλασματικὴ μονάς, κλ. ἀριθμός, κλ. σειρά. Ὅροι καὶ γραφὴ τοῦ κλάσματος. Ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα, γνήσια καὶ νόθα κλάσματα.

Β) Τροπὴ κλάσματος μονάδος ἀνωτέρας τάξεως εἰς ἀκεραίας μονάδας κατωτέρας καὶ τὸ ἀντίθετον.

2. Δύο ἀπὸ τὰς δευτερεύουσας ἀριθμητικὰς πράξεις :

Α) Ἡ τροπὴ ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς νόθα κλάσματα καὶ

Β) Ἡ τροπὴ νόθων κλασμάτων εἰς ἀκεραίους ἢ μικτούς.

3. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ὁ μερισμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον.

4. Αἱ λοιπαὶ δύο δευτερεύουσαι ἀριθμητικαὶ πράξεις:

Α) Ἡ τροπὴ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους καὶ

Β) Ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

5. Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις μὲ σύγχρονην ἐφαρμογὴν τῶν δευτερευουσῶν :

Α) Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

Β) Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων

Γ) Μερισμὸς καὶ μέτρησις ἀκεραίου (μεγαλυτέρου τῆς μονάδος) δι' ἀκεραίου μὲ πηλίκον κλάσμα. Σχηματισμὸς τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μερισμοῦ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων.

Δ) Αἱ λοιπαὶ περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ε) Αἱ λοιπαὶ περιπτώσεις τοῦ μερισμοῦ καὶ τῆς μετρήσεως.

6. Ἡ τροπὴ κλάσματος μονάδος ἀνωτέρας τάξεως εἰς ἀκεραίας καὶ κλασματικὰς μονάδας κατωτέρας καὶ τὸ ἀντίθετον.

Ὅπως ὁ Hartmann, ἔτσι καὶ ὁ Räther προτάσσει τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὸν μερισμὸν κλάσματος μὲ ἀκέραιον ὄχι μόνον τῆς τροπῆς τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα, ἀλλὰ καὶ τῆς τροπῆς κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους καὶ τῆς ἁπλοποιήσεως. Ἐν τούτοις καὶ αὐτὸς δὲν ἐφαρμόζει τὴν ἀρχὴν τῆς διατάξεως τῶν πράξεων σύμφωνα μὲ τὰς σχέσεις τῆς ἐξαρτήσεώς των καὶ εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις, τὰς ὁποίας ἀνεφέραμεν ἐξετάζοντες τὴν διάταξιν τοῦ Büttner. Τὰ ἄλλα ὅμως μειονεκτήματα, τὰ ὁποῖα ηὕραμεν εἰς τὰς διατάξεις τοῦ Hartmann καὶ τοῦ Büttner, δὲν παρατηροῦνται εἰς τὴν ἰδικήν του. Ἰδιαιτέρως δὲ πρέπει νὰ ἐξαρθῇ εἰς αὐτὴν ἡ ὀρθὴ τοποθέτησις τοῦ μερισμοῦ ἀκεραίου δι' ἀκεραίου τοῦ δίδοντος ὡς πηλίκον κλάσμα, τῆς ὁποίας πόρισμα εἶναι ὁ σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μερισμοῦ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων.

Ἀπὸ ὅλα τώρα, ὅσα εἴδαμεν ἐξετάζοντες τὰς κυριωτέρας διατάξεις τῆς ὕλης τῶν κοινῶν κλασμάτων, ἰδίως δὲ ἀπὸ τὰ παρατηρηθέντα κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν τριῶν τελευταίων ἀπὸ αὐτάς, ἤτοι τῶν διατάξεων τοῦ Büttner, τοῦ Hartmann καὶ τοῦ Räther, ἐξάγομεν, ὅτι ἡ διάταξις τῆς ὕλης αὐτῆς, ἂν πρόκειται νὰ προσαρμόζεται πρὸς τὰς μεθοδικὰς ἀπαιτήσεις, πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς :

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα.

2. Αἱ ἁπλούστεραι ἀπὸ τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις, αἱ απα-

ραίτητοι διὰ τὴν κατανόησιν τῶν δευτερευουσῶν, (ἐκτελούμεναι ἄνευ ἁπλοποιήσεως τοῦ ἐξαγομένου των ἢ τροπῆς του εἰς ἀκέραιον ἢ μικτόν) :

A) Ἡ πρόσθεσις τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων,

B) Ἡ ἀφαίρεσις τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων,

Γ) Ὁ πολλαπλασιασμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον,

Δ) Ὁ μερισμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον καὶ

E) Ἡ μέτρησις κλάσματος μὲ κλάσμα ὁμώνυμον.

3. Αἱ δευτερεύουσαι ἀριθμητικαὶ πράξεις :

A) Ἡ τροπὴ ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς νόθα κλάσματα,

B) Ἡ τροπὴ νόθων κλασμάτων εἰς ἀκεραίους ἢ μικτούς,

Γ) Ἡ τροπὴ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους,

Δ) Ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων καὶ

E) Ἡ τροπὴ ἀκεραίων μονάδων κατωτέρας τάξεως εἰς κλάσμα μονάδος ἀνωτέρας τάξεως.

. Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰς δευτερευούσας :

A) Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων,

B) Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων,

Γ) Ὁ μερισμὸς ἀκεραίου (μεγαλυτέρου τῆς μονάδος) μὲ ἀκέραιον, ὁ δίδων ὡς πηλίκον κλάσμα (σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μερισμοῦ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων),

Δ) Αἱ διάφοροι περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων,

E) Αἱ διάφοροι περιπτώσεις τῆς μετρήσεως καὶ τοῦ μερισμοῦ τῶν κλασμάτων.

5. Ἡ τροπὴ κλάσματος μονάδος ἀνωτέρας τάξεως εἰς ἀκεραίας καὶ κλασματικὰς μονάδας κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἀντίθετον.

Καὶ ἡ μὲν ὕλη ***τῆς εἰσαγωγῆς*** εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα καλὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

1. Σχηματισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μερισμοῦ τῆς ἀκεραίας μονάδος. Κλασματικὴ μονάς, κλασματικὸς ἀριθμός, κλασματικὴ σειρά. Ὅροι καὶ γραφὴ τοῦ κλάσματος. Γνήσια καὶ νόθα, ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα.

2. Τροπὴ κλάσματος μονάδος ἀνωτέρας τάξεως εἰς ἀκεραίας

μονάδας κατωτέρας τάξεως, π.χ. $\frac{3}{4}$ μ.=75 ἑκ. (διδασκομένη ἐδῶ, διότι συντελεῖ εἰς τὴν σαφεστέραν ἀντίληψιν τῆς ἐννοίας τοῦ κλάσματος, ἐνῷ ἐξ ἄλλου δὲν προϋποθέτει τὴν γνῶσιν καμιᾶς ἀπὸ τὰς θεμελιώδεις πράξεις τῆς κλ. ἀριθμήσεως).

Σχετικὰ τώρα μὲ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης τῶν διαφόρων πράξεων ἔχομεν ἐν πρώτοις νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι σύμφωνα μὲ τὴν γνώμην ἀρκετῶν Μεθοδικῶν εἰς τὴν καθεμίαν ἀπὸ αὐτὰς πρέπει νὰ προηγῆται μὲν ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις, περιοριζομένη εἰς τὰς σχετικῶς εὐκολωτέρας ἀσκήσεις, νὰ ἐπακολουθῇ δὲ ἡ γραπτή. Νομίζομεν ὅμως, δι' ὅσους λόγους ἐτονίσαμεν εἰς ἄλλο μέρος τοῦ παρόντος ἔργου, ὅτι αὐτὸ ἠμπορεῖ νὰ γίνεται εἰς ἐλαχίστας μόνον περιπτώσεις, ὅτι δὲ εἰς τὰς περισσοτέρας σκόπιμον εἶναι νὰ προτάσσεται μὲν ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις, ἐφαρμοζομένη μάλιστα κατ' ἀρχὰς ἐπάνω εἰς εὐκόλους ἀσκήσεις, νὰ ἐπακολουθῇ δὲ ἡ προφορική, παρουσιαζομένη εἴτε κατ' αὐτὴν τὴν διδασκαλίαν τοῦ νέου, εἴτε καὶ προπάντων κατὰ τὸ ἐπακολουθοῦν στάδιον τῆς ἐφαρμογῆς καὶ περιοριζομένη πάντοτε εἰς ἀσκήσεις ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγώτερον συνθέτους καὶ ἐχούσας κλάσματα μὲ σχετικῶς μικροὺς ὅρους.

Ἃς ἴδωμεν μετὰ τοῦτο, πῶς πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ διάταξις τῶν ἁπλουστέρων ἀπὸ τὰς 4 θεμελιώδεις πράξεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὴν κατανόησιν τῶν δευτερευουσῶν, θὰ ἐκτελοῦνται δὲ χωρὶς ἁπλοποίησιν τοῦ ἐξαγομένου των ἢ τροπήν του εἰς ἀκέραιον ἢ μικτόν.

Ἡ μὲν ὕλη ***τῆς προσθέσεως τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων*** σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

1. Πρόσθεσις δύο, κατόπιν δὲ καὶ περισσοτέρων ὁμωνύμων κλασμάτων (π.χ. $\frac{1}{4}$ π.+$\frac{2}{4}$ π., $\frac{1}{6}$ δωδ.+ $\frac{2}{6}$ δωδ.+$\frac{3}{6}$ δωδ. κ.τ.λ.).

2. Πρόσθεσις μικτοῦ καὶ κλάσματος ὁμωνύμου μὲ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ (π.χ. $1\frac{1}{8}$ π.+ $\frac{5}{8}$ π., $\frac{2}{4}$ δωδ. + $2\frac{1}{4}$ δωδ. κ.τ.λ.)·

3. Πρόσθεσις μικτῶν ἐχόντων ὁμώνυμα κλάσματα ($1\frac{1}{4}$ π. + $2\frac{2}{4}$ π.).

4. Προσθέσεις καθὼς αἱ ἀνωτέρω μὲ τροπὴν τοῦ κλάσματος τοῦ ἀθροίσματος εἰς ἀκεραίας μονάδας κατωτέρας τάξεως (π. χ. $\frac{1}{4}$ δρ. $+ \frac{2}{4}$ δρ. $= \frac{3}{4}$ δρ. $= 75$ λ., $2\,\frac{1}{4}$ π. $+ \frac{2}{4}$ π. $= 2\,\frac{3}{4}$ π. $= 2$ π. 6 ῥούπ.).

Ἡ δὲ ὕλη ***τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων*** ὀρθὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Ἀφαίρεσις δύο ὁμωνύμων κλασμάτων (π. χ. $\frac{4}{8}$ π. — $\frac{2}{8}$ π.).

2. Ἀφαίρεσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἢ μόνον ὁ μειωτέος εἶναι μικτός, ὁ δὲ ἀφαιρετέος εἶναι κλάσμα ἢ καὶ οἱ δύο εἶναι μικτοὶ καὶ εἰς τὰς δύο δὲ περιπτώσεις τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ὁμώνυμον κλάσμα τοῦ μειωτέου (π. χ. $2\,\frac{3}{4}$ π. — $\frac{2}{4}$ π., $3\,\frac{6}{8}$ π. - $1\,\frac{4}{8}$ π.).

3. Ἀφαίρεσις γνησίου κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιον (π.χ. 2 π. — $\frac{3}{4}$ π.).

4. Ἀφαίρεσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἢ μόνον ὁ μειωτέος εἶναι μικτός, ὁ δὲ ἀφαιρετέος εἶναι κλάσμα ἢ καὶ οἱ δύο εἶναι μικτοὶ καὶ εἰς τὰς δύο δὲ περιπτώσεις τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ὁμώνυμον κλάσμα τοῦ μειωτέου (π.χ. $2\,\frac{1}{4}$ π. — $\frac{3}{4}$ π., $3\,\frac{1}{4}$ π. — $2\,\frac{3}{4}$ π.).

5. Ἀφαιρέσεις καθὼς αἱ ἀνωτέρω μὲ τροπὴν τοῦ κλάσματος τῆς διαφορᾶς εἰς ἀκεραίας μονάδας κατωτέρας τάξεως (π. χ. $1\,\frac{1}{5}$ δρ. — $\frac{2}{5}$ δρ. $= \frac{4}{5}$ δρ. $= 80$ λ.).

6. Συνδυασμὸς προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων καθὼς αἱ ἀνωτέρω.

Ἡ ὕλη τώρα ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον*** πρέπει νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλ. μὲ τὸν ἀκέραιον (π. χ. $\frac{2}{8}$ π. $\times 3 = \frac{2 \times 3}{8}$ π. $= \frac{6}{8}$ π.

2. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλ. μὲ τὸν ἀκέραιον (π. χ. $\frac{2}{8}$ π. $\times 2 = \frac{2}{8:2}$ π. $= \frac{2}{4}$ π.).

3. Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ μὲ ἀκέραιον (π.χ. $2\,\frac{1}{4}$ δ. $\times 2 =$ 2 δ. $\times 2 + \frac{1}{4}$ δ. $\times 2 = 4\,\frac{2}{4}$ δωδ.).

Ἡ δὲ ὕλη ***τοῦ μερισμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον*** πρέπει νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Μερισμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἀκέραιον ($\frac{4}{5}$ μ. $: 2 = \frac{4:2}{5}$ μ. $= \frac{2}{5}$ μ.).

2. Μερισμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἀκέραιον ($\frac{3}{5}$ μ. $: 2 = \frac{3}{5 \times 2}$ μ. $= \frac{3}{10}$ μ.).

Ἡ ὕλη τέλος ***τῆς μετρήσεως κλάσματος μὲ κλάσμα ὁμώνυμον*** καλὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Μέτρησις δίδουσα ὡς πηλίκον ἀκέραιον ($\frac{6}{8}$ π. : $\frac{2}{8}$ π. (τὰ $\frac{2}{8}$ εἰς τὰ $\frac{6}{8}$) $= 3$).

2. Μέτρησις δίδουσα ὡς πηλίκον μικτὸν ($\frac{7}{8}$ π. : $\frac{2}{8}$ π. $= 3\,\frac{1}{8}$).

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν δευτερευουσῶν ἀριθμητικῶν πράξεων*** παρατηροῦμεν τὰ ἀκόλουθα:

Ἡ μὲν τροπὴ τῶν ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς νόθα κλάσματα θὰ διαταχθῇ κατὰ τὴν σειράν: 1. Τροπὴ ἀκεραίων εἰς νόθα κλ. 2. Τροπὴ μικτῶν εἰς ν. κλ.

Ἡ δὲ τροπὴ τῶν νόθων κλ. εἰς ἀκεραίους καὶ μικτοὺς θὰ διαταχθῇ κατὰ τὴν σειράν: 1. Τροπὴ νόθων κλ εἰς ἀκεραίους. 2. Τροπὴ νόθων κλ. εἰς μικτούς.

Ἡ δὲ τροπὴ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μεγαλυτέρους ὅρους θὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

1. Τροπή, κατὰ τὴν ὁποίαν δίδεται ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον θὰ πολλαπλασιασθοῦν οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος.

2. Τροπή, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς (π.χ. Τρέψε τὸ $\frac{1}{2}$ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα τῶν τετάρτων! κ.τ.λ.) καὶ τῆς ὁποίας θὰ γίνῃ κατόπιν ἐφαρμογὴ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἑτερωνύμων κλασμάτων (ἴδ. κατ.).

Ἡ δὲ ὕλη τῆς ἁπλοποιήσεως τῶν κλασμάτων σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

1. Εὔκολαι ἁπλοποιήσεις.

2. Δύσκολαι ἁπλοποιήσεις καὶ μέσα βοηθητικὰ πρὸς ἐκτελεσίν των, ὁποῖα εἶναι :

Α) Ἡ ἀνάλυσις τῶν μέχρι τοῦ 100 ἀριθμῶν εἰς δύο παράγοντας (διεξαχθεῖσα ἐπανειλημμένως κατὰ τὰ προηγούμενα σχολικὰ ἔτη καὶ γινομένη τώρα συστηματικά), ὁ εἰς αὐτὴν στηριζόμενος καθορισμὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν καὶ ἡ ἀνάλυσις τῶν μέχρι τοῦ 100 ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

Β) Οἱ κυριώτεροι κανόνες τῆς διαιρετότητος (α) διὰ τοῦ 2, τοῦ 5 καὶ τοῦ 10, β) διὰ τοῦ 4 καὶ 100, γ) διὰ τοῦ 8 καὶ 1000, δ) διὰ τοῦ 3, τοῦ 9 καὶ τοῦ 6).

Σχετικῶς τώρα μὲ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν 4 θεμελιωδῶν πράξεων ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰς δευτερευούσας*** ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἀκόλουθα.

Ἡ μὲν πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων θὰ διαταχθοῦν, ὅπως καὶ κατὰ τὴν πρώτην διδασκαλίαν των (ἴδ. ἀνωτ.), θὰ λαμβάνεται δὲ μόνον μέριμνα ἀπὸ τὸν διδάσκαλον νὰ εἶναι αἱ ἀσκήσεις τῆς κάθε περιπτώσεως τέτοιαι, ὥστε τὰ ἐξαγόμενά των νὰ ἠμποροῦν νὰ ἁπλοποιοῦνται ἢ νὰ εἶναι νόθα κλάσματα καὶ δι᾿ αὐτὸ νὰ τρέπωνται εἰς ἀκεραίους ἢ μικτούς.

Ἡ δὲ διάταξις τῆς ὕλης ***τῆς προσθέσεως τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων*** σκόπιμον εἶναι νὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς :

1. Πρόσθεσις ἑτερ. κλ., εἰς τὴν ὁποίαν κοινὸς παρονομαστὴς ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ ὁ μέγιστος ἀπὸ τοὺς δοθέντας παρονομαστάς· π. χ. $\frac{1}{2}$ π. $+ \frac{1}{4}$ π. $= \frac{2}{4}$ π. $+ \frac{1}{4}$ π., $\frac{1}{2}$ π. $+ \frac{1}{4}$ π. $+ \frac{2}{8}$ π. $= \frac{4}{8}$ π. $+ \frac{2}{8}$ π. $+ \frac{2}{8}$ π. κ.τ.λ.

2. Πρόσθεσις ἑτερ. κλ., εἰς τὴν ὁποίαν κοινὸς παρονομαστὴς δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ ὁ μέγιστος ἀπὸ τοὺς δοθέντας παρον., ἠμπορεῖ ὅμως νὰ γίνῃ τὸ γινόμενόν των· π.χ. $\frac{1}{2}$ μ. $+ \frac{1}{5}$ μ. $= \frac{5}{10}$ μ. $+ \frac{2}{10}$ μ.

3. Πρόσθεσις ἑτερων. κλ., εἰς τὴν ὁποίαν ὁ κοινὸς παρονομαστὴς δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ὁ μέγιστος ἀπὸ τοὺς δοθέντας, ἠμπορεῖ δὲ ἐξ ἄλλου νὰ εἶναι καὶ ἀριθμὸς μικρότερος ἀπὸ τὸ γινόμενόν των (εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου!)· π. χ. $\frac{1}{4}$ δωδ. $+ \frac{1}{6}$ δωδ. $= \frac{3}{12}$ δωδ. $+ \frac{2}{12}$ δωδ.

Ἡ ὕλη τώρα ***τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων,*** ἐφόσον ἔχουν διδαχθῆ αἱ διάφοροι περιπτώσεις τῆς τροπῆς τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα, αἱ ὁποῖαι καὶ μόναι ἐκανόνισαν τὴν διάταξιν τῆς ὕλης τῆς προσθέσεως τῶν ἑτερων. κλασμάτων, δὲν ἔχει φυσικὰ ἀνάγκην ἰδιαιτέρας διατάξεως.

Ἐρχόμενοι εἰς ***τὸν μερισμὸν ἀκεραίου*** (μεγαλυτέρου ἀπὸ τὴν μονάδα) ***δι᾿ ἀκεραίου,*** τὸν δίδοντα ὡς πηλίκον κλάσμα παρατηροῦμεν καὶ πάλιν, ὅτι προτάσσεται τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τοῦ μερισμοῦ ἀκεραίου μὲ κλάσμα, οἱ ὁποῖοι προϋποθέτουν τὰ ἐκ τοῦ μερισμοῦ ἐκείνου προκύπτοντα πορίσματα, ὅτι δηλ. τὸ κλάσμα δύναται νὰ σχηματισθῇ καὶ διὰ τοῦ μερισμοῦ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ ὅτι πᾶν κλάσμα ἠμποροῦμεν νὰ τὸ θεωρήσωμεν καὶ ὡς πρόβλημα διαιρέσεως καὶ πᾶν πρόβλημα διαιρέσεως ὡς κλάσμα. Σκόπιμον δὲ εἶναι κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ προκειμένου μερισμοῦ νὰ προταχθῇ μὲν ὁ μερισμὸς ἀκεραίου διὰ μεγαλυτέρου ἀκεραίου (π.χ. 3 μ. : 5 $= \frac{3}{5}$ μ.), νὰ ἐπακολουθήσῃ δὲ ὁ ἀνάλογος μερισμὸς ἀκεραίου διὰ μικροτέρου (π. χ. 5 μ. : 3 $= \frac{5}{3}$ μ.).

Ἡ διάταξις τώρα ***τῶν διαφόρων περιπτώσεων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων*** καλὸν εἶναι νὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς :

1. Ἐπανάληψις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον, κατὰ τὴν ὁποίαν α) ἠμπορεῖ νὰ γίνεται καὶ ἁπλοποίησις εἰς αὐτὴν τὴν κλασματικὴν διάταξιν, τὴν παριστάνουσαν τὸ γινόμενον (π. χ. $\frac{1}{8}$ π. $\times 4 = \frac{1\times 4}{8} = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$ π.), β) ἠμπορεῖ νὰ γίνεται καὶ ἁπλοποίησις τοῦ ἐξαχθέντος γινομένου (π.χ. $\frac{2}{12}$ δωδ. $\times 5 = \frac{10}{12}$ δωδ. $= \frac{5}{6}$ δωδ.) ἢ τροπή του εἰς ἀκέραιον ἢ μικτὸν (π. χ. $\frac{3}{12}$ δωδ. $\times 5 = \frac{15}{12}$ δωδ. $= 1\frac{3}{12}$ δωδ.).

2. Ἐπανάληψις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μικτοῦ μὲ ἀκέραιον μὲ τὰς ἴδιας συμπληρώσεις.

3. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου μὲ κλάσμα καὶ ὡρισμένως:

Α) μὲ κλασματικὴν μονάδα,

Β) μὲ κλασματικὸν ἀριθμόν,

Γ) μὲ μικτόν.

4. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος μὲ κλάσμα, κατόπιν δὲ καὶ πολλαπλασιασμὸς μικτῶν.

Ἡ δὲ ὕλη ***τῶν διαφόρων περιπτώσεων τῆς μετρήσεως τῶν κλασμάτων*** σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Ἐπανάληψις τῆς μετρήσεως κλάσματος μὲ κλάσμα ὁμώνυμον.

2. Μέτρησις ἀκεραίου μὲ κλάσμα διὰ τῆς τροπῆς τοῦ ἀκεραίου διαιρετέου εἰς κλάσμα ὁμώνυμον μὲ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου (π. χ. $\frac{3}{4}$ μ. εἰς τὰ 3 μ. $= \frac{3}{4}$ μ. εἰς τὰ $\frac{12}{4}$ μ.).

3. Μέτρησις μικτοῦ μὲ κλάσμα ὁμώνυμον πρὸς τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, κατόπιν δὲ μέτρησις μικτῶν ἐχόντων κλάσματα ὁμώνυμα.

4. Μέτρησις κλάσματος (, κατόπιν δὲ καὶ μικτοῦ) μὲ κλάσμα ἑτερώνυμον (, κατόπιν δὲ καὶ μικτὸν ἔχοντα ἑτερών. κλάσμα) διὰ τῆς τροπῆς τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Ἡ ὕλη τώρα ***τῶν διαφόρων περιπτώσεων τοῦ μερισμοῦ τῶν κλασμάτων*** ὀρθὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Ἐπανάληψις τοῦ μερισμοῦ κλάσματος μὲ ἀκέραιον, κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται καὶ ἁπλοποίησις τοῦ πηλίκου.

2. Μερισμὸς μικτοῦ μὲ ἀκέραιον:

α) δίδων πηλίκον μικρότερον τοῦ 1 (π.χ. $2\frac{1}{4}$ π. $: 4 = \frac{9}{4}$ π. $: 4 = \frac{9}{16}$ π.),

β) δίδων πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ 1 (π.χ. $5\frac{1}{2}$ π. $: 4 = 4{:}4 + 1\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{3}{2} : 4 = 1\frac{3}{8}$ π.).

3. Μερισμὸς ἀκεραίου μὲ κλάσμα, κατόπιν δὲ καὶ μὲ μικτόν.

4. Μερισμὸς κλάσματος, κατόπιν δὲ καὶ μικτοῦ, μὲ κλάσμα, κατόπιν δὲ καὶ μικτόν.

Αἱ δὲ τροπαί, αἱ φερόμεναι εἰς τὸ τέλος τοῦ γενικοῦ διαγράμματος τῆς διατάξεώς μας (ἴδ. ἀν., σελ. 518), ὡς προϋποθέτουσαι τὴν γνῶσιν τοῦ μερισμοῦ ἀκεραίου δι' ἀκεραίου, τοῦ δίδοντος ὡς πηλίκον κλάσμα ἢ μικτόν, σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

1. Τροπὴ κλάσματος μονάδος ἀνωτέρας τάξεως εἰς μικτὰς μονάδας κατωτέρας τάξεως (π.χ. $\frac{2}{3}$ μ. $= 66\frac{2}{3}$ ἑκ. μ.).

2. Τροπὴ μικτῶν μονάδων κατωτέρας τάξεως εἰς κλάσμα μονάδος ἀνωτέρας τάξεως (π. χ. $6\frac{1}{2}$ λ. $= \frac{13}{200}$ δρ.).

Σημειωτέον τέλος, ὅτι σκοπιμώτατον εἶναι κατὰ τὴν διδασκαλίαν κάθε νέας ἀσκήσεως τῶν κ. κλασμάτων νὰ ἐπαναλαμβάνεται εἰς τὸ διδακτικὸν στάδιον τῆς ἀσκήσεως ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἀντίστοιχη ἄσκησις ἐπάνω εἰς τοὺς ἀκεραίους, ἀφ' ἑτέρου δὲ καὶ προπάντων ἡ ἀντίστοιχη ἐπάνω εἰς τοὺς δεκαδικούς. Σκόπιμον δὲ εἶναι ἐπίσης νὰ ἐπαναλαμβάνωνται ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν καὶ τὰ μέτρα, τὰ σταθμὰ καὶ τὰ νομίσματα, διότι, καθὼς εἶναι γνωστόν, πολὺ εὔκολα λησμονοῦνται.

Ἡ διάταξις τώρα τῆς ὕλης ***τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων*** ὀρθὸν εἶναι νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 3, σελ. 98 καὶ ἀκ., Büttner, ὅπ. ἀν., σελ. 189 κ. ἀκ.):

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ νέα δεκαδικὰ κλάσματα.

2. Τροπὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς κοινὰ καὶ τῶν κοινῶν εἰς δεκαδικά.

3. Αἱ 4 θεμελιώδεις πράξεις εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα.

4. Αἱ 4 θεμελ. πράξεις εἰς τὰ δεκαδικὰ καὶ κοινὰ κλάσματα, ἰδίως δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις δεκαδικοῦ κλάσματος μὲ κοινὸν κλάσμα.

Καὶ ἡ μὲν ὕλη ***τῆς εἰσαγωγῆς*** σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

1. Τὰ δεκάκις χιλιοστά, τὰ ἑκατοντάκις χιλιοστὰ καὶ τὰ ἑκατομμυριοστά.

2. Τροπὴ δεκαδ. κλ. εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ περισσότερα ἢ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία.

3. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις δεκαδ. κλ. μὲ τὸν 10, 100, 1000.

Ἡ δὲ ὕλη ***τῶν τροπῶν*** τῶν δεκαδ. κλ. εἰς κοινὰ καὶ τῶν κοινῶν εἰς δεκαδικὰ ὀρθὸν εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

1. Τροπὴ κοινῶν δεκαδικῶν κλ. εἰς κοινὰ κλάσματα.

2. Τροπὴ κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά :

Α) εὔκολαι περιπτώσεις κατάλληλαι διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησιν,

Β) δύσκολαι περιπτώσεις κατάλληλαι διὰ τὴν γραπτὴν ἀρίθμηθμησιν, εἰς τὰς ὁποίας :

α) τὸ κοινὸν κλ. τρέπεται εἰς κοινὸν δεκαδ. κλάσμα καὶ

β) τὸ κοινὸν κλ. τρέπεται εἰς περιοδικὸν δεκ. κλάσμα.

3. (Ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς ἐμφανίσεως τῶν περιοδικῶν δ. κλ.) σχηματισμὸς ἐξαγομένων κατὰ προσέγγισιν α) εἰς συγκεκριμένα καὶ ἀφηρ. δεκαδ. κλ., β) εἰς κοινὰ κλάσματα, γ) εἰς ἀκεραίους.

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῶν 4 θεμελ. πράξεων εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα*** ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς. Αἱ περισσότεραι ἀπὸ αὐτὰς ἐδιδάχθηκαν, καθὼς ἠξεύρομεν, καὶ κατὰ τὸ 4ον σχολικὸν ἔτος, τὸ μόνον δὲ νέον, τὸ ὁποῖον θὰ παρουσιάσουν κατὰ τὴν τωρινὴν ἐπανάληψίν των, εἶναι, ὅτι θὰ δίδωνται εἰς αὐτὰς καὶ δεκαδικοὶ μὲ περισσότερα ἀπὸ 3 δεκαδικὰ ψηφία. Ἡ διάταξις ἑπομένως τῆς προκειμένης ὕλης δὲν θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὴν διάταξιν, τὴν ἐφαρμοσθεῖσαν διὰ τὰς 4 θεμελ. πράξεις τῶν δεκαδ. κλ. κατὰ τὸ 4ον σχολ. ἔτος, εἰμὴ μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι θὰ προστεθοῦν εἰς αὐτὴν καὶ ἐκεῖναι αἱ θεμελ. πράξεις, αἱ ὁποῖαι διδάσκονται κατὰ τὸ 5ον σχολ. ἔτος διὰ πρώτην φοράν.

Ὅθεν εἰς μὲν τὴν παλαιὰν διάταξιν τῆς ὕλης ***τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*** θὰ προστεθοῦν αἱ ἑξῆς νέαι περιπτώσεις :

1) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου μὲ δεκαδικὸν κλάσμα (π. χ. $3 \times 0{,}1$ $3 \times 0{,}5$ κ.τ.λ.).

2. Πολλαπλασιασμὸς δ. κλάσματος μὲ δεκαδικὸν κλάσμα (α) $0{,}3 \times 0{,}1$, β) $0{,}3 \times 0{,}5$, γ) $4{,}3 \times 0{,}5$, δ) $4{,}3 \times 2{,}5$ ε) $0{,}25 \times 0{,}1$ $0{,}25 \times 0{,}5$, ς) $2{,}25 \times 0{,}5$, $2{,}25 \times 1{,}5$ κ.τ.λ.).

Εἰς δὲ τὴν παλαιὰν διάταξιν τῆς ὕλης ***τῆς διαιρέσεως*** θὰ προστεθοῦν αἱ ἑξῆς νέαι περιπτώσεις :

1. Μερισμὸς καὶ μέτρησις ἀκεραίου μὲ δεκαδικὸν κλάσμα.

2. Μερισμὸς καὶ μέτρησις δεκαδ. κλ. μὲ δεκαδικὸν κλάσμα.

Ἡ ὕλη τέλος ***τῶν 4 θεμελιωδῶν πράξεων εἰς τὰ δεκαδ. καὶ κοινὰ κλ. μαζὶ*** σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς :

1. Προσθέσεις δεκαδ. καὶ κοινῶν κλ.

2. Ἀφαιρέσεις δεκαδ. καὶ κοινῶν κλ.

3. Πολλαπλασιασμὸς δεκαδ. κλάσματος μὲ κοινὸν κλάσμα καὶ

4. Διαίρεσις δεκαδ. κλάσματος μὲ κοινὸν κλάσμα.

Μολονότι ἡ διδασκαλία τῶν δεκαδ. κλασμάτων θὰ ἔχῃ κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ πολλὰς καὶ διαρκεῖς ἀναφορὰς πρὸς τὴν διδασκαλίαν τῶν κοινῶν κλασμάτων, τῶν ὁποίων ἔτσι θὰ γίνεται ***ἐσωτερικὴ*** ἐπανάληψις, ἐν τούτοις σκόπιμον εἶναι τὰ κοινὰ κλ. ***νὰ ἐπαναλαμβάνωνται καὶ συστηματικὰ*** κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν δεκαδικῶν, πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον θὰ ἠμπορῇ νὰ γίνεται κατὰ τὸ διδακτικὸν στάδιον τῆς ἀσκήσεως.

Αἱ ὕλαι τώρα ***τῶν προβλημάτων τῆς μέσης τιμῆς*** καὶ ***τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν*** καλὸν εἶναι νὰ διαταχθοῦν, ὅπως καὶ κατὰ τὸ 4 σχολικὸν ἔτος.

Τὰ ὑπόλοιπα τέλος ***σύνθετα προβλήματα*** σκόπιμον εἶναι νὰ διατάσσωνται ὡς ἑξῆς :

1. Προβλήματα λυόμενα μὲ πολλαπλ. καὶ πρόσθεσιν.

2. Προβλ. λυόμενα μὲ πολλαπλ., πρόσθ. καὶ ἀφαίρεσιν.

3. Προβλ. λυόμενα μὲ διαδοχικὰς ἀφαιρέσεις ἢ πρόσθ. καὶ ἀφαίρεσιν.

4. Προβλ. λυόμενα μὲ ἀφαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμόν.

5. Πρ. λυόμενα μὲ διαίρεσιν, ἀφαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμόν.

6. Προβλ. λυόμενα μὲ διαδοχ. πολλαπλασιασμούς.

ς) Ἡ διάταξις τῆς ὕλης τοῦ ἕκτου σχολικοῦ ἔτους.

Ἀπὸ τὰ σύνθετα ἐφηρμοσμένα προβλήματα, τὰ ὁποῖα διδάσκονται κατὰ τὸ ἔτος αὐτό, ἄλλα μὲν παρουσιάζουν πραγματικὰς σχέσεις περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον γνωστὰς εἰς τοὺς μαθητάς, ἄλλα δὲ ὁλωσδιόλου ἀγνώστους, αἱ ὁποῖαι δι' αὐτὸ καὶ πρέπει νὰ διδαχθοῦν ἰδιαιτέρως εἰς αὐτούς. Ὅθεν τὰ προκείμενα προβλήματα σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς :

1) Προβλήματα, τῶν ὁποίων αἱ πραγματικαὶ σχέσεις εἶναι ὁπωσδήποτε γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθητάς.

2) Προβλήματα, τῶν ὁποίων αἱ πραγματικαὶ σχέσεις δὲν εἶναι γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθητάς.

Ἐρχόμενοι εἰς τὴν διάταξιν ***τῶν πρώτων*** παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς αὐτὰ ἀνήκουν τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν καὶ τὰ τῆς μέσης τιμῆς. Ὁ τρόπος τῆς λύσεως τῶν τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἐφόσον δὲν περιέχουν ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ δὲν λύονται μὲ κλασματικὴν διάταξιν, εἶναι γνωστὸς εἰς τοὺς μαθητὰς ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τοῦ 4ου καὶ τοῦ 5ου σχολικοῦ ἔτους. Ἐξ ἄλλου ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν προϋποθέτει τὴν τελείαν κατοχὴν τοῦ τρόπου τῆς λύσεως τῶν προβλημ. τῆς ἁπλῆς μ. τῶν τριῶν. Μόνον τὰ προβλήματα τῆς μέσης τιμῆς ἀπαιτοῦν νέον καὶ ἄγνωστον εἰς τοὺς μαθητὰς τρόπον λύσεως (μὲ πολλαπλασιασμόν, πρόσθεσιν καὶ διαίρεσιν), ἐπειδὴ δὲ εἶναι κυρίως εἰπεῖν προβλήματα μίξεως, ἠμποροῦν νὰ διδαχθοῦν καὶ μετὰ τῶν ἄλλων εἰς τὴν τάξιν αὐτὴν διδασκομένων προβλημάτων τῆς μίξεως. Ὅθεν τὰ 3 ἀνωτέρω εἴδη τῶν προβλημάτων σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς :

1. Προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

2. Προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

3. Προβλήματα τῆς μέσης τιμῆς, τὰ ὁποῖα εἶναι κυρίως προβλήματα τῆς μίξεως καὶ ἠμποροῦν νὰ διδαχθοῦν καὶ κατόπιν μαζὶ μὲ τὰ ἄλλα προβλήματα τῆς μίξεως (ἴδ. κατωτ.).

Ἡ ὕλη ***τῶν προβλημάτων τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν*** —καθόσον λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ νέα στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα

παρουσιάζουν κατὰ τὸ παρὸν σχολικὸν ἔτος καὶ τὰ ὁποῖα ἀνεφέραμεν ἀμέσως ἀνωτέρω—σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς (ἴδ. Räther, ὅπ. ἀν., μέρ. 3, σελ. 199) :

1. Προβλήματα μὲ ποσὰ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, εἰς τὰ ὁποῖα:

Α) ὁ τρίτος ὅρος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου (λυόμενα διὰ πολλαπλασιασμοῦ),

Β) ὁ τρίτος ὅρος εἶναι ποσοστὸν τοῦ πρώτου (λυόμενα διὰ διαιρέσεως).

Γ) ὁ τρίτος ὅρος δὲν εἶναι οὔτε πολλαπλάσιον οὔτε ποσοστὸν τοῦ πρώτου (λυόμενα διὰ διαιρέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ) καὶ εἰς τὰ ὁποῖα :

α) ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ὅρος παριστάνουν μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως (π.χ. καὶ οἱ δύο μέτρα) καὶ :

1) ὑπάρχει κλάσμα εἰς τὸν δεύτερον ὅρον,

2) ὑπάρχει κλάσμα καὶ εἰς τὸν τρίτον ὅρον,

3) ὑπάρχει κλάσμα καὶ εἰς τὸν πρῶτον ὅρον,

β) ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ὅρος παριστάνουν μονάδας διαφόρων τάξεων (π.χ. ὁ πρῶτος μέτρα καὶ ὁ τρίτος ἑκατοστὰ τοῦ μ.).

2. Προβλήματα μὲ ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διατασσόμενα ὅπως τὰ προηγούμενα.

Ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις λύεται ἀπὸ τοὺς μαθητὰς 1) ἀπὸ μνήμης ἢ καὶ ἐγγράφως, ἀλλὰ χωρὶς διάταξιν καὶ 2) ἐγγράφως μὲ διάταξιν. Εἰς τὴν πρώτην πάλιν ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς περιπτώσεις τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τρίτος ὅρος δὲν εἶναι οὔτε πολλαπλάσιον οὔτε ποσοστὸν τοῦ πρώτου, λύονται 1) διὰ τῆς εὑρέσεως τῆς τιμῆς τῆς μονάδος καὶ 2) διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναλύσεως. Εἰς τὴν δευτέρην περίπτωσιν τὰ προβλήματα αὐτὰ λύονται 1) διὰ τῆς εὑρέσεως τῆς τιμῆς τῆς μονάδος καὶ 2) διὰ τῆς ***κλασματικῆς*** διατάξεως.

Ἡ ὕλη τώρα ***τῶν προβλημάτων τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν*** διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

1. Προβλήματα μὲ ποσὰ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

2. Προβλήματα καὶ μὲ ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἡ διάταξις τώρα ***τῶν προβλημάτων, τῶν ὁποίων αἱ πραγματικαὶ σχέσεις δὲν εἶναι γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθητάς***, σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς :

1. Προβλήματα μετατροπῆς ἑλληνικῶν νομισμάτων εἰς ξένα καὶ ξένων εἰς ἑλληνικά, λυόμενα μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν.

2. Προβλήματα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ποσοστῶν, λυόμενα μὲ τὴν ἁπλῆν καὶ τὴν σύνθετην μέθοδον τῶν τριῶν.

3. Προβλήματα τῆς ἑταιρείας, λυόμενα μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ἢ μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ λόγου.

4. Τὰ ἁπλᾶ προβλήματα τῆς μίξεως, λυόμενα μὲ τὴν εὕρεσιν τῆς μέσης τιμῆς ἢ μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ἢ μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ λόγου.

Ἡ ὕλη ***τῶν προβλημάτων τῆς μετατροπῆς τῶν Ἑλλην. νομισμάτων εἰς ξένα κ.τ.λ.***,—τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἰδιαίτερην τάξιν τῶν προβλημάτων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν κυκλοφορίαν τοῦ χρήματος,—σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Τὰ σπουδαιότερα ἀπὸ τὰ ξένα νομίσματα.

2. Ἡ μετατροπὴ τῶν Ἑλληνικῶν νομισμάτων εἰς ξένα.

3. Ἡ μετατροπὴ τῶν ξένων νομισμάτων εἰς Ἑλληνικά.

Τὰ προβλήματα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ποσοστῶν—εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προταχθῇ μία σύντομη πραγματικὴ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ποσοστοῦ, τοῦ τόσον εἰς τὰ ἑκατὸν καὶ εἰς τὰ χίλια—καλὸν εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

1. Προβλήματα βασιζόμενα εἰς τὸ τόσον τὰ ἑκατόν.

2. Προβλήματα βασιζόμενα εἰς τὸ τόσον εἰς τὰ χίλια.

Ἡ διάταξις τώρα τῆς ὕλης ***τῶν προβλημάτων τῶν βασιζομένων εἰς τὸ τόσον τὰ ἑκατὸν*** σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχῃ εἰς τὰς γενικάς της γραμμὰς ὡς ἑξῆς:

1. Προβλήματα ἀγορᾶς καὶ πωλήσεως, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον τὰ ἑκατὸν δὲν ἀναφέρεται εἰς τὸν χρόνον, ἀλλὰ μόνον εἰς τὸ χρῆμα.

2. Προβλήματα τῆς κυκλοφορίας τοῦ χρήματος, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον τὰ ἑκατὸν ἀναφέρεται εἰς τὸν χρόνον.

3. Προβλήματα ἐκπτώσεως, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον τὰ ἑκατὸν ἀναφέρεται καὶ εἰς τὸν χρόνον καὶ εἰς τὸ χρῆμα, ἤτοι τὰ προβλήματα τῆς (ἐξωτερικῆς) ὑφαιρέσεως.

4. Προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον τὰ ἑκατὸν ἀναφέρεται εἰς ἄλλας πραγματικὰς σχέσεις, π. χ. εἰς τὰ συστατικὰ διαφόρων

ὑλῶν, εἰς τὸν πληθυσμὸν καὶ τὴν θνησιμότητα πόλεως, χώρας κτλ.

Καὶ ἡ μὲν ὕλη ***τῶν προβλημάτων τῆς ἀγορᾶς καὶ πωλήσεως***, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον τὰ ἑκατὸν ἀναφέρεται εἰς τὸ χρῆμα, σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Προβλήματα ***τῆς ἐκπτώσεως***, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προταχθῇ μία σύντομη πραγματικὴ εἰσαγωγὴ περὶ τῆς ἐμπορικῆς ἐκπτώσεως καὶ τὰ ὁποῖα ὀρθὸν εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

Α. Προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῆς ἐκπτώσεως καὶ τοῦ ποσοῦ τοῦ καταβαλλομένου τοῖς μετρητοῖς.

Β. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται, πόσον τὰ ἑκατὸν γίνεται ἡ ἔκπτωσις.

Γ. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου ποσοῦ τοῦ λογαριασμοῦ, (τὰ ὁποῖα ὡς ὀλιγώτερον χρήσιμα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον ἠμποροῦν καὶ νὰ παραλειφθοῦν).

2. Προβλήματα ***κέρδους καὶ ζημίας***, τὰ ὁποῖα σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

Α. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς καὶ τὸ κέρδος εἰς τὰ ἑκατὸν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου κέρδους καὶ τῆς πωλήσεως.

Β. Προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς καὶ τῆς πωλήσεως ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, πόσον εἰς τὰ ἑκατὸν εἶναι τὸ κέρδος.

Γ. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς πωλήσεως καὶ τοῦ κέρδους εἰς τὰ ἑκατὸν ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς.

3. Προβλήματα ***τοῦ ἀποβάρου***, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προταχθῇ ἡ μετάδοσις συντόμων πραγματικῶν γνώσεων σχετικῶν μὲ τὸ ἀπόβαρον καὶ τὰ ὁποῖα καλὸν εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

Α. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ἀπὸ τὸ ἀκαθάριστον βάρος καὶ τὸ ἀπόβαρον εἰς τὰ ἑκατὸν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ καθαρὸν βάρος.

Β. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ἀπὸ τὸ ἀκαθάριστον καὶ τὸ καθαρὸν βάρος ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀπόβαρον ἐν ὅλῳ ἢ εἰς τὰ ἑκατόν.

Γ. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ἀπὸ τὸ καθαρὸν βάρος καὶ τὸ ἀπόβαρον ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀκαθάριστον βάρος καὶ τὰ ὁποῖα ὡς ὀλιγώτερον χρήσιμα εἰς τὸν πρακτικὸν βίον ἠμποροῦν καὶ νὰ παραλειφθοῦν.

Δ. Προβλ. τοῦ ἀποβάρου συνδυαζόμενα μὲ ὑπολογισμὸν τοῦ κέρδους καὶ τῆς ζημίας.

Σημειωτέον τώρα, ὅτι εἰς τὰ περισσότερα ἀπὸ τὰ προβλήματα τῆς ἀγορᾶς καὶ τῆς πωλήσεως, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον εἰς τὰ ἑκατὸν ἀναφέρεται εἰς τὸ χρῆμα, θὰ καλλιεργῆται καὶ ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις, προτασσομένη συνηθέστατα τῆς γραπτῆς.

Ἡ ὕλη τώρα ***τῶν προβλημάτων τῆς κυκλοφορίας τοῦ χρήματος***, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον τὰ ἑκατὸν ἀναφέρεται εἰς τὸν χρόνον, σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Προβλήματα ***τοῦ τοκισμοῦ τῶν χρημάτων***, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προταχθῇ μία σύντομη πραγματικὴ εἰσαγωγὴ περὶ τοῦ τοκισμοῦ καὶ τὰ ὁποῖα καλὸν εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

Α. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος (α) ὁ ἐτήσιος, β) ὁ πολυετὴς καὶ ὁ τόκος μηνῶν καὶ ἡμερῶν καὶ γ) ὁ τόκος μαζὶ μὲ τὸ κεφάλαιον).

Β. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον (α) ἀπὸ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν ἐτήσιον τόκον καὶ β) ἀπὸ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν πολυετῆ τόκον ἢ τὸν τόκον μηνῶν καὶ ἡμερῶν).

Γ. Προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον (α) ἀπὸ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν ἐτήσιον τόκον καὶ β) ἀπὸ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν πολυετῆ τόκον ἢ τὸν τόκον μηνῶν καὶ ἡμερῶν).

Δ. Προβλ., εἰς ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος.

Σημειωτέον, ὅτι καὶ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τοκισμοῦ θὰ καλλιεργῆται καὶ ἡ ἀπὸ μνήμης ἀρίθμησις, προτασσομένη συνηθέστατα τῆς γραπτῆς.

2. Προβλήματα ***τοῦ ἀνατοκισμοῦ τῶν χρημάτων***, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προτάσσεται μία σύντομη πραγματικὴ εἰσαγωγὴ περὶ ταμιευτηρίων καὶ ἀνατοκισμοῦ.

3. Προβλήματα ***ἀγορᾶς καὶ πωλήσεως τίτλων***, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προταχθῇ ἐπίσης μία σύντομη πραγματικὴ εἰσαγωγὴ περὶ ἱδρύσεως Τραπεζῶν καὶ Ἑταιρειῶν καὶ ἐκδόσεως μετοχῶν, καθὼς καὶ περὶ κρατικῶν, τραπεζιτικῶν, δημοτικῶν κ. λ. π. δανείων καὶ ὁμολογιῶν.

Σχετικὰ τώρα μὲ τὰ προβλήματα ***τῆς ὑφαιρέσεως*** ἔχομεν νὰ ατηρήσωμεν, ὅτι ὡσαύτως πρέπει νὰ προταχθῇ εἰς τὴν διδασκαλίαν των μία σύντομη πραγματικὴ εἰσαγωγή, μὲ τὴν ὁποίαν

θὰ δοθοῦν εἰς τοὺς μαθητὰς αἱ ἀναγκαῖαι γνώσεις περὶ τῶν γραμματίων εἰς διαταγήν, τῶν συναλλαγματικῶν καὶ τῶν ἐπιταγῶν.

Τὰ δὲ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τόσον τὰ ἑκατὸν ἀναφέρεται ***εἰς ἄλλας πραγματικὰς σχέσεις***, σκόπιμον εἶναι νὰ διατάσσεται κατὰ τὰς σχέσεις αὐτάς.

Τὰ προβλήματα τέλος ***τὰ βασιζόμενα εἰς τὸ τόσον εἰς τὰ χίλια*** θὰ εἶναι κυρίως προβλήματα ***ἀσφαλειῶν***, δι᾽ αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ προτάσσεται τῆς διδασκαλίας των μία σύντομη εἰσαγωγή, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ δίδωνται εἰς τοὺς μαθητὰς αἱ ἀναγκαῖαι πραγματικαὶ γνώσεις, αἱ σχετικαὶ μὲ τὰς ἀσφαλείας.

Ἡ ὕλη τώρα ***τῶν προβλημάτων τῆς ἑταιρείας*** σκόπιμον εἶναι νὰ διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

1. Ὁ λόγος· ἡ ἔννοια τοῦ λόγου καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς μορφῆς του.

2. Τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρείας, τὰ ὁποῖα λύονται ὄχι μόνον μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ λόγου, ἀλλὰ καὶ μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, καλὸν δὲ εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

Α. Προβλήματα βασιζόμενα εἰς τὸν γεωμετρικὸν λόγον (προβλ. τῆς ἑταιρείας μὲ τὴν στενωτέραν ἔννοιαν), τὰ ὁποῖα διατάσσονται ὡς ἑξῆς:

α) προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ὁ λόγος καὶ

β) προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει πρῶτον νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος.

Β. Προβλήματα βασιζόμενα εἰς τὸν ἀριθμητικὸν λόγον, τὰ ὁποῖα διατάσσονται ὡς ἑξῆς:

α) προβλ., εἰς τὰ μέρη τῶν ὁποίων γίνεται μόνον πρόσθεσις ἢ μόνον ἀφαίρεσις, καὶ

β) προβλ., εἰς τὰ μέρη τῶν ὁποίων γίνεται πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

Γ. Προβλήματα βασιζόμενα καὶ εἰς τὸν γεωμετρικὸν καὶ εἰς τὸν ἀριθμ. λόγον.

Δ. Προβλ. βασιζόμενα εἰς συνθέτους γεωμετρικοὺς λόγους (προβλ. τῆς συνθέτου ἑταιρείας).

Ἡ ὕλη τέλος ***τῶν ἁπλῶν προβλημάτων τῆς μίξεως*** σκόπιμον εἶναι νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς:

1. Προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς μίγματα.

2 Προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς κράματα, τὰ ὁποῖα καλὸν εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

Α. Προβλ. ἀναφερόμενα εἰς χρυσᾶ καὶ ἀργυρᾶ κοσμήματα, σκεύη κ.τ.λ., εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προταχθῇ μία σύντομη πραγματικὴ εἰσαγωγὴ καὶ τὰ ὁποῖα καλὸν εἶναι νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

α) προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ καθαρὸν βάρος,

β) προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος καὶ

γ) προβλ., εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ καθαροῦ βάρους.

Β. Προβλ. ἀναφερόμενα εἰς τὰ νομίσματα, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προταχθῇ ὅμοια εἰσαγωγή.

Γ. Προβλ. ἀναφερόμενα εἰς τὸ οἰνόπνευμα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐπίσης πρέπει νὰ προταχθῇ μία τέτοια εἰσαγωγή].

---

3. Η ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΙΣ.

[Ὅτι αἱ ὕλαι τῶν διαφόρων μαθημάτων πρέπει νὰ θέτωνται εἰς κάθε δυνατὴν ἐπαφὴν ἀναμεταξύ των, διὰ νὰ διευκολύνεται ἔτσι ἡ ἀφομοίωσίς των καὶ νὰ ἀποκαθίσταται ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλύτερη ἑνότης εἰς τὸν ὅλον παραστατικὸν κύκλον τῶν μαθητῶν, δὲν χωρεῖ καμία ἀμφιβολία. Τὸ ζήτημα μόνον εἶναι, πῶς πρέπει νὰ γίνεται ἡ σύνδεσις αὐτή, ἡ συγκέντρωσις αὐτὴ τῶν ὑλῶν τῶν διαφόρων μαθημάτων, διὰ νὰ ἐπιτυγχάνεται μὲν καλύτερα ὁ ἐπιδιωκόμενος γενικὸς σκοπός, νὰ μὴ ζημιώνεται δὲ ἐξ ἄλλου καὶ ἡ αὐτοτέλεια τοῦ κάθε μαθήματος, συνεπῶς δὲ καὶ οἱ ἰδιαίτεροι σκοποί, οἱ ἐπιδιωκόμενοι ἀπὸ αὐτό].

Ὁ *Ziller*, ἀποβλέπων εἰς τὸ γεγονός, ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη εἶναι βοηθητικὴ τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν, ἐξετάζουσα τὴν ὕλην των ἀπὸ τῆς εἰδολογικῆς ἀπόψεως τοῦ ἀριθμοῦ, φρονεῖ, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ διδασκαλία πρέπει νὰ συνδέεται στενὰ μὲ τὴν φυσιογνωστικήν. Ἐν τούτοις δὲν ἀποκλείει τὴν σύνδεσίν της καὶ μὲ

τὰ ἄλλα πραγματικὰ μαθήματα, ἐφόσον καὶ ἡ ὕλη αὐτῶν ἐπιδέχεται ἐξέτασιν ἀπὸ τῆς ἀριθμητικῆς ἀπόψεως.

Οἱ θιασῶται τοῦ Ziller ἐπροσπάθησαν νὰ συνδέσουν ὑπὸ τὸ πνεῦμά του τὴν διδασκαλίαν τῆς Ἀριθμητικῆς μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἄλλων πραγματικῶν μαθημάτων. Εἰς τὰς προσπαθείας δὲ αὐτὰς ἠμποροῦμεν νὰ διακρίνωμεν δύο **κατευθύνσεις**. Οἱ ἀκολουθοῦντες τὴν πρώτην κάμνουν τὴν σύνδεσιν αὐτὴν τόσον στενήν, ὥστε μὲ αὐτὴν παραβλάπτεται ἡ ἐπαλληλία τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ἡ ἀπαιτουμένη ἀπ' αὐτὴν τὴν φύσιν της. Οἱ ἀκολουθοῦντες τὴν δευτέραν κατεύθυνσιν καθορίζουν πρῶτα τὴν διαδοχὴν τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ὅπως ἐπιβάλλεται ἀπὸ τὴν ἐπιστημονικὴν ἄποψιν, ἤτοι ἀπὸ αὐτὴν τὴν φύσιν της, καὶ μόνον μετ' αὐτὸ ἀναζητοῦν καὶ ἀποκαθιστοῦν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρας σχέσεις μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῶν ἄλλων μαθημάτων.

[Εἰς τοὺς πρώτους ἀνήκει μεταξὺ ἄλλων ὁ Teupser, ὅπως τουλάχιστον παρουσιάζεται κατὰ τὴν πρώτην του περίοδον (ἴδ. ἀν. σελ. 321). Εἰς τὴν περίοδον αὐτὴν ἀνήκει ἡ ἐργασία του «Das Rechnen im 2 Schuljahr» (Jahrbuch des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik, 21 Jahrgang, σ. 27 κ. ἀκ. καὶ 23 Jahrgang, σ. 54 κ. ἀκ.), εἰς τὴν ὁποίαν πραγματεύεται περὶ τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας τοῦ 2 σχολ. ἔτους. Ὁ Teupser δὲν διατάσσει τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην ἐπὶ τῇ βάσει τῆς αὐστηρᾶς ἐπιστημονικῆς ἀπόψεως. Ὁ καθορισμὸς τῶν μεθοδικῶν ἑνοτήτων τῆς ἀριθμητικῆς πρέπει κατὰ τὴν γνώμην του νὰ γίνεται «σύμφωνα μὲ τὰς ὑποδείξεις τὰς προερχομένας ἀπὸ τὴν πραγματικὴν ὕλην». Καθορίζει μὲν ἐν γένει ὡς ἀριθμητικὴν ὕλην τοῦ δευτέρου σχολικοῦ ἔτους τοὺς ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς 1—100, ἀλλά, «ἂν ἡ πραγματικὴ ὕλη δίδῃ ἀφορμὴν εἰς ὑπέρβασιν τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς, ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὴν ὑπέρβασιν αὐτήν, μὴ προβαίνοντες βέβαια εἰς συστηματικὴν διδασκαλίαν τῶν ἐννοιῶν τῶν ἄνω τοῦ 100 ἀριθμῶν, διασαφοῦντες ὅμως ἐν πάσῃ περιπτώσει αὐτοὺς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐννοιῶν τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν εἰς τοὺς μαθητὰς ἀριθμῶν». Εἰς τὴν 10 ἀκόμη μεθοδικὴν ἑνότητα τῆς διατάξεως τοῦ Τ. παρουσιάζονται ἀριθμοὶ τῆς σειρᾶς 1—200, εἰς τὴν ἴδιαν δὲ ἑνότητα διδάσκεται ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμῶν ἐχόντων δεκάδας καὶ μονάδας, ἐνῷ δὲν ἔχει διδαχθῇ ἀκόμη ἡ πρόσθεσις καθαρῶν δεκάδων καὶ δεκάδων καὶ μονάδων, ἡ ὁποία διδάσκεται κατὰ πρῶτον εἰς τὴν ἑπομένην ἑνότητα. Εἰς τὴν 6 μεθοδικὴν ἑνότητα διδάσκεται ἡ σειρὰ τοῦ 7, ἐνῷ ἡ διδασκαλία τῆς σειρᾶς τοῦ 4 ἐπακολουθεῖ εἰς τὴν ἐνάτην. Γίνεται δὲ τοῦτο, διότι εἰς τὸν Ῥοβινσῶνα, ἀπὸ τὴν ὕλην τοῦ ὁποίου κανονίζει ὁ Τ. τὴν ἀριθμητ. ὕλην τοῦ δευτέρου σχολικοῦ ἔτους, ἐμφανίζεται πρῶτα ἡ ἑβδομάς, ἀργότερα δὲ (κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἡμερολογίου) λέγεται, ὅτι ὁ μὴν ἔχει 4 ἑβδομάδας κ.τ.λ. Καὶ ζητεῖ μὲν ὁ Τ. νὰ ἐκπληρώσῃ καὶ τὰς μεθοδικὰς ἀπαιτήσεις τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, ἀλλ᾽ ὅμως τὸ οὐσιῶδες δι᾽ αὐτὸν δὲν εἶναι ἡ ἐπιστημονικὴ καὶ μεθοδικὴ ἀπαίτησις τῆς προόδου ἀπὸ τὰ εὐκολώτερα εἰς τὰ δυσκολώτερα, ἤτοι εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἀπὸ τὰ ἁπλούστερα εἰς τὰ συνθετώτερα, ἀλλὰ ἡ ἀρχὴ μιᾶς μονομεροῦς συγκεντρώσεως, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν τὸ τί θὰ διδάσκεται ἑκάστοτε εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν πρέπει νὰ καθορίζεται ἀπὸ τὴν ὕλην ἑνὸς ἄλλου μαθήματος, ἀπὸ τὴν καλουμένην συγκεντρωτικὴν ὕλην, ὁποία εἶναι ἐπὶ τοῦ προκειμένου ἡ ὕλη τοῦ Ῥοβινσῶνος.

Ὡς ἀνήκοντες εἰς τὴν δεύτερην κατεύθυνσιν ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὁ *Rein* καὶ ὁ *Pickel*. Θεωροῦν μὲν καὶ αὐτοὶ τὴν ἐξάρτησιν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῶν πραγματικῶν μαθημάτων ὡς φυσικήν, ἀλλ᾽ ὅμως παρατηροῦν ἐξ ἄλλου (εἰς τὸ 2 Schuljahr) καὶ τὰ ἀκόλουθα: «ἡ Ἀριθμητικὴ παρουσιάζει ἀπὸ ὅλα τὰ μαθήματα τὰς μεγαλυτέρας δυσκολίας εἰς τὴν συγκέντρωσιν. Τὸ αἴτιον δὲ τοῦ πράγματος ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι ἡ ἐπιτυχία τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἀδιάσπαστον καὶ συστηματικὴν πρόοδον τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ἡ πρόοδος δὲ αὐτὴ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐναρμονισθῇ πάντοτε χωρὶς δυσκολίας πρὸς τὴν πρόοδον τῆς ὕλης τῶν πραγματικῶν μαθημάτων. Ἐν τούτοις δὲν πρέπει διὰ τὸν λόγον αὐτὸν νὰ μὴ προσλάβωμεν καὶ τὴν Ἀριθμητικὴν εἰς τὸν διὰ τῆς συγκεντρώσεως πραγματοποιούμενον σύνδεσμον τῶν μαθημάτων». Οἱ μνημονευθέντες Παιδαγωγικοὶ συνδέουν τὴν ἀρίθμησιν κατὰ τὰ πρῶτα σχολικὰ ἔτη μὲ τὴν φρονηματιστικὴν διδασκαλίαν καὶ τὴν Φυσιογνωσίαν. Κατὰ τὸ πρῶτον σχολικὸν ἔτος ἡ ἐπεξεργασία τοῦ ἀριθμοῦ 3 ἀφορμᾶται ἀπὸ ἕνα παραμύθιον διδασκόμενον εἰς τὴν τάξιν, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχουν 3 πρόσωπα, ἤτοι ἡ μικρὰ ἡρωῒς τοῦ

παραμυθίου καὶ ὁ πατὴρ καὶ ἡ μήτηρ της, πρὶν τὴν ἀφήσουν ὀρφανήν. Ἡ ἐπεξεργασία τοῦ ἀριθμοῦ 8 ἀφορμᾶται ἀπὸ τὰ 7 ἐρίφια καὶ τὴν μητέρα των τοῦ παραμυθίου τοῦ λύκου καὶ τῶν 7 ἐριφίων. Οἱ Rein καὶ Pickel παρατηροῦν ἐπίσης, ὅτι καὶ ἡ διήγησις τοῦ Ῥοβινσῶνος ἐκτὸς τῆς ποικίλης φυσιογνωστικῆς ὕλης, τὴν ὁποίαν περιέχει, παρουσιάζει καὶ ἀφθονώτατα στοιχεῖα προκαλοῦντα αὐτόχρημα τὴν ἀρίθμησιν. Τέτοια εἶναι π.χ. ἡ ἡλικία τοῦ Ῥοβινσῶνος, ὅταν ἐγκατέλειψε τὴν πατρικὴν οἰκίαν, ἡ διάρκεια τῆς τρικυμίας καὶ τοῦ ταξιδίου του, ἡ διαίρεσις τοῦ χρόνου, τὴν ὁποίαν κάμνει, ἡ κατασκευὴ τοῦ ἡμερολογίου καὶ τοῦ ἡλιακοῦ ὡρολογίου κτλ. κτλ. Ἀλλὰ ὁ Rein καὶ ὁ Pickel λαμβάνουν ὑπ᾽ ὄψιν καὶ τὸν κύκλον τῆς ἐμπειρίας τῶν παίδων, ὅπως δεικνύει ἡ προσαρμογὴ τῆς διδασκαλίας τοῦ ἀριθμοῦ 6 εἰς τὸ ἔτος τῆς ἡλικίας τῶν μαθητῶν τῆς πρώτης τάξεως, τοῦ ἀριθμοῦ 7 εἰς τὰς ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 10 εἰς τὰ μονόλεπτα, τὰ ἀποτελοῦντα ἕνα δεκάλεπτον.— Ἑπομένως καὶ οἱ Rein καὶ Pickel συνδέουν, ὅπως καὶ ὁ Teupser, τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν πραγματικῶν μαθημάτων (καὶ συμπληρωματικῶς μὲ τὸν κύκλον τῆς ἐμπειρίας τῶν παίδων). Ἐν τούτοις παρατηροῦν ῥητῶς (2 Schuljahr, σ. 80) καὶ τὰ ἀκόλουθα: «ἐπειδὴ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν δὲν ἠμποροῦμεν νὰ παρίδωμεν τὴν βαθμιαίαν καὶ συστηματικὴν διαδοχὴν τῆς ὕλης, ὅπως κάμνομεν εἰς τὴν Φυσιογνωσίαν, τὴν Γεωγραφίαν, τὴν γλωσσικὴν διδασκαλίαν καὶ τὴν Ὠδικήν, διότι εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν κάθε βῆμα ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἀμέσως προηγούμενον καὶ πρέπει νὰ προπαρασκευασθῇ δι᾽ αὐτοῦ, προφανῶς εἰς τὸ μάθημα αὐτὸ ἡ πρόοδος τῆς διδασκαλίας δὲν ἠμπορεῖ νὰ καθορισθῇ ἀπὸ τὰς ὑποδείξεις τῆς συγκεντρωτικῆς ὕλης. Ἀπεναντίας εἶναι ἐπάναγκες, ὅπως εἰς κάθε βαθμίδα διδασκαλίας προκαθορίζωνται οἱ ἀριθμητικοί της σκοποὶ καὶ ἡ πρὸς ἐκπλήρωσιν τῶν σκοπῶν αὐτῶν ἀπαιτουμένη διαδοχὴ τῆς σχετικῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, πρὶν γίνῃ ὁποιαδήποτε σκέψις περὶ τῆς συνδέσεως τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων μὲ τοὺς πραγματικοὺς κύκλους τῆς φρονηματιστικῆς διδασκαλίας καὶ τῆς Φυσιογνωσίας».

Ὁ *Hartmann* ἀφιερώνει εἰς τὸ ἔργον του «Der Rechenunterricht κ.τ.λ.» ἰδιαίτερον κεφάλαιον διὰ τὰς συνδέσεις τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης (ἴδ. σελ. 339—345). Ἐν πρώτοις συνιστᾷ συνδέσεις **εἰδολογικῆς φύσεως**. Ἔτσι πρέπει κατὰ τὴν γνώμην του νὰ συνδέωνται ἀναμεταξύ των συγγενεῖς ἀριθμητικαὶ πράξεις, ὅπως ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς κ.τ.λ. Ἄλλαι τέτοιαι συνδέσεις εἶναι ἡ σύνδεσις τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως μὲ τὴν ἀπὸ μνήμης καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τῆς Ἀριθμητικῆς εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Αἱ συνδέσεις αὐταὶ δὲν παρουσιάζουν τίποτε νέον, ἀλλὰ γίνονται ἀνέκαθεν εἰς κάθε ὀρθὴν ἀπὸ μεθοδικῆς ἀπόψεως ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν. Χαλαρώτεροι σύνδεσμοι εἰδολογικῆς φύσεως δημιουργοῦνται κατόπιν μεταξὺ τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας καὶ τῆς διδασκαλίας τῆς γραφῆς (πρβ. τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμητικῶν ψηφίων), τῆς Ἰχνογραφίας (κατὰ τὴν μέτρησιν) καὶ τῆς Ὠδικῆς (εἴδη τοῦ ῥυθμοῦ, ἀξίαι τῶν φθογγοσήμων, ταχύτητες).

Ἐν σχέσει τώρα μὲ τὰς **ὑλικὰς** συνδέσεις δεικνύει ὁ Hartmann μεγαλύτερην ἐλευθερίαν ἀπὸ τοὺς Rein καὶ Pickel. Κατὰ τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον σχολικὸν ἔτος ἀπαιτεῖ νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν πράγματα, τὰ ὁποῖα ὄχι μόνον ἠμποροῦν νὰ ἀριθμηθοῦν, ἀλλὰ καὶ **προκαλοῦν** τὴν ἀρίθμησιν. Δι' αὐτὸ δὲν συνδέει τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην τῶν ἐτῶν αὐτῶν μὲ τὴν φρονηματιστικήν, τὰ παραμύθια καὶ τὸν Ῥοβινσῶνα, ἀλλὰ μὲ πραγματικὰς ὕλας ἀναφερομένας εἰς τὴν φύσιν καὶ τὸν βίον, αἱ ὁποῖαι—ἐφόσον δὲν εἶναι γνωσταὶ εἰς τοὺς παῖδας ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν των—ἔχουν γίνει γνωσταὶ εἰς αὐτοὺς ἀπὸ τὸ μάθημα τῆς Πραγματογνωσίας καὶ ἐπιβάλλουν αὐτόχρημα τὴν ἀρίθμησιν. Κατὰ τὸ 3 καὶ 4 σχολικὸν ἔτος συνδέει τὴν ἀριθμητικὴν ὕλην καὶ μὲ ὕλας ἀπὸ τὴν Φυσικὴν Ἱστορίαν καὶ τὴν Πατριδογνωσίαν. Ἀπὸ τὸ 5 σχολικὸν ἔτος χρησιμοποιεῖ εἰς τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν καὶ ὕλας ἀπὸ τὴν Ἱστορίαν καὶ τὴν Γεωγραφίαν, κατὰ δὲ τὸ 7 καὶ 8 καὶ ὕλας ἀπὸ τὴν Φυσικήν]. [1]

Ὅπως ὁ Ziller, ἔτσι καὶ ὁ *Dörpfeld* ἀπαιτεῖ τὴν σύνδεσιν τῆς Ἀριθμητικῆς μὲ τὰ πραγματικὰ μαθήματα. Τὰς σχετικάς του ἀντιλήψεις τὰς εἴδαμεν εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς πραγματικῆς

[1] Τὰ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ἔχουν ληφθῆ ἀπὸ παλαιότερην ἔκδοσιν τῆς Μεθοδικῆς τοῦ Rude.

ἀριθμήσεως, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ παραπέμπομεν τόσον ὡς πρὸς αὐτόν, ὅσον καὶ ὡς πρὸς ὅλους ἐκείνους τοὺς Παιδαγωγικούς, ὅσοι ὁρμώμενοι ἀπὸ τὴν ἰδέαν τῆς συγκεντρώσεως, ἀπὸ τὴν ἰδέαν δηλαδὴ τῆς συνδέσεως τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας μὲ τὰ πραγματικὰ μαθήματα, ἀπαιτοῦν τὴν ἐφαρμογὴν τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως εἰς τὸ κατώτερον σχολεῖον.

Ἡ ἰδική μας τώρα γνώμη περὶ τῆς συγκεντρώσεως συνοψίζεται εἰς τὰ ἀκόλουθα:

[α) Ἡ ἀριθμητ. διδασκαλία σκόπιμον εἶναι διὰ τοὺς γνωστοὺς γενικοὺς διδακτικοὺς λόγους νὰ συνδέεται στενὰ μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν πραγματικῶν μαθημάτων. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἡ μὲν ἀριθμ. διδασκαλία πρέπει ὄχι μόνον νὰ ἐφοδιάζῃ τοὺς μαθητὰς μὲ ὅλας τὰς ἀριθμητ. γνώσεις, τῶν ὁποίων θὰ ἔχουν ἀνάγκην κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν πραγματικῶν μαθημάτων πρὸς κατανόησιν τῶν ὑλῶν των καὶ ἀπὸ τῆς ἀριθμητ. ἀπόψεως, ἀλλὰ καὶ νὰ ἐκλέγῃ καὶ ἡ ἴδια προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς διαφόρους ὕλας τῶν μαθημάτων ἐκείνων, καταλλήλους δι' ἀριθμητικὴν ἐπεξεργασίαν, ἡ δὲ διδασκαλία τῶν πραγματικῶν μαθημάτων ὀφείλει ὄχι μόνον νὰ διασαφῇ τελείως τὰ πραγματικὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα θὰ χρησιμοποιῇ ἡ ἀριθμητ. διδασκαλία, ἀλλὰ καὶ νὰ προβαίνῃ καὶ ἡ ἴδια εἰς ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας, τὰς γνωστὰς ἀπὸ τὴν ἀριθμητ. διδασκαλίαν, τῶν ὁποίων ἡ ἐκτέλεσις εἶναι ἀπαραίτητη πρὸς κατανόησιν τῶν ἀριθμητ. σχέσεων τῶν ὑλῶν της].

β) Ἡ κατὰ τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν χρησιμοποίησις προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς τὴν ὕλην τῶν πραγματικῶν μαθημάτων δὲν σημαίνει βέβαια, ὅτι ἡ ὕλη τῶν μαθημάτων αὐτῶν θὰ κανονίζῃ τὴν διάταξιν τῆς ἀριθμητ. ὕλης, ἡ ὁποία θὰ γίνεται μόνον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδικῆς της φύσεως, ὅπως ἐξ ἄλλου, ὅπου ἡ φύσις μερικῶν ἀριθμητ. ὑλῶν δὲν ἐπιβάλλει ὡρισμένην διαδοχήν των, δὲν ἀποκλείεται ὁ καθορισμὸς τῆς διαδοχῆς αὐτῆς ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀναγκῶν τῶν πραγματικῶν μαθημάτων.

γ) Ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ πρέπει νὰ ἐπιβάλλεται εἰς τὴν ἀριθμητ. διδασκαλίαν πρὸς τὸν σκοπὸν δῆθεν τῆς συγκεντρώσεως ἡ ἀπασχόλησις μὲ προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς πραγματικὰς ὕλας, αἱ όποῖαι δὲν ἔχουν ἀξίαν ἀπὸ ἀριθμητ. ἀπόψεως εἴτε εἰδικῶς διὰ τὸ δημοτ. σχολεῖον, εἴτε ἐν γένει.

δ) Ὡς πρὸς τὰ λοιπὰ παραπέμπομεν εἰς τὴν γνώμην μας περὶ τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως.

XXVIII. Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΥΛΗΣ.

Πολλοὶ εἶναι τῆς γνώμης, ὅτι καὶ εἰς ὅλην τὴν διδασκαλίαν ἐν γένει καὶ εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς Ἀριθμητικῆς ἰδιαιτέρως κάθε διδάσκαλος πρέπει νὰ ἔχῃ «τὴν ἰδικήν του μέθοδον», μέθοδον, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ διαμορφώσει ὁ ἴδιος σύμφωνα μὲ τὴν ἀτομικότητά του καὶ τὴν πεῖράν του. Ἡ γνώμη αὐτὴ εἶναι σφαλερά, ἐφόσον μὲ αὐτὴν ὑπονοεῖται, ὅτι ὁ διδάσκαλος δικαιοῦται καὶ ὀφείλει νὰ κάμνῃ τὴν διδασκαλίαν του σύμφωνα μὲ τὴν διάθεσιν καὶ τὴν ἔμπνευσιν, ποὺ θὰ ἔχῃ κάθε φοράν, ἀφήνων κατὰ μέρος κάθε ψυχολογικὸν καὶ παιδαγωγικὸν νόμον. Ἀπεναντίας εἶναι ὀρθή, ἐφόσον διατυπώνει τὴν πεποίθησιν, ὅτι εἰς τὴν διδασκαλίαν σημαίνει πολὺ καὶ ἡ προσωπικότης τοῦ διδασκάλου καὶ ὅτι αὐτὴ εἶναι καὶ πρέπει νὰ εἶναι ἡ ῥυθμίζουσα καθετί, τὸ ὁποῖον δὲν κανονίζεται ἀπὸ ψυχολογικοὺς νόμους. Ἐφόσον τώρα λαμβάνομεν πρὸ ὀφθαλμῶν ἐκεῖνα μόνον τὰ σημεῖα τῆς διδασκαλίας, τὰ ὁποῖα καθορίζονται ἀπὸ τοὺς νόμους τοῦ πνευματικοῦ βίου, προφανῶς δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ λόγος παρὰ μόνον περὶ **μιᾶς** δυνατῆς καὶ ἐπιτρεπομένης μεθόδου. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν λέγει καὶ ὁ *Diesterweg* τὰ ἀκόλουθα: «Μία ἐν γένει ὑπάρχει μέθοδος τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας, εἶναι δὲ ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀνταποκρίνεται ἀφ' ἑνὸς μὲν πρὸς τὴν φύσιν τοῦ ἀναπτυσσομένου παιδικοῦ πνεύματος, ἰδίως δὲ πρὸς τὰς θεωρητικὰς καὶ πρακτικάς του δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι πρόκειται νὰ μορφωθοῦν διὰ τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ἀφ' ἑτέρου δὲ πρὸς τὴν φύσιν αὐτῆς τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης. Ἑπομένως πρέπει ὅλως διόλου νὰ ἀπορριφθῇ ἡ γνώμη ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἀναγνωρίζουν μόνον ὑποκειμενικὰς διαφορὰς μεταξὺ τῶν μεθόδων καὶ οἱ ὁποῖοι φρονοῦν, ὅτι ἡ δεῖνα μὲν μέθοδος εἶναι κατάλληλη διὰ τὴν ἀτομικότητα τοῦ δεῖνα διδασκάλου καὶ τοῦ δεῖνα μαθητοῦ, ἡ τάδε δὲ διὰ τὴν ἀτομικότητα τῶν τάδε καὶ ὅτι δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ λόγος περὶ μιᾶς μεθόδου ὡς τῆς καλλίστης καὶ δι' αὐτὸ τῆς μόνης καλῆς. Ἐὰν ἡ γνώμη αὐτὴ ἦτο ὀρθή, κάθε Μεθοδολογία θὰ κατέληγε εἰς τὸ μηδὲν καὶ κάθε διδάσκαλος θὰ εἶχε τὸ δικαίωμα νὰ μορφώνῃ ὁποιανδήποτε γνώμην θὰ ἤθελε ὡς πρὸς τὴν ἀτομικότητά του καὶ τὸν μαθητὴν καὶ νὰ ἐκλέγῃ μίαν μέθοδον κατ' ἀρέσκειαν. Προφανῶς ὅμως δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι αὐτὴ ἡ γνώμη ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἀναγνωρίζουν τὴν φύσιν τῶν ἀνθρώπων ὡς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν καὶ τοὺς νόμους τῆς ἀναπτύξεώς της ὡς τοὺς αὐτοὺς καὶ οἱ ὁποῖοι ἀνευρίσκουν ἰδιαίτερα χαρακτηριστικὰ εἰς κάθε μάθημα».

Φυσικὴ πορεία τῆς διδακτικῆς ἐπεξεργασίας καὶ τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἶναι ἡ πορεία ἡ ἀκολουθοῦσα τὰ καλούμενα ***εἰδολογικὰ στάδια.*** Εἴτε τώρα διακρίνονται τρία τέτοια στάδια, ὅπως γίνεται ἀπὸ τὸν *Dörpfeld* (ἐποπτεία, νόησις, ἐφαρμογὴ) καὶ ἀπὸ τὸν *Willmann* (γνῶσις, κατανόησις, δεξιότης), εἴτε τέσσαρα, ὅπως κάμνει ὁ *Herbart* (διασάφησις, σύνδεσις, σύστημα, μέθοδος), εἴτε πέντε, ὅπως κάμνουν οἱ *Ziller* καὶ *Rein* (ἀνάλυσις ἢ προπαρασκευή, σύνθεσις ἢ προσφορά, σύνδεσις ἢ σύγκρισις, σύστημα ἢ σύλληψις, μέθοδος ἢ ἐφαρμογή), εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς περιπτώσεις τὰ στάδια φανερώνουν τὰς ἴδιας ψυχικὰς λειτουργίας, αἱ ὁποῖαι θέτονται εἰς κίνησιν κατὰ τὴν διδασκαλίαν κάθε νέας ὕλης, αἱ δὲ παρατηρούμεναι ὡς πρὸς τὸν ἀριθμόν των διαφοραὶ ὀφείλονται εἰς τὴν γενικωτέραν ἢ μερικωτέραν διάρθρωσιν τῶν ψυχικῶν αὐτῶν λειτουργιῶν.

[Προφανὲς εἶναι τώρα, ὅτι κατὰ τὰ εἰδολογικὰ στάδια δὲν θὰ ἐπεξεργαζώμεθα διαμιᾶς ὅλην τὴν ὕλην κάθε σχολικοῦ ἔτους, ἀλλὰ μικρότερα τμήματά της, ἀποτελοῦντα ἑνιαῖον ὅλον καὶ περιέχοντα στοιχεῖον ἢ στοιχεῖα γενικοῦ καὶ ἀφῃρημένου, τὰ ὁποῖα εἶναι καταλληλότατα διὰ τὴν ἐπεξεργασίαν αὐτὴν καὶ ὀνομάζονται δι' αὐτὸ **μεθοδικαὶ ἑνότητες**. Τὸ μέγεθος κάθε μεθοδικῆς ἑνότητος θὰ κανονίζεται κατὰ πρῶτον ἀπὸ αὐτὴν τὴν φύσιν τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης, ἡ ὁποία παρουσιάζουσα αὐστηρὰν λογικὴν συνοχὴν καὶ τάξιν διευκολύνει περισσότερον ἀπὸ κάθε ἄλλην ὕλην εἰς τὸν διδάσκαλον τὴν εἰς μεθοδικὰς ἑνότητας κατανομήν, ἠμπορεῖ δὲ μάλιστα κανεὶς νὰ εἰπῇ, ὅτι τὰς παρουσιάζει ἑτοίμους εἰς αὐτόν]. Ἔτσι ἀποτελοῦν μεθοδικὰς ἑνότητας εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς (ἢ ἀκριβέστερα ἡ ἀριθμητικὴ σειρά, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν), εἰς δὲ τοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς ὁλόκληραι ἀριθμητικαὶ σειραί, ἀριθμητικαὶ πράξεις τῆς ἀπὸ μνήμης ἢ τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως κ. τ. λ. [Ἐν τούτοις κατὰ τὴν κατανομὴν τῆς ἀριθμητικῆς ὕλης εἰς μεθοδ. ἑνότητας πρέπει φυσικὰ νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν καὶ αἱ ἀντιληπτικαὶ δυνάμεις τῶν μαθητῶν. Ὅσον μικρότεροι εἶναι οἱ μαθηταί, τόσον μικρότεραι πρέπει νὰ εἶναι καὶ αἱ ἑνότητες. Ἡ ἀπαίτησις τώρα αὐτὴ ἠμπορεῖ εὔκολα νὰ συμβιβασθῇ μὲ τὴν προηγουμένην, διότι κάθε μεγαλύτερη μεθοδικὴ ἑνότης εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἠμπορεῖ νὰ διαιρεθῇ εἰς μικροτέρας, περιεχούσας στοιχεῖον ἢ στοιχεῖα τοῦ ὅλου γενικοῦ, τὸ ὁποῖον περιέχει ἡ μεγαλύτερη. Ἂν ὁ ἀριθμὸς 4 (ἤτοι ἡ διδασκαλία τῶν γνωρισμάτων τοῦ ἀριθμοῦ 4) ἀποτελῇ μίαν μεθοδικὴν ἑνότητα, ὅμως καὶ κάθε ἀριθμητικὴ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν συνάγεται ἕνα γνώρισμα τοῦ 4, π.χ. ἡ πρόσθεσις $3+1=4$, ἡ ἀφαίρεσις $4-1=3$, ἡ πρόσθεσις $2+2=4$, ἡ ἀφαίρεσις $4-2=2$ κ.τ.λ. ἠμπορεῖ νὰ ἀποτελέσῃ μικρότερην μέν, ἀλλὰ σχετικῶς αὐτοτελῆ μεθοδικὴν ἑνότητα. Ἐπίσης ἂν μία ἀριθμητικὴ πρᾶξις εἴτε τῆς ἀπὸ μνήμης εἴτε τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως εἰς μίαν σειρὰν τῶν ἀκεραίων ἢ εἰς ἕνα εἶδος ἀριθμῶν ἀποτελῇ μίαν μεθοδικὴν ἑνότητα, ὅμως καὶ κάθε περίπτωσις τῆς πράξεως αὐτῆς ἠμπορεῖ νὰ ἀποτελέσῃ χωριστὴν ἑνότητα. Περιττὸν τέλος εἶναι νὰ τονισθῇ ἰδιαιτέρως, ὅτι ἄλλο πρᾶγμα εἶναι μεθοδικὴ ἑνότης καὶ ἄλλο διδακτικὴ ὥρα καὶ ὅτι ἡ ἐπεξεργασία κάθε μεθοδικῆς ἑνότητος ἠμπορεῖ νὰ διαρκέσῃ εἴτε περισσότερον εἴτε ὀλιγώτερον χρόνον ἀπὸ μίαν διδακτικὴν ὥραν.

Ἡ ἐπεξεργασία τώρα αὐτὴ ἀρχίζει μὲ τὴν θέσιν ἑνὸς ***γενικοῦ σκοποῦ***, ὁ ὁποῖος προαναγγέλλει εἰς τὰς γενικάς του γραμμὰς τὸ συγκεκριμένον νέον, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ διδαχθῇ καὶ τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι, ὅπως ἠξεύρομεν, ἡ κάποια νέα ἀριθμητικὴ πρᾶξις ἢ κάποιος νέος ἀριθμὸς [1] ἢ μία νέα ἀριθμητικὴ σειρὰ ἢ

[1] Ἡ διδασκαλία (τῶν γνωρισμάτων) τῶν 10 πρώτων ἀριθμῶν συμπίπτει, καθὼς ἠξεύρομεν, μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν σχετικῶν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς πράξεων.

ἕνα νέον εἶδος ἀριθμῶν. Ἐφόσον τώρα ὁ γενικὸς σκοπὸς θὰ προαναγγέλλῃ τὸ νέον εἰς τὰς γενικάς του μὲν γραμμάς, ἀλλὰ μὲ ὅσον τὸ δυνατὸν οὐσιαστικώτερον τρόπον, θὰ κινῇ μὲν τὴν προσδοκίαν τῶν μαθητῶν διὰ τὸ νέον καὶ θὰ κατευθύνῃ τὴν βούλησίν των πρὸς αὐτό, συγχρόνως δὲ θὰ διευκολύνῃ τὴν ἀμέσως ἐπακολουθοῦσαν θέσιν ***τῶν μερικῶν σκοπῶν***, μὲ τοὺς ὁποίους θὰ προβάλλωνται εἰς τοὺς μαθητὰς ***συγκεκριμένα προβλήματα***, τὰ ὁποῖα θὰ λύωνται μὲ τὴν νέαν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν ἢ μὲ τὴν λύσιν τῶν ὁποίων θὰ παρουσιάζωνται τὰ γνωρίσματα τοῦ νέου ἀριθμοῦ ἢ τῶν μελῶν τῆς νέας ἀριθμητικῆς σειρᾶς ἢ τοῦ νέου εἴδους τῶν ἀριθμῶν. Ἔτσι π.χ. ἂν πρόκειται νὰ διδαχθῇ ὁ ἀριθμὸς 5 καὶ εἰδικώτερα ἡ πρόσθεσις $4+1=5$, μὲ τὴν ὁποίαν συνάγεται καὶ τὸ πρῶτον γνώρισμα τοῦ νέου ἀριθμοῦ 5, θέτομεν τὸν γενικὸν σκοπόν: «Ἕως τώρα, παιδιά, ἐλογαριάζαμε ὅλο μὲ 4 τὸ πολὺ πράγματα. Σήμερα θὰ μάθωμε νὰ λογαριάζωμε μὲ περισσότερα», ἀπὸ τὸν ὁποῖον εἶναι εὔκολη ἡ μετάβασις εἰς τοὺς μερικοὺς σκοπούς: «Ἔχομε στὸ ἀριθμητήριο 4 σφαῖρες. Βάζομε κοντά των ἄλλη 1. Πόσες θὰ εἶναι ὅλες μαζί;», «Ἔχομε ἐδῶ 4 ξυλαράκια. Βάζομε σ' αὐτὰ ἄλλο 1. Πόσα θὰ εἶναι ὅλα μαζί;» κ.τ.λ. Ἐφόσον ἡ μεθοδικὴ ἑνότης ἀφορμᾶται ἀπὸ κάποιον πραγματικὸν κύκλον, ὅπως θὰ γίνεται κανονικὰ εἰς τὴν ἀνωτέραν ἀρίθμησιν (ἴδ. τὸ κεφάλ. περὶ τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως !), φυσικὰ εἰς τὸν γενικὸν σκοπὸν δὲν θὰ προαναγγέλλεται μόνον τὸ ἀριθμητικὸν νέον, ἀλλὰ καὶ ὁ πραγματικὸς αὐτὸς κύκλος ἢ ἀκριβέστερα τὸ ἀριθμητικὸν νέον θὰ προαναγγέλλεται ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰ πραγματικὰ ἐκεῖνα στοιχεῖα, ἐπάνω εἰς τὰ ὁποῖα παρουσιάζεται καὶ θὰ παρουσιασθῇ καὶ κατὰ τὴν ἐπικειμένην ἐξέτασιν. Ἂν π.χ. πρόκειται νὰ διδαχθῇ ἡ πρόσθεσις ὁποιωνδήποτε διψηφίων ἀριθμῶν εἰς τὴν σειρὰν 1—100 ἐπάνω εἰς τὸν πραγματικὸν κύκλον «τὸ σχολεῖόν μας», θέτομεν τὸν γενικὸν σκοπόν: «Ἂς λογαριάσωμε σήμερα, πόσους μαθητὰς ἔχει τὸ σχολεῖό μας !».

Καθόσον τώρα ὁ γενικὸς σκοπὸς τῆς διδασκαλίας προαναγγέλλει, καθὼς εἴδαμεν, γενικὰ μόνον τὸ νέον, δὲν θέτει δὲ ὡρισμένον συγκεκριμένον πρόβλημα, διὰ νὰ ἐγείρῃ μὲ αὐτὸ ὡρισμένας ἀριθμητικὰς ἀξιώσεις ἀπὸ τοὺς μαθητάς, εἶναι προφανές, ὅτι ζήτημα ***προπαρασκευῆς*** τῶν μαθητῶν ***ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπό-***

ψεως πρὸς καλυτέραν κατανόησιν τοῦ ἀριθμητικοῦ νέου δὲν γεννᾶται ἀμέσως μετὰ τὴν δήλωσιν τοῦ γενικοῦ σκοποῦ τῆς διδασκαλίας. Τέτοιον ζήτημα, ζήτημα δηλ. τῆς ἀριθμητικῆς προπαρασκευῆς τῶν μαθητῶν, θὰ γεννηθῇ μόνον μετὰ τὴν θέσιν τῶν μερικῶν σκοπῶν τῆς διδασκαλίας, ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ὁποίους, ὅπως εἴπαμεν, προβάλλει εἰς τοὺς μαθητὰς ἀπὸ ἕνα συγκεκριμένον πρόβλημα πρὸς λύσιν. Ἡ μόνη προπαρασκευή, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ εὐθὺς μετὰ τὴν δήλωσιν τοῦ γενικοῦ σκοποῦ, εἶναι ἡ **πραγματικὴ προπαρασκευή**, ἤτοι ἡ προπαρασκευὴ τῶν μαθητῶν εἰς τὴν τελείαν κατανόησιν τῶν πραγματικῶν σχέσεων, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἀναφέρωνται τὰ προβλήματα τῆς διδασκομένης μεθοδικῆς ἑνότητος, προπαρασκευή, ἡ ὁποία φυσικὰ θὰ γίνεται μόνον, ἐφόσον αἱ πραγματικαὶ αὐταὶ σχέσεις ἢ θὰ εἶναι ὅλως διόλου ἄγνωσται ἢ δὲν θὰ εἶναι καθ' ὅλα γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθητάς].

Ἡ **κυρίως πρόσκτησις** τοῦ συγκεκριμένου νέου συντελεῖται, καθόσον οἱ μαθηταὶ προκαλοῦνται ἀπὸ τὸν διδάσκαλον νὰ κατανοήσουν σαφῶς τὸν κανονικὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα προβάλλει εἰς αὐτοὺς διαδοχικά, ἀφορμώμενος ἀπὸ τὸν τεθέντα γενικὸν σκοπόν. [Ὅτι τὰ προβλήματα αὐτὰ εἰς μὲν τὴν πρώτην ἀρίθμησιν θὰ εἶναι κυρίως προβλήματα μὲ συγκεκριμένους ἀριθμούς, ἀναφερόμενα εἰς τὰ μέσα τῆς ἐποπτείας, εἰς δὲ τὴν ἀνωτέραν ἀρίθμησιν θὰ εἶναι ἐφηρμοσμένα, εἴδαμεν εἰς τὰ οἰκεῖα μέρη τοῦ παρόντος ἔργου (ἴδ. ἰδίως ἀνωτ., σελ. 330 κ. ἀκ.). Ἐπίσης ἄλλοῦ ἔχομεν ὁμιλήσει καὶ περὶ τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ θέτωνται τὰ προβλήματα αὐτὰ (ἴδ. ἀν., σελ. 230 κ. ἀκ.), καὶ περὶ τῆς μορφῆς των (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 203), ὡσαύτως δὲ ἀλλοῦ ἔχει τονισθῇ (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 204), ὅτι εἰς τὴν καθαυτὸ ἀρίθμησιν ἡ θέσις τῶν περισσοτέρων πλὴν τοῦ πρώτου προβλημάτων κάθε ἑνότητος ἠμπορεῖ νὰ γίνεται ἀπὸ τοὺς ἰδίους τοὺς μαθητὰς εἴτε μόνους εἴτε βοηθουμένους ἀπὸ τὸν διδάσκαλον. Ἐπίσης ἀμέσως ἀνωτέρω εἴδαμεν, ὅτι μετὰ τὴν θέσιν κάθε προβλήματος ἠμπορεῖ νὰ προτάσσεται τῆς λύσεώς του εἰδικὴ **ἀριθμητικὴ προπαρασκευὴ** τῶν μαθητῶν, ἔργον ἔχουσα νὰ ἄρῃ κάθε ἀριθμητικὴν δυσκολίαν, τὴν ὁποίαν ἠμπορεῖ νὰ παρουσιάσῃ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος, ἔτσι δὲ νὰ διευκολύνῃ τὴν κατανόησιν τῆς λύσεως αὐ-

τῆς. Προφανὲς τώρα εἶναι, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ αὐτὴ προπαρασκευὴ θὰ γίνεται εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις μόνον πρὸ τῆς λύσεως τοῦ πρώτου προβλήματος, διότι τὰ ὑπόλοιπα, ἀναφερόμενα εἰς τὰς αὐτὰς μὲ τὸ πρῶτον ἀριθμητικὰς σχέσεις, δὲν θὰ παρουσιάζουν συνήθως διαφόρους ἀριθμητικὰς δυσκολίας ἀπὸ αὐτό]. Ἐπίσης ὅμως εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ἀριθμητικὴ αὐτὴ προπαρασκευὴ θὰ εἶναι ὅλως διόλου περιττή, ἂν ὁ διδάσκαλος ἔχῃ τὴν πεποίθησιν, ὅτι οἱ μαθηταί του δὲν θὰ συναντήσουν κατὰ τὴν λύσιν τοῦ σχετικοῦ προβλήματος ἀριθμητικὰς δυσκολίας. [Ἐφόσον τώρα ἡ προπαρασκευὴ κρίνεται ἀναγκαία, ἀφορμᾶται πάντοτε ἀπὸ τὸ δοθὲν πρόβλημα καὶ γίνεται ὡς ἀκολούθως. Ἂν μὲ τὸ δοθὲν πρόβλημα πρόκειται οἱ μαθηταὶ νὰ μάθουν κάποιον νέον ἀριθμὸν ἢ κάποιον νέον γνώρισμα ἑνὸς γνωστοῦ κατὰ τὰ ἄλλα ἀριθμοῦ, ἀναπλάσσουν εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅ,τι γνωρίζουν διὰ τοὺς προηγουμένους τοῦ νέου ἀριθμούς, εἰς δὲ τὴν δεύτερην, ὅ,τι γνωρίζουν διὰ τὰ γνωστὰ γνωρίσματα τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ ἄγνωστον γνώρισμα θὰ διδαχθῇ. Ἂν μὲ τὸ δοθὲν πρόβλημα πρόκειται οἱ μαθηταὶ νὰ γνωρίσουν τὰ μέλη μιᾶς νέας ἀριθμητικῆς σειρᾶς, προκαλοῦνται νὰ ἀναπλάσουν τὰ γνωστὰ εἰς αὐτοὺς συστατικὰ τῶν μελῶν τῆς νέας σειρᾶς. Ἂν πάλιν μὲ τὸ δοθὲν πρόβλημα πρόκειται νὰ μάθουν ἕνα νέον εἶδος ἀριθμῶν, προκαλοῦνται νὰ εἴπουν, ὅ,τι σχετικὸν μὲ τὸ εἶδος αὐτὸ τῶν ἀριθμῶν ἠξεύρουν ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν των. Ἂν τέλος μὲ τὸ δοθὲν πρόβλημα πρόκειται νὰ μάθουν τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως, πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον θὰ συμβαίνῃ τὰς περισσοτέρας φοράς, τότε ἡ προπαρασκευὴ χωρεῖ ὡς ἑξῆς. Ἐφόσον οἱ μαθηταὶ δὲν γνωρίζουν, ποία εἶναι ἡ πρᾶξις αὐτή,—πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ συμβῇ μόνον, ὅταν τὸ πρόβλημα εἶναι ἐφηρμοσμένον—, προκαλοῦνται νὰ τὴν εὕρουν. Ἂν ὅμως ἠξεύρουν, μὲ ποίαν πρᾶξιν πρέπει νὰ λυθῇ τὸ δοθὲν πρόβλημα, δὲν γνωρίζουν δὲ μόνον τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις αὐτή, προκαλοῦνται νὰ κάμουν εἰκασίας περὶ τοῦ τρόπου τῆς ἐκτελέσεώς της. Εὐνόητον δὲ εἶναι, ὅτι τόσον διὰ νὰ διευκολυνθοῦν οἱ μαθηταὶ εἰς τὰς εἰκασίας των αὐτάς, ὅσον καὶ διὰ νὰ ἠμπορέσουν ἐν γένει νὰ ἀντιληφθοῦν τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως τῆς νέας ἀριθμητικῆς πράξεως, ἀπαραίτητον εἶναι νὰ ἔχουν προχείρους ὅλας ἐκείνας τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας στηρίζεται ἡ νέα καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι γνωσταὶ εἰς αὐτοὺς ἀπὸ τὴν προηγουμένην διδασκαλίαν. Πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ αὐτὸν προκαλοῦνται ἀπὸ τὸν διδάσκαλον νὰ τὰς ἀναπλάσουν. Ἔτσι π. χ. ἂν πρόκειται νὰ διδαχθοῦν τὴν ἀφαίρεσιν 4 2=2, ἀναπλάσσουν τὰς ἀφαιρέσεις 4—1=3, 3—1=2 καὶ τὴν πρόσθεσιν 2+2=4, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἡ ἀφαίρεσις ἐκείνη. Ἂν πρόκειται νὰ διδαχθοῦν τὴν πρόσθεσιν μὲ τὴν ὑπέρβασιν τοῦ 10 εἰς τὴν σειρὰν 1—20, ἤτοι τὴν πρόσθεσιν 9+2=11, 8+3=11, 7+4=11 κ.τ.λ., προκαλοῦνται 1) νὰ ἀναλύσουν τὸν μὲν εἰς τὸν 9 προσθετόμενον ἀριθμὸν εἰς 1+(2=1+1), τὸν δὲ εἰς τὸν 8 εἰς 2+(3=2+1), τὸν δὲ εἰς τὸν 7 εἰς 3+(4=3+1) κ.τ.λ. καὶ 2) νὰ προσθέσουν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 9, 8, 7 κ.τ.λ. διαδοχικὰ 2 ἀριθμούς, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ πρῶτος προσθετόμενος νὰ ἀποτελῇ μὲ τοὺς 9, 8, 7 κ. τ. λ. τὸν 10 (π. χ. 9 1+1, 8+2+1, 7+3+1 κ.τ.λ.). Διδασκομένης τῆς προσθέσεως μὲ τὴν ὑπέρβασιν τῆς δεκάδος εἰς τὴν σειρὰν 1—100 (19+2, 19+3 κ.τ.λ., 29+2, 29+3 κ. τ. λ.), ἐπαναλαμβάνουν οἱ μαθηταὶ τὴν πρόσθεσιν μὲ τὴν ὑπέρβασιν τῆς δεκάδος εἰς τὴν σειρὰν 1—20, (διότι, ὅπως 9+2=11, ἔτσι καὶ 19+2=21, 29+2=31 κ. τ. λ. καὶ ὅπως 9+3=12, ἔτσι καὶ 19+3=22, 29+3=32 κ.τ.λ.). Διδασκομένης μιᾶς πολλαπλασιαστικῆς σειρᾶς, π.χ. τῆς σειρᾶς τοῦ 5, ἐπαναλαμβάνουν οἱ μαθηταὶ τὰς σχετικὰς σειρὰς τῆς προσθέσεως (5+5=10, 10+5=15 κ. τ. λ.) καὶ τῆς ἀφαιρέσεως (50—5=45, 45—5=40 κ.τ.λ.). Ἂν διδάσκεται ἡ γραπτὴ πρόσθεσις διψηφίων ἀριθμῶν εἰς τὴν σειρὰν 1—1000, ὡς σχετικὴ προπαρασκευὴ χρησιμεύει ἡ γραπτὴ πρόσθεσις μονοψηφίων ἀριθμῶν καὶ ἡ ἀνάλυσις διψηφίων εἰς δεκάδας καὶ μονάδας κ.τ.λ. κ.τ.λ.]. Ὅ,τι τέλος πρέπει ἀκόμη νὰ τονισθῇ, εἶναι, ὅτι ἡ προπαρασκευὴ πρέπει νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν σύντομη [καὶ νὰ εὑρίσκεται πάντοτε εἰς στενὴν ἐπαφὴν μὲ τὸ νέον, οὕτως ὥστε οἱ μαθηταὶ νὰ τὴν ἀντιλαμβάνωνται ὡς ἕνα μέρος τῆς ἐργασίας, ἡ ὁποία γίνεται διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ νέου].

Ἐρχόμενοι τώρα εἰς τὴν καθαυτὸ ἐργασίαν, ἡ ὁποία γίνεται διὰ τὴν πρόσκτησιν τοῦ νέου, εἰς αὐτὴν δηλαδὴ τὴν λύσιν τοῦ

κάθε δοθέντος προβλήματος, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ λύσις αὐτὴ πρέπει νὰ προχωρῇ ἔτσι, ὥστε οἱ μαθηταὶ νὰ κατανοοῦν τέλεια κάθε γνώρισμα τοῦ νέου ἀριθμοῦ ἢ τοῦ νέου εἴδους τῶν ἀριθμῶν ἢ τῶν μελῶν τῆς νέας ἀριθμητικῆς σειρᾶς, καθὼς ἐπίσης καὶ ὅλους τοὺς σταθμούς, οἱ ὁποῖοι διανύονται πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς νέας ἀριθμητικῆς πράξεως. Προφανῶς θὰ ἦτο ὅλως διόλου ἄτοπον νὰ προδιατυπώνῃ ὁ διδάσκαλος εἰς τοὺς μαθητὰς τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος γνωρίσματα ἢ τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως τῆς νέας ἀριθμητικῆς πράξεως, κατόπιν δὲ νὰ τοὺς προκαλῇ νὰ ἐπαναλάβουν, ὅ,τι αὐτὸς εἶπε. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ μαθηταὶ θὰ ἐσυνήθιζαν εἰς μίαν ἐργασίαν καθαρῶς μηχανικὴν καὶ μὴ συντελοῦσαν εἰς μόρφωσιν τοῦ πνεύματός των. Ἀπεναντίας οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ προκαλοῦνται νὰ εὑρίσκουν μόνοι των τόσον τὰ γνωρίσματα ἐκεῖνα, ὅσον καὶ τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως τῆς νέας πράξεως, ἐνῷ ὁ διδάσκαλος θὰ τοὺς καθοδηγῇ εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ μόνον ἐν ἀνάγκῃ καὶ διὰ τῶν ἀπολύτως ἐπιβαλλομένων βοηθειῶν, [θὰ μεταδίδῃ δὲ εἰς αὐτοὺς καὶ τὰς ἀναγκαίας τεχνικὰς ἐκφράσεις]. Περιττὸν δὲ εἶναι νὰ τονισθῇ, ὅτι οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ βοηθοῦνται εἰς τὴν ἐργασίαν των διὰ τῶν καταλλήλων μέσων τῆς εποπτείας, ἡ ὁποία ἔχει, καθὼς ἠξεύρομεν, σπουδαίαν σημασίαν καὶ δι' ὅλην τὴν ἀρίθμησιν καὶ ἐντελῶς ἰδιαιτέρως διὰ τὴν πρώτην (ἴδ. ἰδίως τὸ κεφάλαιον περὶ τῶν μέσων τῆς αἰσθητοποιήσεως!). [Μετὰ τὴν λύσιν κάθε προβλήματος θὰ προκαλοῦνται οἱ μαθηταὶ νὰ ἀναπαριστάνουν τὸν τρόπον τῆς λύσεώς του. Ὁ ἀριθμὸς καὶ ἡ ἔκτασις τῶν ἀναπαραστάσεων αὐτῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ βαθμοῦ τῆς εὐκολίας ἢ δυσκολίας, μὲ τὴν ὁποίαν κατώρθωσαν οἱ μαθηταὶ τὴν λύσιν του. Ἐν πάσῃ ὅμως περιπτώσει ὁ τρόπος τῆς λύσεως τοῦ πρώτου τοὐλάχιστον προβλήματος κάθε ἑνότητος πρέπει νὰ ἐπαναλαμβάνεται καθ' ὅλα τὰ σημεῖά του, διὰ νὰ μάθουν οἱ μαθηταὶ νὰ διατυπώνουν σαφῶς καὶ εὐκρινῶς ὅλας τὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας ἔκαμαν καὶ πρέπει νὰ κάμουν εἴτε πρὸς εὕρεσιν τῶν περὶ ὧν ἑκάστοτε πρόκειται γνωρισμάτων εἴτε πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς ἑκάστοτε προκειμένης ἀριθμητικῆς πράξεως, ἡ δὲ ἐπανάληψις αὐτὴ πρέπει νὰ γίνεται ἀπὸ τόσους καὶ τετοίους μαθητάς, ὥστε νὰ βεβαιωθῇ ὁ διδάσκαλος, ὅτι ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως εἶναι εἰς θέσιν προκαλούμενοι νὰ διατυπώσουν προφορικὰ τὰς σκέψεις αὐτὰς (ἴδ. καὶ τὸ κεφάλαιον περὶ τῆς προφορικῆς διατυπώσεως τῶν κατὰ τὴν ἀρίθμησιν σκέψεων !)]. Τέλος ὁ ἀριθμὸς τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λύουν οἱ μαθηταὶ πρὸς κατανόησιν τοῦ ἑκάστοτε διδασκομένου νέου, ἐξαρτᾶται ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ἐκ τῆς εὐκολίας ἢ δυσκολίας αὐτοῦ τοῦ διδασκομένου νέου, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ ἐκ τοῦ βαθμοῦ τῆς ὡριμότητος τῶν μαθητῶν. Ὅσον ἁπλούστερη εἶναι ἡ διδασκομένη νέα ὕλη καὶ ὅσον ὡριμώτεροι εἶναι οἱ μαθηταί, τόσον ὀλιγώτερα προβλήματα χρειάζονται πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ μνημονευθέντος σκοποῦ. Ἐπὶ ὡρίμων μαθητῶν καὶ σχετικῶς εὐκόλου ὕλης ἡ λύσις καὶ ἑνὸς μόνον σχετικοῦ προβλήματος ἀρκεῖ κάποτε πρὸς κατανόησιν τοῦ νέου.

[Μετὰ τὴν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον λύσιν κάθε προβλήματος ἐπακολουθεῖ ἡ ***βαθυτέρα ἐπεξεργασία*** αὐτῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ μαθηταὶ προκαλοῦνται νὰ προσέξουν μόνον εἰς τὰ οὐσιώδη σημεῖά της, τὰ ὁποῖα καὶ θὰ ἀποτελέσουν τὸ περιεχόμενον τοῦ γενικοῦ καὶ ἀφῃρημένου, τὸ ὁποῖον θὰ ἐξαχθῇ κατὰ τὸ ἐπακολουθοῦν στάδιον τῆς ἀφαιρέσεως. Ἐφόσον τὸ διὰ τῶν λυθέντων προβλημάτων διδαχθὲν νέον εἶναι ὁ τρόπος τῆς ἐκτελέσεως μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως, καλοῦνται οἱ μαθηταὶ μετὰ τὴν λύσιν κάθε προβλήματος νὰ προσέξουν μόνον εἰς τὰ οὐσιώδη σημεῖα τοῦ τρόπου αὐτοῦ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα καὶ θὰ ἀποτελεσθῇ εἰς τὸ στάδιον τῆς ἀφαιρέσεως τὸ περιεχόμενον τοῦ κανόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις αὐτή. Ἂν πάλιν τὸ διδαχθὲν νέον εἶναι κάποιος ἀριθμὸς ἢ μία ἀριθμητικὴ σειρὰ ἢ ἕνα εἶδος ἀριθμῶν, καλοῦνται οἱ μαθηταὶ μετὰ τὴν λύσιν κάθε προβλήματος νὰ προσέξουν μόνον εἰς τὰ οὐσιώδη γνωρίσματα τοῦ νέου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα καὶ θὰ σχηματισθῇ εἰς τὸ στάδιον τῆς ἀφαιρέσεως τὸ περιεχόμενον τῆς σχετικῆς ἢ τῶν σχετικῶν ἐννοιῶν.

Εἰς τὸ ἐπακολουθοῦν στάδιον ***τῆς ἀφαιρέσεως*** ἀνέρχονται οἱ μαθηταὶ ἀπὸ τὰ ἐπὶ μέρους εἰς τὸ γενικὸν καὶ ἀφῃρημένον. Πρὸς τοῦτο κατ᾽ ἀρχὰς μὲν προκαλοῦνται νὰ συγκρίνουν ἀναμεταξύ των τὰ πορίσματα, εἰς τὰ ὁποῖα κατέληξε ἡ βαθυτέρα ἐπεξεργασία τῆς λύσεως τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ δοθέντα προβλήματα, καὶ νὰ ἀνεύρουν τὰ κοινὰ τῶν πορισμάτων αὐτῶν στοιχεῖα (στάδιον ***τῆς συγκρίσεως***). Μετὰ δὲ τοῦτο προκαλοῦνται νὰ συνενώσουν, νὰ συλλάβουν τὰ κοινὰ αὐτὰ στοιχεῖα εἰς μίαν μὲν ἢ πε-

ρισσοτέρας ***ἐννοίας***, ἂν τὰ στοιχεῖα αὐτὰ εἶναι τὰ οὐσιώδη γνωρίσματα ἑνὸς νέου ἀριθμοῦ ἢ τῶν μελῶν μιᾶς νέας ἀριθμητικῆς σειρᾶς ἢ ἑνὸς νέου εἴδους ἀριθμῶν, εἰς ἕνα δὲ ***κανόνα***, ἂν τὰ στοιχεῖα αὐτὰ ἀποτελοῦν τὰ οὐσιώδη σημεῖα τοῦ τρόπου τῆς ἐκτελέσεως μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως (στάδιον ***τῆς συλλήψεως***)]. Κατὰ τὴν σύλληψιν τοῦ γενικοῦ λαμβάνει φυσικὰ ὁ διδάσκαλος μέριμναν καὶ περὶ τῆς καταλλήλου γλωσσικῆς διατυπώσεώς του. Εὐνόητον δὲ εἶναι, ὅτι καὶ εἰς ὅλας μὲν τὰς τάξεις, ἰδιαιτέρως δὲ εἰς τὰς κατωτέρας πρέπει τὸ γενικὸν νὰ ἔχῃ καὶ ἀπὸ τῆς γλωσσικῆς καὶ ἀπὸ τῆς οὐσιαστικῆς ἀπόψεως ὅσον τὸ δυνατὸν ἁπλουστέραν καὶ εὐληπτοτέραν, κάποτε δὲ μάλιστα καὶ σχεδὸν συγκεκριμένην μορφήν. Ἔτσι π.χ. διατυπώνονται [αἱ ἔννοιαι «μία δεκὰς εἶναι 10 μονάδες», «ἕνδεκα εἶναι μία δεκὰς καὶ μία μονάς», «κλασματικὴ μονὰς εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα κομμάτια, εἰς τὰ ὁποῖα κόπτομεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα» κ.τ.λ. καὶ] οἱ κανόνες «ἕνας ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται μὲ τὸ 10, ἂν προστεθῇ εἰς αὐτὸν ἕνα μηδενικόν», [δύο ἀριθμοὶ μὲ δεκάδας καὶ μονάδας προσθέτονται, ἂν εἰς τὸν πρῶτον προσθέσωμεν πρῶτα τὰς δεκάδας καὶ ἔπειτα τὰς μονάδας τοῦ δευτέρου» κ. τ. λ. Εἰς τὴν πρώτην ἀρίθμησιν ἀντὶ κάθε κανόνος ἐκτελέσεως ὁποιασδήποτε πράξεως θεωρεῖται ὡς γενικὸν αὐτὴ ἡ καθ᾽ ἕκαστον ἐκτελεσθεῖσα πρᾶξις (π. χ. ἡ $3+1=4$, ἢ $4-1=3$ κ.τ.λ.). Τὸ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον διατυπωνόμενον γενικὸν καταγράφουν οἱ μαθηταὶ εἰς τὸ τετράδιον τῆς Ἀριθμητικῆς]. Σκόπιμον δὲ εἶναι πλησίον τοῦ καταγραφομένου γενικοῦ ἢ ***καὶ ἀντὶ αὐτοῦ*** νὰ καταχωρίζουν ἕνα, κάποτε δὲ καὶ περισσότερα ***τυπικὰ*** παραδείγματά του· ἔτσι π.χ. ἀντὶ [τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τῆς κλασματικῆς μονάδος καταχωρίζουν τά: κλασματικὴ μονὰς=ἕνα δεύτερον, ἕνα τρίτον κ.τ.λ., ἀντὶ δὲ] τοῦ κανόνος τῆς προσθέσεως δύο ὁποιωνδήποτε διψηφίων εἰς τὴν σειρὰν 1—100 καταχωρίζουν τὸ τυπικὸν παράδειγμα: $37+24=37+20,+4$. [Σημειωτέον δὲ ἐπίσης, ὅτι, ἐφόσον ἕνας κανὼν εἶναι μακρός, δὲν εἶναι ἐπάναγκες οἱ μαθηταί, καὶ μάλιστα τῶν μικροτέρων τάξεων, νὰ τὸν λέγουν ὅλον ἐν συνεχείᾳ· ἀρκεῖ νὰ ἠμποροῦν νὰ τὸν λέγουν κατὰ τμήματα, ἀποκρινόμενοι εἰς σχετικὰς ἐρωτήσεις τοῦ διδασκάλου. Ἔτσι π. χ. οἱ μαθηταὶ τῆς τρίτης τάξεως ἠμποροῦν νὰ λέγουν τὸν κανόνα τῆς γραπτῆς προσθέσεως τῶν διψηφίων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς: Ἐρώτ. Πῶς ἐθέσαμεν εἰς ὅλα τὰ προβλήματα τῆς προσθέσεως τῶν διψηφίων τοὺς προσθετέους; Ἀπόκρ. Τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον ἔτσι, ὥστε αἱ μονάδες νὰ εἶναι κάτω ἀπὸ τὰς μονάδας κ.τ.λ. Ἐρώτ. Τί ἐπροσθέσαμεν ἔπειτα κατὰ πρῶτον; Ἀπόκρ. Ἐρώτ. Τί ἐκάμαμεν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων; Ἀπόκρ. Ἐρώτ. Τί ἐπροσθέσαμεν κατόπιν; κ.τ.λ. (πρβ. καὶ *Räther*, ὅπ. ἀν., μέρ. 2, σελ. 26)].

Περιττὸν τώρα εἶναι νὰ τονισθῇ ἰδιαιτέρως, ὅτι ὁ διδάσκαλος τοῦ κατωτέρου σχολείου δὲν πρέπει νὰ θεωρῇ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν ὡς «ἐργαστήριον» κατασκευῆς κανόνων καὶ ἐννοιῶν, ὅτι δὲ ἀπεναντίας πρέπει νὰ περιορίζεται εἰς τὸν σχηματισμὸν ὀλίγων μόνον, τῶν μᾶλλον ἀπαραιτήτων, ἐννοιῶν καὶ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν σπουδαιοτέρων μόνον καὶ ἀναγκαιοτέρων κανόνων. Ἔτσι εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις θὰ θεωρῇ ἀρκετὸν νὰ κατανοοῦν οἱ μαθηταὶ καλὰ τὸ νέον συγκεκριμένον ὑλικὸν καὶ νὰ τὸ **συνδέουν** μὲ τὸ προηγουμένως διδαχθὲν συγγενὲς ὑλικὸν εἰς ἕνα εὔτακτον καὶ εὐσύνοπτον **σύστημα** σαφῶν συγκεκριμένων γνώσεων.

Ὅ,τι ἀκόμη ὑπολείπεται πρὸς τελείαν διδακτικὴν ἐπεξεργασίαν κάθε μεθοδικῆς ἑνότητος, εἶναι ἡ διεξαγωγὴ τοῦ σταδίου **τῆς ἀσκήσεως** καὶ **ἐφαρμογῆς** τοῦ προσκτηθέντος νέου ὑλικοῦ, εἴτε ἔλαβε τὴν μορφὴν ἐννοίας ἢ κανόνος, εἴτε ἔμεινε μὲ τὴν συγκεκριμένην του μορφήν. Τὸ στάδιον αὐτό, τοῦ ὁποίου προορισμὸς εἶναι νὰ μεταβάλῃ τὸ γιγνώσκειν εἰς δύνασθαι, τὴν γνῶσιν εἰς δύναμιν, [ἔχει ἐντελῶς ἰδιαιτέραν σπουδαιότητα διὰ τὴν ἀριθμητικὴν διδασκαλίαν, ἠμπορεῖ δὲ μάλιστα νὰ θεωρηθῇ εἰς αὐτὴν ὡς ἰσάξιον μὲ τὸ στάδιον τῆς προσκτήσεως τοῦ νέου. Ὁ δὲ λόγος τοῦ πράγματος ἔγκειται εἰς τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὸ μάθημα αὐτὸ περισσότερον παρὰ εἰς κάθε ἄλλο ἡ πρόσκτησις τοῦ νέου **εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐξασφαλισθῇ** ἄνευ πολλῆς, ποικίλης καὶ συχνῆς ἀσκήσεώς καὶ ἐφαρμογῆς του]. Ἡ ἄσκησις εἰς τὸ προσκτηθὲν νέον ὑλικὸν γίνεται διὰ τῆς λύσεως ἀφθόνων προβλημάτων τόσον μὲ συγκεκριμένους, ὅσον καὶ μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς (ἴδ. καὶ τὸ κεφάλαιον «οἱ ἀφῃρημένοι καὶ οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ κ.τ.λ.», καθὼς καὶ τὸ κεφάλ. «τὰ αἴτια τῶν πενιχρῶν ἀποτελεσμάτων κ. τ. λ.»!). Ἡ δὲ ἐφαρμογή του γίνεται διὰ τῆς λύσεως προβλημά-

των ἀναφερομένων εἰς ἕνα ἑνιαῖον πραγματικὸν κύκλον, [προκειμένου δὲ περὶ τῆς καθαυτὸ ἀριθμήσεως εἰς ἐκεῖνον, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἔχει ἀφορμηθῆ ἡ διδασκαλία τῆς μεθοδικῆς ἑνότητος (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 330 κ. ἀκ.)]. Ὅτι τὰ περισσότερα ἀπὸ τὰ προβλήματα καὶ τῆς ἀσκήσεως καὶ τῆς ἐφαρμογῆς ἠμποροῦν νὰ σχηματίζουν οἱ ἴδιοι οἱ μαθηταί, εἴδαμεν κατ' ἐπανάληψιν εἰς τὰ προηγούμενα (ἴδ. ἰδίως ἀνωτ. σελ. 204). Ἐπίσης δὲ ἀπὸ τὰ προηγούμενα γνωρίζομεν, ὅτι κατὰ τὸ στάδιον αὐτὸ θὰ λύωνται ἀπὸ τοὺς μαθητὰς καὶ τὰ ἀλγεβρικὰ προβλήματα (ἴδ. τὸ σχετ. κεφάλαιον!), [θὰ χρησιμοποιῆται δὲ καὶ ἡ διαδοχικὴ (ἴδ. τὸ σχετ. κεφάλαιον!) καὶ ἡ ἁμιλλητικὴ (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 229) ἀρίθμησις]. Ἀλλ' ἐπίσης μᾶς εἶναι γνωστόν, ὅτι κατὰ τὸ στάδιον τῆς ἀσκήσεως δὲν θὰ περιορίζῃ ὁ διδάσκαλος τοὺς μαθητὰς μόνον εἰς τὸν κανονικὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων, ἀλλὰ θὰ τοὺς ἀφήνῃ νὰ εὑρίσκουν καὶ κάθε δυνατὴν εὐκολίαν εἰς τὴν ἀρίθμησιν, ἐν ἀνάγκῃ δὲ θὰ ὑποδεικνύῃ ὁ ἴδιος τέτοιας εὐκολίας καὶ θὰ ἀσκῇ τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν ἐφαρμογήν των (ἴδ. τὸ σχετ. κεφάλαιον!). Προφανὲς δὲ εἶναι, ὅτι κατὰ τὸ στάδιον αὐτὸ ἠμπορεῖ νὰ προσφέρῃ πολλὰς ὑπηρεσίας μία καλὴ συλλογὴ ἀριθμητικῶν προβλημάτων (ἴδ. τὸ σχετ. κεφάλαιον!). Τέλος δὲν μᾶς εἶναι ἄγνωστον, ὅτι κατὰ τὸ στάδιον τῆς ἀσκήσεως θὰ ἠμποροῦν [νὰ ἐκτελοῦνται ἀπὸ τοὺς μαθητὰς καὶ αἱ περισσότεραι ἀπὸ τὰς ἐργασίας, αἱ ὁποῖαι σκόπιμον εἶναι νὰ γίνωνται κατὰ τὴν ἀρίθμησιν (ἴδ. τὸ κεφάλαιον «ἡ ἀρχὴ τῆς ἐργασίας κ.τ.λ.»),] νὰ διενεργοῦνται ἐπίσης καὶ αἱ δοκιμασίαι τῶν μαθητῶν καὶ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης καὶ εἰς τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν ὡρισμένης γνωστῆς ὕλης, [νὰ γίνεται δὲ ὡσαύτως καὶ ἡ ἐπανάληψις παλαιότερον διδαχθεισῶν ὑλῶν (ἴδ. τὸ κεφάλαιον «ἡ ἐπανάληψις»!).

Τὸ ἔργον τώρα τοῦ σταδίου τῆς ἀσκήσεως συνεχίζεται εἰς τὰ ὀλιγοτάξια σχολεῖα κατὰ τὸν χρόνον τῶν σιωπηρῶν ἐπασχολήσεων τῶν μαθητῶν (ἴδ. ἀνωτ., σελ. 375 κ. ἀκ.). Προκειμένου δὲ διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν κανονικῶν δημοτ. σχολείων ἠμπορεῖ τὸ ἴδιον ἔργον νὰ συνεχισθῇ εἰς **τὸν οἶκόν των**, ἐφόσον ὁ διδάσκαλος ἀναθέτει εἰς αὐτοὺς ὡς ἐργασίαν τοῦ οἴκου τὴν λύσιν προβλημάτων σχετικῶν πρὸς τὸ διδαχθὲν νέον. Ἐννοεῖται, ὅτι ἡ ἀνάθεσις αὐτὴ δὲν πρέπει νὰ γίνεται ἐκεῖ, ὅπου αἱ οἰκιακαὶ τῶν μαθητῶν σχέσεις δὲν ἐπιτρέπουν εἰς αὐτοὺς νὰ ἀπασχολοῦνται εἰς τὸν οἶκόν των μὲ ἐργασίας τοῦ σχολείου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ διδάσκαλος τῆς Ἀριθμητικῆς πρέπει νὰ διαρρυθμίζῃ τὴν διδασκαλίαν του τοιουτοτρόπως, ὥστε ὅλη ἡ σχετικὴ ἐργασία νὰ γίνεται εἰς τὸ σχολεῖον. Ἐφόσον ὅμως αἱ οἰκιακαὶ σχέσεις τῶν μαθητῶν δὲν ἐμποδίζουν τὸ πρᾶγμα καὶ ἐφόσον ἐξ ἄλλου οἱ μαθηταὶ διὰ τῆς ἐργασίας τοῦ σχολείου ἔχουν ἀποκτήσει τὴν ἱκανότητα νὰ λύουν μόνοι των καὶ χωρὶς ξένην βοήθειαν προβλήματα ἀνάλογα μὲ τὰς ἀριθμητικάς των γνώσεις, σκόπιμον εἶναι νὰ ἀφιερώνεται ἕνα μέρος τοῦ ἐλευθέρου χρόνου τῶν μαθητῶν καὶ εἰς τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἐν τούτοις καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ διδάσκων τὴν Ἀριθμητικὴν ὀφείλει νὰ τηρῇ τὸ πρέπον μέτρον. Πρὸ παντὸς ὀφείλει νὰ ἀναθέτῃ εἰς τοὺς μαθητὰς προβλήματα ἀνάλογα μὲ τὰς δυνάμεις των, αἴρων εἰς τὸ σχολεῖον κάθε ἰδιάζουσαν δυσκολίαν των. Ἔπειτα, λαμβάνων ὑπ' ὄψιν τὴν εἰς τὴν ἀρίθμησιν δεξιότητα καὶ ταχύτητα τῶν μετρίων μαθητῶν, ὀφείλει νὰ μὴ ἐπιβαρύνῃ τοὺς παῖδας μὲ πολλὰ προβλήματα, ἀλλὰ νὰ ἀναθέτῃ εἰς αὐτοὺς τόσα μόνον, δι' ὅσα χρειάζεται ὀλίγος ἀπὸ τὸν ἐλεύθερον χρόνον των. Δὲν πρέπει δὲ ἐξ ἄλλου νὰ λησμονῇ ὁ διδάσκων τὴν Ἀριθμητικήν, ὅτι ὁ ἐπιφορτισμὸς τῶν παίδων μὲ πολλὰς οἰκιακὰς ἐργασίας σχετικὰς μὲ τὸ μάθημα αὐτὸ εἶναι δυσάρεστον φαινόμενον, τὸ ὁποῖον φανερώνει, ὅτι δὲν ἔγινε ἡ πρέπουσα σχετικὴ ἄσκησις εἰς τὸ σχολεῖον. Ἐφόσον δὲ ὁ διδάσκαλος ἀναθέτει εἰς τοὺς μαθητὰς νὰ λύουν κατ' οἶκον ὡρισμένα προβλήματα, ὀφείλει καὶ νὰ ἐξελέγχῃ κατὰ τὴν προσεχῆ διδακτικὴν ὥραν κανονικά, ἂν ἡ κατ' οἶκον ἐργασία ἔγινε, ὅπως πρέπει. Δὲν ἀρκεῖ δὲ φυσικὰ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν νὰ προκαλῇ τοὺς μαθητὰς νὰ λέγουν μόνον τὰς λύσεις, διότι αἱ λύσεις ἠμπορεῖ καὶ νὰ ἀντιγράφωνται (ἴδ. *A. Büttner*, ὅπ. ἀν., σελ. 32 κ. ἀκ.)].

XXIX. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ [1]

Α΄. Μεθοδικὰ ἔργα.

Atmanspacher. Der Rechenunterricht im 1 Schuljahre, Leipzig, Teubner, 1906, 1 μ.

[***Βαϊνοπούλου Ἰ.*** Μαθήματα Εἰδικῆς Διδακτικῆς τῶν στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν, Ἀθῆναι, 19[illegible], Βιβλιοπωλεῖον Ἑστίας].

Beetz, Das Wesen der Zahl als Einheitsprincip im elementaren Rechenunterricht, 2 μέρη, τὸ 1 ἔχει ἐξαντληθῆ, τὸ 2 ἐκδ. τοῦ 1897, Leipzig, Kröner, 1 μ. [(Ἴδ. ἀνωτ. σ. 67 κ. ἀκ.)].

Beetz, Das Typenrechnen auf psycho = physischer Grundlage, Halle, Schroedel, 1899, 2, 50 μ. [(Ἴδ. ἀνωτ. σ. 67)].

Böhme, Anleitung zum Rechnen, 14 ἐκδ., Bielefeld, Velhagen u. Klasing, 1905, 4μ.—Ἔχαιρε πρὶν πολλὴν ἐκτίμησιν, τώρα ὅμως εἶναι παλαιωμένον.

Braune, Der Rechenunterricht in der Volksschule, 9 ἐκδ., Halle, Schroedel, 1917, 3, 60 μ., δεμ. 4, 25 μ.

Bräutigam, Methodik des Rechenunterrichts auf den ersten Stufen mit Hilfe von Tillichs Rechenkasten, 2 ἐκδ., Wien, Pichler, 1896, 2 μ.—Ἀκολουθεῖ τὰς Ἑρβαρτιανὰς ἀρχάς, ἀλλὰ τάσσεται ἐναντίον τῆς πραγματικῆς ἀριθμήσεως.

Breier, Das Rechnen im ersten Schuljahre auf Grund der Fünferteilung und mit besonderer Berücksichtigung

[1] Τὰ ἔργα, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὰ εἰδικὰ ζητήματα, σημειώνονται εἰς τὰ σχετικὰ κεφάλαια. Ὡς πρὸς τὰ ἔργα τὰ σχετικὰ μὲ τὴν ἱστορίαν τῆς ἀριθμήσεως ἴδε σελ. 31 κ. ἀκ. Ὡς πρὸς τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀριθμητ. διδασκαλίας ἴδε σελ. 56 κ. ἀκ. Ὡς πρὸς τὰ ἔργα τῆς Ἑρβαρτιανῆς σχολῆς ἴδε σελ. 61 κ. ἀκ.

des Sachrechnens, Wien, Manzsche Verlagsbuchhandlung, 1908.

Brenner, Der Rechenunterricht in den drei ersten Schuljahren, Freising, Datterer, 1893, 1, 20 μ.

Büttner, Anleitung zum Rechenunterricht, 24 ἔκδ., Leipzig, F. Hirt u. Sohn, 1919, δεμ. 6 μ. — Ἁπλοποιεῖ τὴν ἀριθμ. διδασκαλίαν, εἶναι σαφὲς καὶ πολυμερὲς καὶ δι' αὐτὸ πολὺ διαδομένον. Εἰς αὐτὸ στηρίζεται καὶ ἡ συλλογὴ τῶν προβλημάτων τοῦ Büttner.

Elsner καὶ *Sendler*, Der Rechenunterricht in der Volksschule, 6 ἔκδ., 2 μέρη, Breslau, Handel, 1919, I μέρ. ἡ κατωτέρα καὶ ἡ μεσαία βαθμίς, 4, 40 μ., II μέρος ἡ ἀνωτέρα βαθμίς, 3 μ.

Fries, Die Lehraufgabe des Rechenunterrichts im ersten Schuljahre. Ein Wort gegen das didaktische Vorzugsrecht des Zahlenraumes von 10—20, Minden, Marowsky, 1908, 70 λ.

Genau, Das Volksschulrechnen. Ein methodisches Lehrbuch für Seminaristen und Lehrer, 2 ἔκδ., Dresden, Thienemann, 1911, 2, 50 μ., δεμ. 3 μ.

Gerlach, Von schönen Rechenstunden, Anregungen und Vorschläge für eine Reform des Rechenunterrichts, 4 ἔκδ., Leipzig, Quelle u. Meyer, 1919, 6, 60 μ., δεμ. 8 μ. [(Ἴδ. ἀνωτ. σελ. 369)].

Gratz, Der grundlegende Rechenunterricht im Zahlenkreise von 1—100 nach den Forderungen der Physiologie und Psychologie, 2 ἔκδ., München, Kellerer, 1911, 2, 50 μ., δεμ. 3 μ.

Grosse, Historische Rechenbücher des 16 und 17 Jahrhunderts und die Entwicklung ihrer Grundgedanken bis zur Neuzeit, Leipzig, Dürr, 1901, 3, 60 μ.

Haase, Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts, ἔκδ., Langensalza, Beyer u. Söhne, 1906, 2 μ., δεμ. 2, 80 μ. [(Ἴδ. ἀνωτ. σελ. 62)].

Hartmann, Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule vom Standpunkte des erziehenden Unterrichts, 4 ἔκδ., Leipzig καὶ Frankfurt a. M., Kesselring, 1913, δεμ. 6, 50 μ.—Τὸ θεμελιωδέστερον ἔργον τῆς σημερινῆς Μεθοδικῆς τῆς Ἀριθμητικῆς, ἀκολουθοῦν μετριασμένας Ἑρβαρτιανὰς ἀρχάς.

Heinze καὶ *Hübner*, Methodik des Rechnens, 3 μέρη, Breslau, Goerlich.

Henck, Wie ich mit meinen Kleinen rechne, Eine praktische Anweisung für den Rechenunterricht im Zahlenkreisevon 1—100, 5/6 ἔκδ., Chemnitz, Thüringer Verlagsanstalt, 19 9, 3 μ., δεμ. 3,80 μ.

Heuner, Lehrgang des Rechenunterrichts mit gleichmässiger Berücksichtigung des Kopf=und Zifferrechnens, München, Seybold, 1896, 3, 60 μ.

Hiemesch, Präparationen für den Rechenunterricht in der Volksschule, 2 ἔκδ., Langensalza, Beyer u. S., 1914, 1 μ., δεμ. 1,80 μ. [καλὴ ἐργασία].

Hoppe, 180 angewandte Aufgaben für die Unter=und Mittelstufe nebst Lösungen und Fingerzeichen für das Aus=bzw. Vorrechnen, 31 σ., 3 ἔκδ., Breslau, Hirt, 1913, 60λ.

Kempinsky, Der Rechenlehrer der Kleinen, 120 σελ., 4/5 ἔκδ., Leipzig, Dürr, 1919, δεμ. 3, 75 μ. [(Ἴδ. ἀν. σ. 370)].

Klaucke καὶ *Klein*, Anleitung zur Erteilung des Rechen=und Raumlehreunterrichts in Volksschulen, 3 ἔκδ., Düsseldorf, Schwann, 1909, 4, 20 μ., δεμ. 5 μ. — Πρακτικὴ καὶ περιεσκεμμένη ἐργασία.

Kleyer, Die Rechenstunde, Ein praktisch—anschaulicher Führer für die junge Lehrerwelt, in Lektionen über die wichtigsten Gebiete des Volksschulrechnens, 2 μέρη, München, Seyfried u. Co., 1910, δεμ. 2, 50 μ.

Knilling, Die naturgemässe Methode des Rechenunterrichts in der deutschen Volksschule, 2 μέρη, München, Oldenbourg, 4 μ., δεμ. 6 μ. [(Ἴδ. ἀν. σελ. 69)].

Knoche, Der Rechenunterricht auf der Unterstufe nach dem vereinigten Anschauungs=und. Zählprincip, Arnsberg, Stahl, 1899, 3 μ. [(῎Ιδ. ἀνωτ. σελ. 70)].

König, Selbsttätigkeit im ersten Rechenunterricht im Sinne der Arbeitsschule, 2 ἔκδ., Osterwieck, Zickfeldt, 1819, 1, 85 μ. [(῎Ιδ. ἀν. σελ. 370)].

[***Κυριακάτου Χ***. Ὁδηγὸς διδασκαλίας τῆς Ἀριθμητικῆς, τεῦχ. Α. (Α καὶ Β τάξεως), Ἀθῆναι, 1922, Βιβλιοπωλεῖον Ἑστίας[

Lahme, Die Zahlenlehre im Rechenunterrichte der Volksschule, 120 σ., Hilchenbach, Wiegand, 2, 80 μ.

[***Λάμψα Δ.***, Σχέδια παιδαγωγικῆς διδασκαλίας, Ἀθῆναι, Ι. Κολλάρος καὶ Σα, 1927. δρ. 60].

Lang, Bodenständiger Rechenunterricht, eine Sammlung von zahlenmässigen Angaben aus allen Gebieten menschlichen Lebens als Hilfsbuch für den Rechenunterricht aller Schulen, Langensalza, Kortkamp, 1912, 6, 50 μ. [(῎Ιδ. ἀν. σελ. 338)].

Lang, Fröhliches Rechnen im Zahlenraum 1—20, 2 ἔκδ., Würzburg, Kabitzsch, 1914, 2 μ., δεμ. 2, 80 μ. [(῎Ιδ. ἀνωτ. σελ. 3 0)].

Lang, Das Einmaleins in der Arbeitsschule, München, Oldenbourg, 1912, 1 μ.

Lay, Führer durch den Rechenunterricht der Unterstufe, Der Rechenunterricht auf experim. — pädag. Grundlage, I. Unterstufe, 3 ἔκδ., Leipzig, Quelle u. Meyer, 1914, 4 μ., δεμ. 4, 80 μ. Εἰσάγει τὸ πείραμα εἰς τὴν Μεθοδικὴν τῆς ἀριθμ. διδασκαλίας [(῎Ιδ. ἀν. σελ. 92 κ. ἀκ.)].

Lichtblau καὶ *Knotta*, Methodik des Rechenunterrichts, 412 σελ., 2 ἔκδ., Leipzig, Hirt, 1913. δεμ. 5 μ.

Lieb, Töpfer καὶ *Wolfram*, Methodisches Handbuch für den Rechenunterricht in der Volksschule (σχετιζόμενον μὲ τὴν συλλογὴν προβλημάτων τῶν ἴδιων συγγραφέων), 3 μέρη, Nürnberg, Korn, 1908, 4 μ., δεμ, 4, 60 μ.

Muthesius, Über die Stellung des Rechenunterrichts im

Lehrplan der Volksschule, Leipzig, Siegismund καὶ Volkening, 1894, 1, 50 μ., δεμ. 2 μ.

Petri καὶ *Gieseler*, Warum und wie sind die Kinder zum sebstständigen Bilden und Lösen der Rechenaufgaben, welche ihnen das spätere Leben stellt, anzuhalten? 2 ἔκδ., Arnsberg, Stahl, 1906, 1, 60 μ.—Χρήσιμον διὰ κάθε πρακτικὴν διδασκαλίαν καὶ τὴν πραγματικὴν ἀρίθμησιν [(῎Ιδ. ἀνωτ. σελ. 337)].

Räther, Theorie und Praxis des Rechenunterrichts, 4/5 ἔκδ., 3 μέρη εἰς 1 τόμον, Breslau, Morgenstern, 1910/16, 7, 25 μ., δεμ. 8 μ. Θεμελιῶδες [καὶ ἀπὸ πάσης ἀπόψεως ἄριστον ἔργον], σχετιζόμενον μὲ τὴν συλλογὴν προβλημάτων τοῦ ἴδιου συγγραφέως καὶ τοῦ Wohl

Ritthaler, Praxis des grundlegenden Rechenunterrichts, 1 μέρ. Zahlenraum bis 20, δεμ. 3, 50 μ., 2 μέρ. Zahlenraum bis 100, δεμ. 2. 40 μ., Halle a. d. S., Schroedel.

Ritthaler, Das Rechnen auf der Mittelstufe der Volksschule (Lehrerheft zum IV Heft des Rechenbuchs für Volksschulen τῶν Ritthaler καὶ Prütting). Der Zahlenraum bis 1000. Der unbegrenzte Zahlenraum. Ansbach, Seybold, 1912.

Schmidt, Zur Psychologie des elementaren Rechenunterrichts. Zugleich eine Würdigung der rechenmethodischen Bestrebungen Pestalozzis. Dresden, Bleyl u. Kaemmerer, 90 λ.

Schneider, Die Zahl im grundlegenden Rechenunterricht. Entstehung, Entwicklung und Veranschaulichung derselben unter Bezugnahme auf die physiologische Psychologie. Berlin, Reuther u. Reichard, 1900, 1, 60 μ.—Χρησιμοποιεῖ τὸ πείραμα. [(῎Ιδ. ἀν. σελ. 94 κ. ἀκ.)].

Schreiber, Die Tyrannei der Zahl, Altenburg, Pierer, 1900, 60 λ. [(῎Ιδ. ἀν. σελ. 366)].

Schreiber, Beiträge zur Theorie und Praxis des gesamten Elementarunterrichts, Altenburg, Pierer, 1901, 1, 50 μ.

Schröter, Methodik des Rechenunterrichts, 3 ἔκδ., Wit-

tenberg, Herrosé, 1905. 3, 50 μ., δεμ. 3, 75 μ.—Καλὸν διὰ τοὺς ἀρχαρίους.

Schwarz, Das Wesen der Zahl, Langensalza, Beyer u. S., 80 λ.

Steuer, Methodik des Rechenunterrichts, XIX καὶ 438 σ., 10 ἔκδ., Bielefeld, Velhagen u. Klasing, 1911, δεμ. 5, 25 μ.—Εἶναι πρακτικὸν ἔργον καὶ ἁπλοποιεῖ τὴν ἀριθμητ. διδασκαλίαν, σχετίζεται δὲ μὲ τὴν συλλογὴν τῶν προβλημάτων τοῦ ἴδιου συγγραφέως.

Tanck, Das Zählen und erste Rechnen, 2 ἐντελῶς τροποποιημένη ἔκδοσις τοῦ ἔργου τοῦ ἴδιου συγγραφ. «Rechnen auf der Unterstufe», 140 σελ., Kiel, Cordes, 1906, 2, 50 μ. [(Ἴδ. ἀν. σελ. 68)].

Tanck, Der Zahlenkreis von 1—20. Eine Anweisung zur Behandlung desselben in der Schule. Kiel, Cordes, 1906, 1, 20 μ.

Teupser, Wegweiser zur Bildung heimatlicher Rechenaufgaben, 3 ἔκδ., Leipzig, Hahn, 1913, 2, 50 μ., δεμ. 3 μ. [(Ἴδ. ἀνωτ. σελ. 321)].

Wagner, Der Zahlenquell. Eine Sammlung lebensvoller Rechenaufgaben im Anschluss an den ersten Sachenunterricht, Diessen vor München, I. C. Huber, 1909, 1, 50 μ.

Walsemann, Pestalozzis Rechenmethode, historisch—kritisch dargestellt und auf Grund experimenteller Nachprüfung für die Unterrichtspraxis erneuert, Hamburg, A. Lefèvre Nachf., 1901, 3 μ., δεμ. 4 μ.—Ζητεῖ νὰ ἐπαναφέρῃ εἰς χρῆσιν τὴν Μέθοδον τοῦ Πεσταλότση. [(Ἴδ. ἀν. σελ. 58)].

Wilk, Neue Rechenmethode gegründet auf das natürliche Werden der Zahlen und des Rechnens, 56 σ., 2 ἔκδ., Dresden, Bleyl u. Kaemmerer, 1911, 1, 20 μ.

Wilk, Das Rechnen der Volksschule. 1 Lehrerheft, 1, 50 μ., δεμ. 2 μ., 2 Lehrerheft, 1 μ., δεμ., 1, 50 μ., Dresden, Bleyl u. Kaemmerer.

Wilk, Das Werden der Zahlen im Menschen und in der Menschheit auf Grund von Psychologie und Geschichte, Dresden, Bleyl u. Kaemmerer, 1905, 1, 80 μ.

Zöllner, Der erste Rechenunterricht, Magdeburg, Peters, 1908, 50 λ.

Zöllner, Handbuch des Rechenunterrichts. Theorie und Praxis. 1 μέρ. Allgemeines. Die Zahlenfolge von 1—10, 1—20, 1—100, 1—1000 mit Einführung in das schriftliche Rechnen, 212 σ., Osterwieck, Zickfeldt, 3, 50 μ., δεμ. 5 μ.

Β΄. Συλλογαὶ ἀριθμητικῶν προβλημάτων.

Beetz, Einheitliche Rechenaufgaben für Stadt=und Landschulen, 5 τεύχη πρὸς 50, 40, 40, 50, 60 λ. (ἡ ἔκδ. B (διὰ τὰ ἀγροτικὰ σχολεῖα) εἰς 3 τεύχη), Osterwieck, Zickfeldt.

Böhme, Übungsbuch im Rechnen: A für die abschliessende Volksschule: 5 τεύχη, 1, 25 μ.—B für weiterführende Schulen: 5 τεύχη, 2, 15 μ.—C für 7 und 8 klassige Schulen: 7 τεύχη, 2, 30 μ. Νέα ἔκδοσις ἀπὸ τοὺς Schaeffer καὶ Weidenhammer.—D für höhere Mädchenschulen, Bielefeld, Velhagen u. Klasing.

Braune, Rechenbuch für Volks — und Bürgerschulen. Νέα ἐπεξεργασία ἀπὸ τὸν Hanft. Διάφοροι ἐκδόσεις. Halle a. d. S., Schroedel.

Büttner, Rechenaufgaben. Ἐκδόσεις δι' ὅλας τὰς σχολικὰς συνθήκας. Leipzig, Hirt.

Gerlach, Des Kindes erstes Rechenbuch. Μὲ εἰκόνας τοῦ Th. Herrmann. Leipzig, Quelle u. Meyer, 70 λ. [(Ἴδ. ἀνωτ. σελ. 364)].

Hartmann — Ruhsam, Rechenbuch für Stadt = und Landschulen. Ἔκδ. A. 6 τεύχη, ἔκδ. B 4 τεύχη. Frankfurt a. M., Kesselring.

Haesters καὶ *Röhm*, Rechenbuch für die deutsche Volksschule. 7 τεύχη. Essen, Baedecker.

Hecht καὶ *Pohl*, Rechenbuch für Knaben=und Mädchen Mittelschulen, Bielefeld, Velhagen u. Klasing.

Heiland καὶ *Muthesius*, Rechenheft für Stadt=und Landschulen, Weimar, Böhlau.

Heinze καὶ *Hübner*, Rechenbuch für Stadt=und Landschulen. Ἔκδ. A εἰς 6 τεύχη, ἔκδ. B εἰς 3 τεύχη, ἔκδ. C εἰς 7 τεύχη. Breslau, Goerlich.

Hentschel, ἔκδ. A: Zifferrechnen (ἐπεξ. ἀπὸ τὸν Költzsch): 5 τεύχη, 90 λ.—Ἔκδ. B (ἐπεξ. ἀπὸ τὸν Jänicke): 6 τεύχη, 1, 40 μ. Leipzig, Merseburger.

Hentschel καὶ *Költzsch*, Aufgaben zum Kopfrechnen, Leipzig, Merseburger, 2 τεύχη, 2, 20 μ.

Heuer, Übungsbuch für den Rechenunterricht, ἐπεξ. τοῦ Magnus. Ἔκδ. A εἰς 7 τεύχη, B εἰς 3 τεύχη. Hannover, Meyer.

Hoppe, Rechenbuch für ein-bis dreiklassige Volksschulen, εἰς 2 ἐκδ., ἑκάστη ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 τεύχη. Ἡ ἔκδ. A. εἶναι διὰ κανονικὰς σχολικὰς συνθήκας, ἡ ἔκδ. B. διὰ μὴ κανονικάς. (Διὰ τὸν διδάσκαλον δὲ τὸ Handbuch für den Rechenunterricht auf der Mittel=und Oberstufe der ein=bis dreiklassigen Volksschulen, 97 σ., 1 μ.). Königsberg, Bon.

Kentenich, Aufgabenhefte für den Rechenunterricht in der Volksschule, 5 τεύχη, Düsseldorf, Schwann.

Knoche, Rechenbuch, 4 τεύχη. Arnsberg, Stahl.

Koschemann, *Otten* καὶ *Petzold*, Lehr=und Übungsbuch für den mathematischen Unterricht an Mittelschulen, bearbeitet nach den Bestimmungen vom 3 Februar 1910. Ἔκδ. A διὰ τὰ ἄρρενα, B διὰ τὰ θήλεα, ἡ καθεμία ἀπὸ 9 τεύχη. Frankfurt a. M., Diesterweg.

Räther καὶ *Wohl*, Übungsbuch für mündliches und schriftliches Rechnen. Διάφοροι ἐκδόσεις. Breslau, Morgenstern.

Rechenbuch, συνταχθὲν ἀπὸ τοὺς Rocke, Roeger, Wolf καὶ τὴν σχετικὴν ἐπιτροπὴν τοῦ διδασκαλικοῦ συλλόγου τῆς Λειψίας, 6 τεύχη, Leipzig, Dürr.

Rechenbuch für Volksschulen, συνταχθὲν ὑπὸ σχολικῶν ἀνδρῶν τῆς Δρέσδης, 5 τεύχη, Dresden, Bleyl u. Kaemmerer. [(Ἴδ. ἀν. σελ.256 κ.τ.λ.]).

Rechenbuch für Volksschulen, ἐκδιδόμ. ὑπὸ τῆς Παιδαγωγικῆς Ἑνώσεως τοῦ Chemnitz. Ἔκδ. A εἰς 6 τεύχη, ἔκδ. B εἰς 4 τεύχη. Chemnitz, Pickenhahn u S.

Steuer, Rechenbuch Ἐκδόσεις εἰς 3, 5 καὶ 7 τεύχη. Bielefeld, Velhagen u. Klasing.

Tanck, Rechenbuch, 8 τεύχη, Meldorf, Bremer.

Thieme καὶ *Schlosser*, Rechenübungen für Volksschulen. Διὰ τὰ Σαξωνικὰ σχολεῖα. Dresden, Huhle.

Wilk, Das Rechnen in der Volksschule. 1 μαθητ. τεῦχος (ἀριθμ. 1—100), 30 λ. 2 μαθητ. τεῦχ. (1—1000) 30 λ.. Dresden, Bleyl u. Kaemmerer.

Γ.' Ἔργα δι' ἀνώτερα σχολεῖα καὶ ἀνωτέρας σπουδάς.

Bardey καὶ *Pietzker*, Aufgabensammlung für Gymnasien, Leipzig, Teubner, 3, 20 μ.

Behrendsen καὶ *Götting*, Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Ἔκδ. A für Gymnasien, Oberlyceen κ.τ.λ. 3, 60 μ. Ἔκδ. B für Oberrealschulen, Realgymnasien κ.τ.λ., Leipzig, Teubner, 4 μ.

Bussler, Elemente der Mathematik für Gymnasien, Dresden, Ehlermann, δεμ. 3, 70 μ.

Bussler, Mathematisches Übungsbuch, 2 μέρη, Dresden, Ehlermann, δεμ. 4, 30 μ.

Crantz, Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht, Leipzig, Teubner (ἀπὸ τὴν συλλογὴν «aus Natur und Geisteswelt), χαρτοδ. 3, 20 μ., δεμ. 4, 25 μ.

Fenkner, Arithmetische Aufgaben. Ἔκδ. B, 4 ἔκδ., Berlin, Salle, 1, 65 μ.

Gauss, Hauptsätze der Elementararithmetik, Bunzlau, Kreuschmer, 3 μ.

Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeiner Arithmetik und Algebra, Köln, Du Mout Schauberg, 2 μέρ. δεμ., τὸ καθὲν 3 μ.

Hoffmann, Anleitung zur Fortbildung in der Mathematik, Berlin. Union, 1, 60 μ.

Junker, Methodische Aufgabensammlung für Arithmetik und Algebra, Stuttgart, Ulmer, 2, 80 μ.

Kambly καὶ *Roeder*, Stereometrie und sphärische Trigonometrie, Breslau, Hirt, 2 μ.

Klauke καὶ *Sassenfeld*, Lehrbuch der Mathematik, Düsseldorf, Schwann, 4 μ.

Lesser, Lehr=und Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra, Leipzig, Freytag, 2 μέρη, 3 μ.

Lieber καὶ *Lühmann*, Leitfaden der Elementar=Mathematik, μέρ. III: Ebene Trigonometrie, Stereometrie, sphärische Trigonometrie, 180 σελ., 14 ἔκδ., Berlin, Simion, 1909, δεμ. 2, 10 μ.

Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Analysis zum Selbstunterricht, 11 ἔκδ., Leipzig, Brandstetter, 1914, 3, 60 μ., δεμ. 4, 60 μ.

Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Trigonometrie, 20 ἔκδ., Leipzig, Brandstetter, 1917, 2, 80 μ., δεμ. 3, 30 μ.

Mayer, Das mathematische Pensum des Primaners, τεύχ. 11 κα 12: Kombinatorik, Leipzig, Schäfer, 1, 20 μ.—Πρὸς αὐτοδιδασκαλίαν.

Plath, Aufgabensammlung, Leipzig, Teubner, 4 μ.

Raydt, Arithmetisches Wiederholungsbuch, Hannover=Linden, Manz u. Lange, 2 μ.

Schneider, Geometrie leicht gemacht, Bamberg, Buchner, δεμ. 1, 80 μ.

Schuster, Trigonometrie, Leipzig, Teubner, 1, 80 μ.

Seyffarth, Allgemeine Arithmetik und Algebra, I καὶ II μέρος, Dresden, Bleyl καὶ Kaemmerer.

Spieker, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 11 ἔκδ., Potsdam, Stein, 1916, δεμ. 2, 40 μ.

Spieker, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Potsdam, Stein, 3, 40 μ., δεμ. 4 μ.

Voss, Über das Wesen der Mathematik, 2 ἔκδ., Leipzig, Teubner, 1913, 3, 60 μ.

Walther, Mathematischer Lehr=und Übungsgang für Lehrerbildungsanstalten, I μέρος: Geometrie, 2, 80 μ., II μέρος: Stereometrie und Trigonometrie, 2 μ., Leipzig, Brandstetter.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

Σελίς

Σελ.

Σελ.